

宁夏大学附属中学 2024 届高三第四次模拟考试数学试卷

考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $\alpha \in (0, \pi)$ ，且 $\tan \alpha = 2$ ，则 $\cos 2\alpha + \cos \alpha =$ ()

- A. $\frac{2\sqrt{5}-3}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}-3}{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}+3}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}+3}{5}$

2. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) + b$ ($\omega > 0$)， $f(\frac{\pi}{8} + x) = f(\frac{\pi}{8} - x)$ ，且 $f(\frac{\pi}{8}) = 5$ ，则 $b =$ ()

- A. 3 B. 3 或 7 C. 5 D. 5 或 8

3. 已知 $\omega > \frac{1}{3}$ ，函数 $f(x) = \sin\left(2\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有最值，给出下列四个结论：

① $f(x)$ 在 $(\pi, 2\pi)$ 上单调递增；

② $\omega \in \left[\frac{5}{12}, \frac{11}{24}\right]$

③ $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上没有零点；

④ $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上只有一个零点。

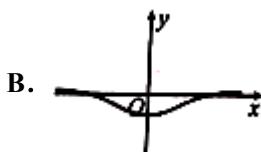
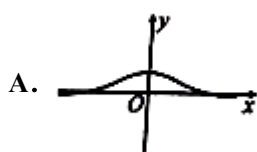
其中所有正确结论的编号是 ()

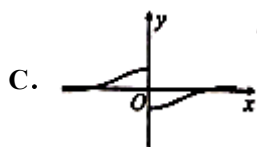
- A. ②④ B. ①③ C. ②③ D. ①②④

4. 已知数列 $\left\{\frac{1}{a_n} - 1\right\}$ 是公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列，且 $a_1 > 0$ ，若数列 $\{a_n\}$ 是递增数列，则 a_1 的取值范围为 ()

- A. (1, 2) B. (0, 3) C. (0, 2) D. (0, 1)

5. 函数 $f(x) = \frac{\cos x}{2^x + 2^{-x}}$ 的部分图像大致为 ()





6. 已知 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 给出四个命题:

- ①若 $\alpha \perp \beta, m \subset \alpha, n \subset \beta, n \perp m$, 则 $\alpha \perp \beta$; ②若 $m \perp \alpha, m \perp \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$;
③若 $m \parallel n, m \subset \alpha, \alpha \parallel \beta$, 则 $n \parallel \beta$; ④若 $m \perp \alpha, n \perp \beta, m \perp n$, 则 $\alpha \perp \beta$

其中正确的是 ()

- A. ①② B. ③④ C. ①④ D. ②④

7. 已知 i 为虚数单位, 则 $\frac{2+3i}{(1-2i)i} =$ ()

- A. $\frac{7}{5} + \frac{4}{5}i$ B. $\frac{7}{5} - \frac{4}{5}i$ C. $\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$ D. $\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$

8. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - (x-1)e^x (a \in \mathbb{R})$ 若对区间 $[0,1]$ 内的任意实数 x_1, x_2, x_3 , 都有 $f(x_1) + f(x_2) \geq f(x_3)$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $[1,2]$ B. $[e,4]$ C. $[1,4]$ D. $[1,2) \cup [e,4]$

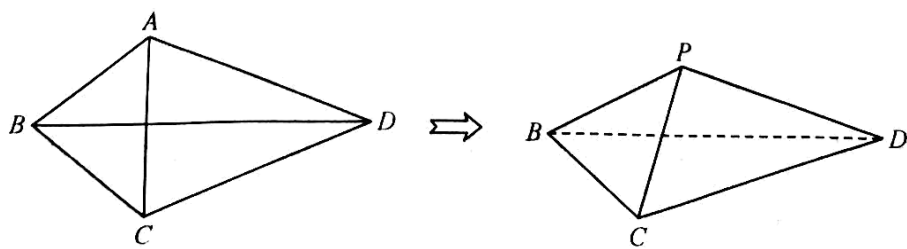
9. 已知点 F_1 是抛物线 $C: x^2 = 2py$ 的焦点, 点 F_2 为抛物线 C 的对称轴与其准线的交点, 过 F_2 作抛物线 C 的切线, 切点为 A , 若点 A 恰好在以 F_1, F_2 为焦点的双曲线上, 则双曲线的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2}-1$ C. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ D. $\sqrt{2}+1$

10. 椭圆是日常生活中常见的图形, 在圆柱形的玻璃杯中盛半杯水, 将杯体倾斜一个角度, 水面的边界即是椭圆. 现有一高度为 12 厘米, 底面半径为 3 厘米的圆柱形玻璃杯, 且杯中所盛水的体积恰为该玻璃杯容积的一半 (玻璃厚度忽略不计), 在玻璃杯倾斜的过程中 (杯中的水不能溢出), 杯中水面边界所形成的椭圆的离心率的取值范围是 ()

- A. $\left[0, \frac{\sqrt{5}}{6}\right]$ B. $\left[\frac{\sqrt{5}}{5}, 1\right)$ C. $\left[0, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right]$ D. $\left[\frac{2\sqrt{5}}{5}, 1\right)$

11. 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, 满足 $AB = BC, CD = AD$, 且 $AB + AD = 10, BD = 8$, 沿着 BD 把 ABD 折起, 使点 A 到达点 P 的位置, 且使 $PC = 2$, 则三棱锥 $P-BCD$ 体积的最大值为 ()



- A. 12 B. $12\sqrt{2}$ C. $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{16}{3}$

12. 已知 i 为虚数单位, 若复数 z 满足 $\frac{5}{1+2i} = \bar{z} - i$, 则 $z =$ ()

- A. $1+i$ B. $-1+i$ C. $1-2i$ D. $1+2i$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 设 $(\sqrt{2}+x)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10}$, 则 $a_2 =$ _____,

$(a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{10})^2 - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_9)^2$ 的值为_____.

14. 甲、乙两人下棋, 两人下成和棋的概率是 $\frac{1}{2}$, 乙获胜的概率是 $\frac{1}{3}$, 则乙不输的概率是_____.

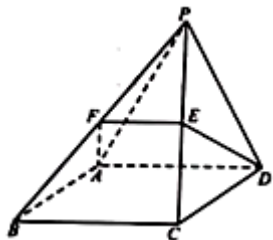
15. 某部门全部员工参加一项社会公益活动, 按年龄分为 A , B , C 三组, 其人数之比为 $5:3:2$, 现用分层抽样的方法从总体中抽取一个容量为 20 的样本, 若 C 组中甲、乙二人均被抽到的概率是 $\frac{1}{11}$, 则该部门员工总人数为_____.

16. 安排 4 名男生和 4 名女生参与完成 3 项工作, 每人参与一项, 每项工作至少由 1 名男生和 1 名女生完成, 则不同的安排方式共有_____种 (用数字作答).

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 是矩形, $AB = \frac{\sqrt{3}}{2}AD$, $\triangle PAD$ 为正三角形, 且平面

$PAD \perp$ 平面 $ABCD$, E 、 F 分别为 PC 、 PB 的中点.



(1) 证明: 平面 $ADEF \perp$ 平面 PBC ;

(2) 求二面角 $B-DE-C$ 的余弦值.

18. (12 分) [选修 4-5: 不等式选讲]

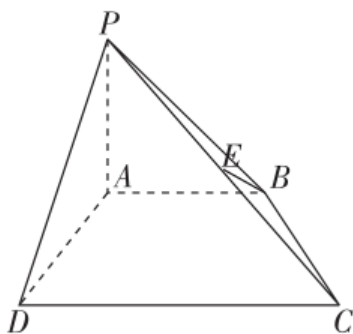
设函数 $f(x) = |x+1|$.

(1) 求不等式 $f(x) \leq 5 - f(x-3)$ 的解集;

(2) 已知关于 x 的不等式 $2f(x) + |x+a| \leq x+4$ 在 $[-1,1]$ 上有解, 求实数 a 的取值范围.

19. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp AB$, $AB \parallel CD$, $AB = AD = AP = \frac{1}{2}CD = 2$,

E 为 PC 的中点.



(1) 求证: $BE \perp$ 平面 PCD ;

(2) 求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值.

20. (12 分) 一个工厂在某年里连续 10 个月每月产品的总成本 y (万元) 与该月产量 x (万件) 之间有如下的一组数据:

x	1.08	1.12	1.19	1.28	1.36	1.48	1.59	1.68	1.80	1.87
y	2.25	2.37	2.40	2.55	2.64	2.75	2.92	3.03	3.14	3.26

(1) 通过画散点图, 发现可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系, 请用相关系数 r 加以说明;

(2) ①建立月总成本 y 与月产量 x 之间的回归方程; ②通过建立的 y 关于 x 的回归方程, 估计某月产量为 1.98 万件时, 产品的总成本为多少万元? (均精确到 0.001)

附注: ①参考数据: $\sum_{i=1}^{10} x_i = 14.45$, $\sum_{i=1}^{10} y_i = 27.31$, $\sqrt{\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 10\bar{x}^2} \approx 0.850$, $\sqrt{\sum_{i=1}^{10} y_i^2 - 10\bar{y}^2} \approx 1.042$, $\hat{b} = 1.223$.

②参考公式: 相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2\right)}}$, $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$.

21. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 前 n 项和为 S_n , 若对任意的 $n \in N^*$, 均有 $S_n = a_{n+k} - k$ (k 是常数, 且 $k \in N^*$) 成立, 则称数列 $\{a_n\}$ 为“ $H(k)$ 数列”.

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 为“ $H(1)$ 数列”, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 为“ $H(2)$ 数列”, 且 a_2 为整数, 试问: 是否存在数列 $\{a_n\}$, 使得 $|a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1}| \leq 40$ 对任意 $n \geq 2$,

$n \in N^*$ 成立? 如果存在, 求出这样数列 $\{a_n\}$ 的 a_2 的所有可能值, 如果不存在, 请说明理由.

22. (10 分) 已知 $f(x) = x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 - k \ln x - 1$ ($k \in \mathbf{R}$).

(1) 若 $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 求 k 的取值范围;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点, 判断函数 $f(x)$ 零点的个数.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、B

【解析】

分析: 首先利用同角三角函数关系式, 结合题中所给的角的范围, 求得 $\cos \alpha$ 的值, 之后借助于倍角公式, 将待求的式子转化为关于 $\cos \alpha$ 的式子, 代入从而求得结果.

详解: 根据题中的条件, 可得 α 为锐角,

根据 $\tan \alpha = 2$, 可求得 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

而 $\cos 2\alpha + \cos \alpha = 2\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} - 1 = \frac{\sqrt{5} - 3}{5}$, 故选 B.

点睛: 该题考查的是有关同角三角函数关系式以及倍角公式的应用, 在解题的过程中, 需要对已知真切求余弦的方法要明确, 可以应用同角三角函数关系式求解, 也可以结合三角函数的定义式求解.

2、B

【解析】

根据函数的对称轴 $x = \frac{\pi}{8}$ 以及函数值, 可得结果.

【详解】

函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) + b$ ($\omega > 0$),

若 $f(\frac{\pi}{8} + x) = f(\frac{\pi}{8} - x)$, 则 $f(x)$ 的图象关于 $x = \frac{\pi}{8}$ 对称,

又 $f(\frac{\pi}{8}) = 5$, 所以 $2 + b = 5$ 或 $-2 + b = 5$,

所以 b 的值是 7 或 3.

故选: B .

【点睛】

本题考查的是三角函数的概念及性质和函数的对称性问题, 属基础题

3、A

【解析】

先根据函数 $f(x) = \sin\left(2\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有最值求出 $k - \frac{1}{12}$, ω , $\frac{k}{2} + \frac{5}{24}$ 或 $k + \frac{5}{12}$, ω , $\frac{k}{2} + \frac{11}{24}$. 再根据

已知求出 $\frac{1}{3} < \omega$, $\frac{1}{2}$, 判断函数的单调性和零点情况得解.

【详解】

因为函数 $f(x) = \sin\left(2\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有最值.

所以 $2k\pi - \frac{\pi}{2}$, $2\omega\pi - \frac{\pi}{3} < 4\omega\pi - \frac{\pi}{3}$, $2k\pi + \frac{\pi}{2}$, 或 $2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $2\omega\pi - \frac{\pi}{3} < 4\omega\pi - \frac{\pi}{3}$, $2k\pi + \frac{3\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

解得 $k - \frac{1}{12}$, ω , $\frac{k}{2} + \frac{5}{24}$ 或 $k + \frac{5}{12}$, ω , $\frac{k}{2} + \frac{11}{24}$.

又 $T = \frac{2\pi}{2\omega} \dots 2\pi$, $\omega > \frac{1}{3}$, 所以 $\frac{1}{3} < \omega$, $\frac{1}{2}$.

令 $k = 0$. 可得 $\omega \in \left[\frac{5}{12}, \frac{11}{24}\right]$. 且 $f(x)$ 在 $(\pi, 2\pi)$ 上单调递减.

当 $x \in [0, \pi]$ 时, $2\omega x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, 2\pi\omega - \frac{\pi}{3}\right]$, 且 $2\pi\omega - \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12}\right]$,

所以 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上只有一个零点.

所以正确结论的编号②④

故选: A .

【点睛】

本题主要考查三角函数的图象和性质, 考查函数的零点问题, 意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

4、D

【解析】

先根据已知条件求解出 $\{a_n\}$ 的通项公式, 然后根据 $\{a_n\}$ 的单调性以及 $a_1 > 0$ 得到 a_1 满足的不等关系, 由此求解出 a_1 的取值范围.

【详解】

由已知得 $\frac{1}{a_n} - 1 = \left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ，则 $a_n = \frac{1}{\left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 1}$ 。

因为 $a_1 > 0$ ，数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列，

所以 $a_{n+1} > a_n > 0$ ，则 $\frac{1}{\left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \left(\frac{1}{3}\right)^n + 1} > \frac{1}{\left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 1}$ ，

化简得 $0 < \left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \frac{1}{3} < \frac{1}{a_1} - 1$ ，所以 $0 < a_1 < 1$ 。

故选：D。

【点睛】

本题考查数列通项公式求解以及根据数列单调性求解参数范围，难度一般。已知数列单调性，可根据 a_n, a_{n+1} 之间的大小关系分析问题。

5、A

【解析】

根据函数解析式，可知 $f(x)$ 的定义域为 $x \in \mathbf{R}$ ，通过定义法判断函数的奇偶性，得出 $f(-x) = f(x)$ ，则 $f(x)$ 为偶函数，可排除 C, D 选项，观察 A, B 选项的图象，可知代入 $x = 0$ ，解得 $f(0) > 0$ ，排除 B 选项，即可得出答案。

【详解】

解：因为 $f(x) = \frac{\cos x}{2^x + 2^{-x}}$ ，

所以 $f(x)$ 的定义域为 $x \in \mathbf{R}$ ，

则 $f(-x) = \frac{\cos(-x)}{2^{-x} + 2^x} = \frac{\cos x}{2^x + 2^{-x}} = f(x)$ ，

$\therefore f(x)$ 为偶函数，图象关于 y 轴对称，排除 C, D 选项，

且当 $x = 0$ 时， $f(0) = \frac{1}{2} > 0$ ，排除 B 选项，所以 A 正确。

故选：A。

【点睛】

本题考查由函数解析式识别函数图象，利用函数的奇偶性和特殊值法进行排除。

6、D

【解析】

根据面面垂直的判定定理可判断①；根据空间面面平行的判定定理可判断②；根据线面平行的判定定理可判断③；根据面面垂直的判定定理可判断④.

【详解】

对于①，若 $\alpha \perp \beta = m$ ， $n \subset \alpha$ ， $n \perp m$ ， α ， β 两平面相交，但不一定垂直，故①错误；

对于②，若 $m \perp \alpha$ ， $m \perp \beta$ ，则 $\alpha \parallel \beta$ ，故②正确；

对于③，若 $m \parallel n$ ， $m \subset \alpha$ ， $\alpha \parallel \beta$ ，当 $n \subset \beta$ ，则 n 与 β 不平行，故③错误；

对于④，若 $m \perp \alpha$ ， $n \perp \beta$ ， $m \perp n$ ，则 $\alpha \perp \beta$ ，故④正确；

故选：D

【点睛】

本题考查了线面平行的判定定理、面面平行的判定定理以及面面垂直的判定定理，属于基础题.

7、A

【解析】

根据复数乘除运算法则，即可求解.

【详解】

$$\frac{2+3i}{(1-2i)i} = \frac{2+3i}{2+i} = \frac{(2+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{7}{5} + \frac{4}{5}i.$$

故选：A.

【点睛】

本题考查复数代数运算，属于基础题题.

8、C

【解析】

分析：先求导,再对 a 分类讨论求函数的单调区间，再画图分析转化对区间 $[0,1]$ 内的任意实数 x_1 、 x_2 、 x_3 ，都有

$f(x_1)+f(x_2) \geq f(x_3)$ ，得到关于 a 的不等式组，再解不等式组得到实数 a 的取值范围.

详解：由题得 $f'(x) = ax - [e^x + (x-1)e^x] = ax - xe^x = x(a - e^x)$.

当 $a < 1$ 时， $f'(x) < 0$ ，所以函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递减，

因为对区间 $[0,1]$ 内的任意实数 x_1 、 x_2 、 x_3 ，都有 $f(x_1)+f(x_2) \geq f(x_3)$ ，

所以 $f(1)+f(1) \geq f(0)$ ，

$$\text{所以 } \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a \geq 1,$$

故 $a \geq 1$, 与 $a < 1$ 矛盾, 故 $a < 1$ 矛盾.

当 $1 \leq a < e$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[0, \ln a]$ 单调递增, 在 $(\ln a, 1]$ 单调递减.

$$\text{所以 } f(x)_{\max} = f(\ln a) = \frac{1}{2}a \ln^2 a - a \ln a + a,$$

因为对区间 $[0, 1]$ 内的任意实数 x_1, x_2, x_3 , 都有 $f(x_1) + f(x_2) \geq f(x_3)$,

$$\text{所以 } f(0) + f(1) \geq f(\ln a),$$

$$\text{所以 } 1 + \frac{1}{2}a \geq \frac{1}{2}a \ln^2 a - a \ln a + a,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2}a \ln^2 a - a \ln a + \frac{1}{2}a - 1 \leq 0$$

$$\text{令 } g(a) = \frac{1}{2}a \ln^2 a - a \ln a + \frac{1}{2}a - 1, (1 \leq a < e),$$

$$\text{所以 } g'(a) = \frac{1}{2}(\ln^2 a - 1) < 0,$$

所以函数 $g(a)$ 在 $(1, e)$ 上单调递减,

$$\text{所以 } g(a)_{\max} = g(1) = -\frac{1}{2} < 0,$$

所以当 $1 \leq a < e$ 时, 满足题意.

当 $a \geq e$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递增,

因为对区间 $[0, 1]$ 内的任意实数 x_1, x_2, x_3 , 都有 $f(x_1) + f(x_2) \geq f(x_3)$,

$$\text{所以 } f(0) + f(0) \geq f(1),$$

$$\text{故 } 1 + 1 \geq \frac{1}{2}a,$$

所以 $a \leq 4$.

$$\text{故 } e \leq a \leq 4.$$

综上所述, $a \in [1, 4]$.

故选 C.

点睛: 本题的难点在于“对区间 $[0, 1]$ 内的任意实数 x_1, x_2, x_3 , 都有 $f(x_1) + f(x_2) \geq f(x_3)$ ”的转化. 由于是函数的问题, 所以我们要联想到利用函数的性质 (单调性、奇偶性、周期性、对称性、最值、极值等) 来分析解答问题. 本题就是把这个条件和函数的单调性和最值联系起来, 完成了数学问题的等价转化, 找到了问题的突破口.

9、D

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/448033044045006076>