

2024 届云南省昆明市外国语学校高三第二学期期末检测试题

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

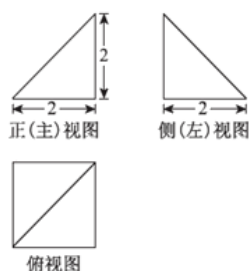
1. 半径为 2 的球 O 内有一个内接正三棱柱，则正三棱柱的侧面积的最大值为 ()

- A. $9\sqrt{3}$ B. $12\sqrt{3}$ C. $16\sqrt{3}$ D. $18\sqrt{3}$

2. 已知 $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$, 若 $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$, 则向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向的投影为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{7}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{7}{2}$

3. 某四棱锥的三视图如图所示，记 S 为此棱锥所有棱的长度的集合，则 () .



- A. $2\sqrt{2} \notin S$, 且 $2\sqrt{3} \notin S$ B. $2\sqrt{2} \notin S$, 且 $2\sqrt{3} \in S$

- C. $2\sqrt{2} \in S$, 且 $2\sqrt{3} \notin S$ D. $2\sqrt{2} \in S$, 且 $2\sqrt{3} \in S$

4. 双曲线 $C: \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{m} = 1$ ($m > 0$), 左焦点到渐近线的距离为 2, 则双曲线 C 的渐近线方程为 ()

- A. $2x \pm 5y = 0$ B. $2x \pm \sqrt{5}y = 0$ C. $\sqrt{5}x \pm 2y = 0$ D. $\sqrt{5}x \pm y = 0$

5. 已知复数 z 满足 $z(1+i) = 1-i$ (i 为虚数单位), 则 z 的虚部为 ()

- A. $-i$ B. i C. 1 D. -1

6. $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AB 上, CD 平分 $\angle ACB$, 若 $\vec{CB} = \vec{a}$, $\vec{CA} = \vec{b}$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, 则 $\vec{CD} =$ ()

- A. $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ B. $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ C. $\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b}$ D. $\frac{4}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$

7. 已知 $a = \ln \sqrt[3]{3}$, $b = e^{-1}$, $c = \frac{3 \ln 2}{8}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > c > a$ D. $b > a > c$

8. 已知圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ 关于双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线对称, 则双曲线 C

的离心率为()

- A. $\sqrt{5}$ B. 5 C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{5}{4}$

9. 复数 $z = \frac{i}{1+2i}$ 的共轭复数在复平面内所对应的点位于()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

10. 已知全集 $U = \mathbf{R}$ ，函数 $y = \ln(1-x)$ 的定义域为 M ，集合 $N = \{x | x^2 - x < 0\}$ ，则下列结论正确的是

- A. $M \cap N = N$ B. $M \cap (\complement_U N) = \emptyset$
C. $M \cup N = U$ D. $M \subseteq (\complement_U N)$

11. $(3x^3 + x^4)(2 - \frac{1}{x})^8$ 展开式中 x^2 的系数为()

- A. -1280 B. 4864 C. -4864 D. 1280

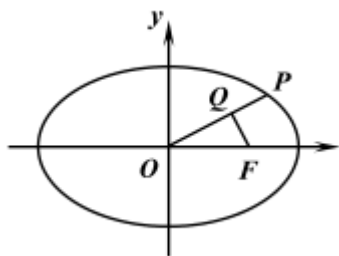
12. 正四棱锥 $P-ABCD$ 的五个顶点在同一个球面上，它的底面边长为 $\sqrt{6}$ ，侧棱长为 $2\sqrt{3}$ ，则它的外接球的表面积为()

- A. 4π B. 8π C. 16π D. 20π

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 如图，椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 e ， F 是 Γ 的右焦点，点 P 是 Γ 上第一象限内任意一点，

$\overrightarrow{OQ} = \lambda \overrightarrow{OP} (\lambda > 0)$ ， $\overrightarrow{FQ} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$ ，若 $\lambda < e$ ，则 e 的取值范围是_____.



14. 已知 x, y 满足 $\begin{cases} x \geq 1 \\ x + y \leq 4 \\ ax + by + c \leq 0 \end{cases}$ 且目标函数 $z = 2x + y$ 的最大值为 7，最小值为 1，则 $\frac{a+b+c}{a} =$ _____.

15. 数学家狄里克雷对数论，数学分析和数学物理有突出贡献，是解析数论的创始人之一.函数

$D(x) = \begin{cases} 1, x \text{ 为有理数} \\ 0, x \text{ 为无理数} \end{cases}$ ，称为狄里克雷函数.则关于 $D(x)$ 有以下结论:

① $D(x)$ 的值域为 $[0, 1]$;

② $\forall x \in R, D(-x) = D(x)$;

③ $\forall T \in R, D(x+T) = D(x)$;

④ $D(1)+D(\sqrt{2})+D(\sqrt{3})+L +D(\sqrt{2020})=45$;

其中正确的结论是_____ (写出所有正确的结论的序号)

16. 若 $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x^2}\right)^n$ 的展开式中只有第六项的二项式系数最大，则展开式中各项的系数和是_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 为了整顿道路交通秩序，某地考虑将对行人闯红灯进行处罚.为了更好地了解市民的态度，在普通行人中随机选取了 200 人进行调查，当不处罚时，有 80 人会闯红灯，处罚时，得到如表数据：

处罚金额 x （单位：元）	5	10	15	20
会闯红灯的人数 y	50	40	20	10

若用表中数据所得频率代替概率.

- (1) 当罚金定为 10 元时，行人闯红灯的概率会比不进行处罚降低多少？
- (2) 将选取的 200 人中会闯红灯的市民分为两类：A 类市民在罚金不超过 10 元时就会改正行为；B 类是其他市民.现对 A 类与 B 类市民按分层抽样的方法抽取 4 人依次进行深度问卷，则前两位均为 B 类市民的概率是多少？
18. (12 分) 在考察疫情防控工作中，某区卫生防控中心提出了“要坚持开展爱国卫生运动，从人居环境改善、饮食习惯、社会心理健康、公共卫生设施等多个方面开展，特别是要坚决杜绝食用野生动物的陋习，提倡文明健康、绿色环保的生活方式”的要求.某小组通过问卷调查，随机收集了该区居民六类日常生活习惯的有关数据.六类习惯是：(1) 卫生习惯状况类；(2) 垃圾处理状况类；(3) 体育锻炼状况类；(4) 心理健康状况类；(5) 膳食合理状况类；(6) 作息规律状况类.经过数据整理，得到下表：

	卫生习惯状况类	垃圾处理状况类	体育锻炼状况类	心理健康状况类	膳食合理状况类	作息规律状况类
有效答卷份数	380	550	330	410	400	430
习惯良好频率	0.6	0.9	0.8	0.7	0.65	0.6

假设每份调查问卷只调查上述六类状况之一，各类调查是否达到良好标准相互独立.

- (1) 从小组收集的有效答卷中随机选取 1 份，求这份试卷的调查结果是在膳食合理状况类中习惯良好者的概率；
- (2) 从该区任选一位居民，试估计他在“卫生习惯状况类、体育锻炼状况类、膳食合理状况类”三类习惯方面，至少具备两类良好习惯的概率；

(3) 利用上述六类习惯调查的排序, 用“ $\xi_k = 1$ ”表示任选一位第 k 类受访者是习惯良好者, “ $\xi_k = 0$ ”表示任选一位第 k 类受访者不是习惯良好者 ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). 写出方差 $D\xi_1, D\xi_2, D\xi_3, D\xi_4, D\xi_5, D\xi_6$ 的大小关系.

19. (12 分) [选修 4-5: 不等式选讲]: 已知函数 $f(x) = |x + 2a| + |x - a|$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 4 - |x + 2|$ 的解集;

(2) 设 $a > 0, b > 0$, 且 $f(x)$ 的最小值为 t . 若 $t + 3b = 3$, 求 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln x - ax + a$, 其中 $a > 0$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的零点个数;

(2) 求证: $e^x + \sin x > x \ln x + 1$.

21. (12 分) 已知 a, b, c 均为正实数, 函数 $f(x) = \left|x + \frac{1}{a^2}\right| + \left|x - \frac{1}{b^2}\right| + \frac{1}{4c^2}$ 的最小值为 1. 证明:

(1) $a^2 + b^2 + 4c^2 \geq 9$;

(2) $\frac{1}{ab} + \frac{1}{2bc} + \frac{1}{2ac} \leq 1$.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = x \ln x - 2 \ln x + 3x - 5$, $g(x) = \ln x + \frac{2x - a}{x} + \frac{a}{x^2}$.

(1) 求证: $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上有且仅有一个零点 x_0 , 且 $x_0 \in \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$;

(2) 若当 $x \geq 1$ 时, 不等式 $g(x) \geq 0$ 恒成立, 求证: $a < \frac{49}{4}$.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、B

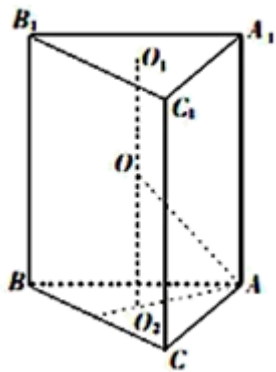
【解析】

设正三棱柱上下底面的中心分别为 O_1, O_2 , 底面边长与高分别为 x, h , 利用 $OA^2 = OO_2^2 + O_2A^2$, 可得

$h^2 = 16 - \frac{4}{3}x^2$ ，进一步得到侧面积 $S = 3xh$ ，再利用基本不等式求最值即可。

【详解】

如图所示. 设正三棱柱上下底面的中心分别为 O_1, O_2 ，底面边长与高分别为 x, h ，则 $O_2A = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ，



在 $Rt\triangle OAO_2$ 中， $\frac{h^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 4$ ，化为 $h^2 = 16 - \frac{4}{3}x^2$ ，

$QS = 3xh$ ，

$$\therefore S^2 = 9x^2h^2 = 12x^2(12 - x^2), \quad 12\left(\frac{x^2 + 12 - x^2}{2}\right)^2 = 432,$$

当且仅当 $x = \sqrt{6}$ 时取等号，此时 $S = 12\sqrt{3}$ 。

故选：B.

【点睛】

本题考查正三棱柱与球的切接问题，涉及到基本不等式求最值，考查学生的计算能力，是一道中档题。

2、B

【解析】

由 $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$ ， $|\vec{a}| = \sqrt{3}$ ， $|\vec{b}| = 2 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ ，再由向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向的投影为 $\frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$ 化简运算即可

【详解】

$$\because \vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b}) \therefore \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 3,$$

$$\therefore \text{向量 } \vec{a} + \vec{b} \text{ 在向量 } \vec{b} \text{ 方向的投影为 } \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2}{|\vec{b}|} = \frac{3 + 4}{2} = \frac{7}{2}.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查向量投影的几何意义，属于基础题

3、D

【解析】

首先把三视图转换为几何体，根据三视图的长度，进一步求出个各棱长.

【详解】

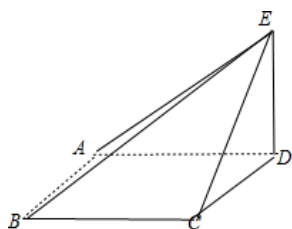
根据几何体的三视图转换为几何体为：该几何体为四棱锥体，

如图所示：

所以： $AB = BC = CD = AD = DE = 2$ ，

$$AE = CE = 2\sqrt{2}, \quad BE = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}.$$

故选：D.



【点睛】

本题考查三视图和几何体之间的转换，主要考查运算能力和转换能力及思维能力，属于基础题.

4、B

【解析】

首先求得双曲线的一条渐近线方程 $\sqrt{m}x - \sqrt{5}y = 0$ ，再利用左焦点到渐近线的距离为 2，列方程即可求出 m ，进而求出渐近线的方程.

【详解】

设左焦点为 $(-c, 0)$ ，一条渐近线的方程为 $\sqrt{m}x - \sqrt{5}y = 0$ ，由左焦点到渐近线的距离为 2，可得 $\frac{|\sqrt{m}c|}{\sqrt{m+5}} = \sqrt{m} = 2$ ，

所以渐近线方程为 $y = \pm \frac{2x}{\sqrt{5}}$ ，即为 $2x \pm \sqrt{5}y = 0$ ，

故选：B

【点睛】

本题考查双曲线的渐近线的方程，考查了点到直线的距离公式，属于中档题.

5、D

【解析】

根据复数 z 满足 $z(1+i)=1-i$ ，利用复数的除法求得 z ，再根据复数的概念求解.

【详解】

因为复数 z 满足 $z(1+i)=1-i$ ，

$$\text{所以 } z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = -i,$$

所以 z 的虚部为 -1 .

故选：D.

【点睛】

本题主要考查复数的概念及运算，还考查了运算求解的能力，属于基础题.

6、B

【解析】

由 CD 平分 $\angle ACB$ ，根据三角形内角平分线定理可得 $\frac{BD}{DA} = \frac{CB}{CA}$ ，再根据平面向量的加减法运算即得答案.

【详解】

Q CD 平分 $\angle ACB$ ，根据三角形内角平分线定理可得 $\frac{BD}{DA} = \frac{CB}{CA}$ ，

$$\text{又 } \overrightarrow{CB} = \vec{a}, \overrightarrow{CA} = \vec{b}, |\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1,$$

$$\therefore \frac{BD}{DA} = 2, \therefore BD = 2DA.$$

$$\therefore \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} = \vec{a} + \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}.$$

故选：B.

【点睛】

本题主要考查平面向量的线性运算，属于基础题.

7、D

【解析】

构造函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ，利用导数求得 $f(x)$ 的单调区间，由此判断出 a, b, c 的大小关系.

【详解】

依题意，得 $a = \ln \sqrt[3]{3} = \frac{\ln 3}{3}$ ， $b = e^{-1} = \frac{\ln e}{e}$ ， $c = \frac{3 \ln 2}{8} = \frac{\ln 8}{8}$. 令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ，所以 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. 所以函数 $f(x)$

在 $(0, e)$ 上单调递增，在 $(e, +\infty)$ 上单调递减. 所以 $[f(x)]_{\max} = f(e) = \frac{1}{e} = b$ ，且 $f(3) > f(8)$ ，即 $a > c$ ，所以

$b > a > c$. 故选: D.

【点睛】

本小题主要考查利用导数求函数的单调区间, 考查化归与转化的数学思想方法, 考查对数式比较大小, 属于中档题.

8、C

【解析】

将圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$, 化为标准方程为, 求得圆心为 $(2, -1)$. 根据圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ 关于双曲线

$C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线对称, 则圆心在渐近线上, $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$. 再根据 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ 求解.

【详解】

已知圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$,

所以其标准方程为: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$,

所以圆心为 $(2, -1)$.

因为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$,

所以其渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$,

又因为圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ 关于双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线对称,

则圆心在渐近线上,

所以 $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$.

所以 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

故选: C

【点睛】

本题主要考查圆的方程及对称性, 还有双曲线的几何性质, 还考查了运算求解的能力, 属于中档题.

9、D

【解析】

由复数除法运算求出 z , 再写出其共轭复数, 得共轭复数对应点的坐标. 得结论.

【详解】

$$z = \frac{i}{1+2i} = \frac{i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{i+2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i, \quad \bar{z} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i, \text{ 对应点为 } \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right), \text{ 在第四象限.}$$

故选：D.

【点睛】

本题考查复数的除法运算，考查共轭复数的概念，考查复数的几何意义．掌握复数的运算法则是解题关键．

10、A

【解析】

求函数定义域得集合 M，N 后，再判断．

【详解】

由题意 $M = \{x | x < 1\}$ ， $N = \{x | 0 < x < 1\}$ ， $\therefore M \cap N = N$ ．

故选 A．

【点睛】

本题考查集合的运算，解题关键是确定集合中的元素．确定集合的元素时要注意代表元形式，集合是函数的定义域，还是函数的值域，是不等式的解集还是曲线上的点集，都由代表元决定．

11、A

【解析】

根据二项式展开式的公式得到具体为： $\left(3x^3\right)\left[C_8^1 2^7\left(-\frac{1}{x}\right)\right]+x^4 \cdot\left[C_8^2 2^6\left(-\frac{1}{x}\right)^2\right]$ 化简求值即可．

【详解】

根据二项式的展开式得到可以第一个括号里出 $3x^3$ 项，第二个括号里出 $\frac{1}{x}$ 项，或者第一个括号里出 x^4 ，第二个括号里

出 $\frac{1}{x^2}$ ，具体为： $\left(3x^3\right)\left[C_8^1 2^7\left(-\frac{1}{x}\right)\right]+x^4 \cdot\left[C_8^2 2^6\left(-\frac{1}{x}\right)^2\right]$

化简得到 $-1280 x^2$

故得到答案为：A．

【点睛】

求二项展开式有关问题的常见类型及解题策略：

(1)求展开式中的特定项.可依据条件写出第 $r+1$ 项，再由特定项的特点求出 r 值即可．

(2)已知展开式的某项，求特定项的系数.可由某项得出参数项，再由通项写出第 $r+1$ 项，由特定项得出 r 值，最后求出其参数．

12、C

【解析】

如图所示，在平面 $ABCD$ 的投影为正方形的中心 E ，故球心 O 在 PE 上，计算长度，设球半径为 R ，则

$$(PE - R)^2 + BE^2 = R^2, \text{ 解得 } R = 2, \text{ 得到答案.}$$

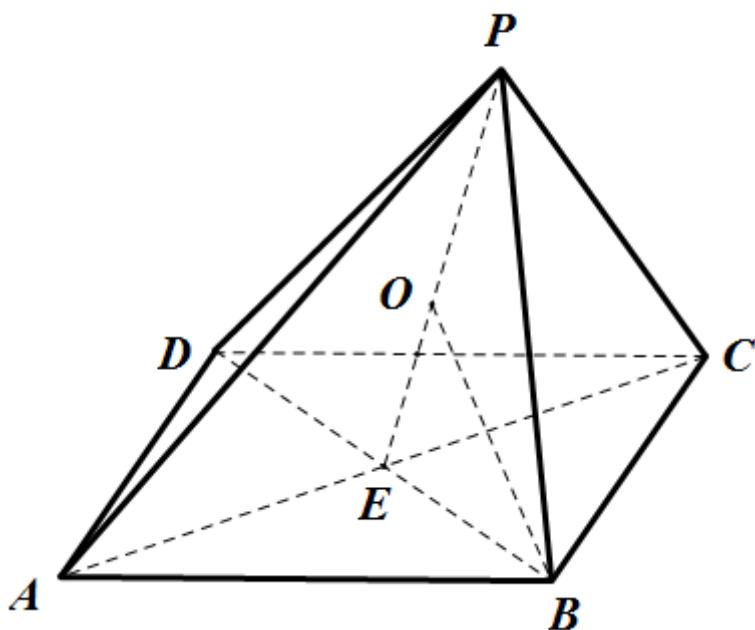
【详解】

如图所示： P 在平面 $ABCD$ 的投影为正方形的中心 E ，故球心 O 在 PE 上，

$$BD = \sqrt{2}AB = 2\sqrt{3}, \text{ 故 } BE = \frac{1}{2}BD = \sqrt{3}, \quad PE = \sqrt{PB^2 - BE^2} = 3,$$

设球半径为 R ，则 $(PE - R)^2 + BE^2 = R^2$ ，解得 $R = 2$ ，故 $S = 4\pi R^2 = 16\pi$ 。

故选：C。



【点睛】

本题考查了四棱锥的外接球问题，意在考查学生的空间想象能力和计算能力。

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、 $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

【解析】

由于点 P 在椭圆上运动时， OP 与 x 轴的正方向的夹角在变，所以先设 $\angle FOQ = \theta$ ，又由 $\vec{FQ} \cdot \vec{OP} = 0$ ，可知

$Q(c \cos^2 \theta, c \cos \theta \sin \theta)$ ，从而可得 $P\left(\frac{c \cos^2 \theta}{\lambda}, \frac{c \cos \theta \sin \theta}{\lambda}\right)$ ，而点 P 在椭圆上，所以将点 P 的坐标代入椭圆方程中化简可得结果。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/448055127040006117>