第 18 讲 相似多边形

模块导航

模块一　思维导图串知识
模块二　基础知识全梳理（吃透教材）
模块三　核心考点举一反三
模块四　小试牛刀过关测

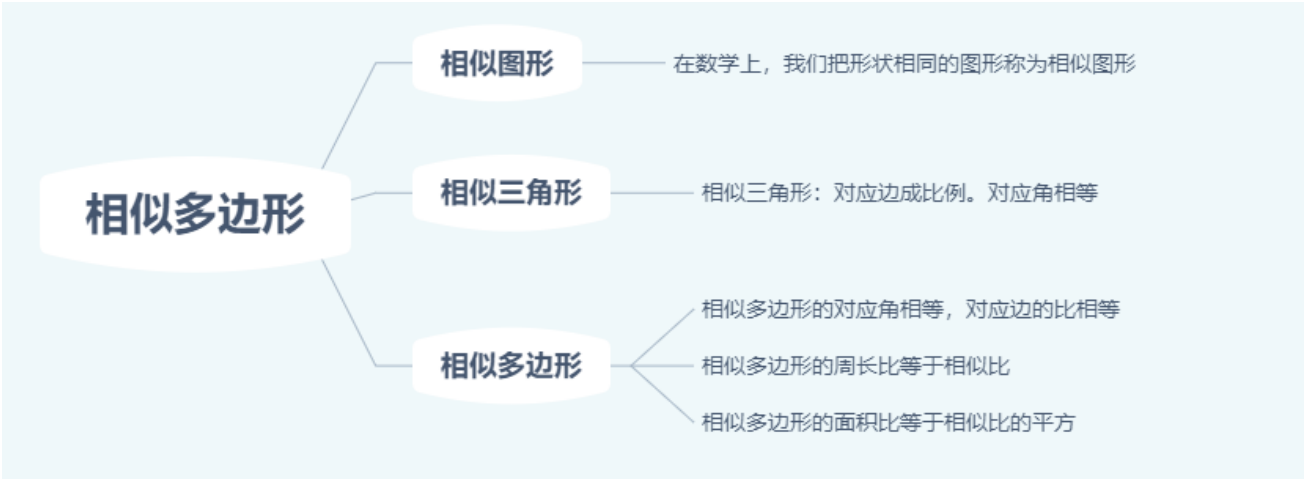
素养目标

1．了解相似多边形和相似比的概念；

2．会根据条件判断两个多边形是否为相似多边形；

3. 掌握相似多边形的性质，能根据相似比进行相关的计算.

模块一 思维导图串知识



模块二 基础知识全梳理

知识点一、相似图形

相似图形：在数学上，我们把形状相同的图形称为相似图形.

要点：(1) 相似图形就是指形状相同，但大小不一定相同的图形；

(2) “全等”是“相似”的一种特殊情况，即当“形状相同”且“大小相同”时，两个图形全等；

知识点二、相似三角形

在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，如果$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}=k$，我们就说$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$相似，记作$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$. k 就是它们的相似比，“$\backsim$”读作“相似于”

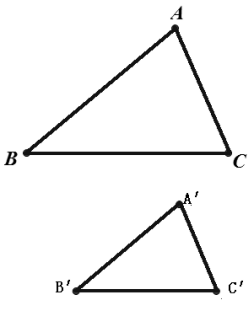
知识点三、相似多边形

相似多边形的性质：

（1）相似多边形的对应角相等，对应边的比相等.

（2）相似多边形的周长比等于相似比.

（3）相似多边形的面积比等于相似比的平方.



要点：用相似多边形定义判定特殊多边形的相似情况：

（1）对应角都相等的两个多边形不一定相似，如：矩形；

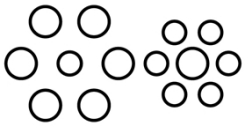
（2）对应边的比都相等的两个多边形不一定相似，如：菱形；

（3）边数相同的正多边形都相似，如：正方形，正五边形.

模块三 核心考点举一反三

考点一：相似图形的判断

例 1．（23-24 九年级下·全国·课后作业）下列图标中，不是相似图形的是（　）

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【分析】本题考查相似图形，解题的关键是理解相似图形的定义．根据相似图形的定义判断即可．

【详解】解：选项 A，B，D 是相似图形，选项 C 不是相似图形．

故选：C．

【变式 1-1】（23-24 九年级上·安徽六安·期末）下列多边形一定相似的是（　）

A．两个等腰三角形　　B．两个平行四边形

C．两个正五边形　　D．两个六边形

【答案】C

【分析】本题主要考查了相似图形的判定，掌握相似形的定义（如果两个边数相同的多边形的对应角相等，对应边成比例，这两个多边形相似）是解题的关键．

根据相似三角形的定义逐项判断即可．

【详解】解：A、两个等边三角形相似，但是两个等腰三角形并不一定相似，三个角度没有确定，故 A 不正确；

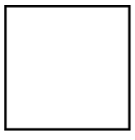
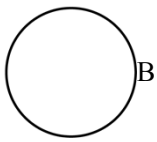
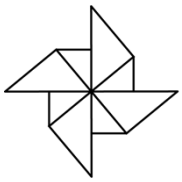
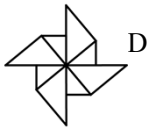
B、两个平行四边形对应角度及对应边都不一定成比例，所以不一定相似，故 B 不正确；

C、两个正五边形角度相等，放大缩小后可以完全重合，两图形相似，故 C 正确；

D、两个正六边形相似，但是两个六边形并不一定相似，故 D 不正确．

故选 C．

【变式 1-2】（23-24 九年级下·湖北武汉·开学考试）下面几对图形中，相似的是（　）

A.   B.   C.  D.  

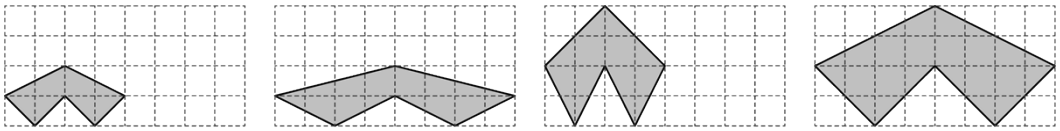
【答案】C

【分析】根据相似图形的形状相同，进行判断即可．

【详解】解：A，B，D 三个选项中的图形形状不同，不相似，C 选项中的两个图形形状相同，相似；

故选：C.

【变式 1-3】（2024·江苏连云港·中考真题）下列网格中各个小正方形的边长均为 1，阴影部分图形分别记作甲、乙、丙、丁，其中是相似形的为（　）



甲　　乙　　丙　　丁

A．甲和乙　　B．乙和丁　　C．甲和丙　　D．甲和丁

【答案】D

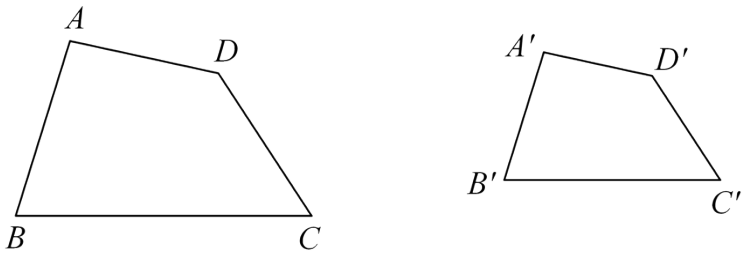
【分析】本题考查相似图形，根据对应角相等，对应边对应成比例的图形是相似图形结合正方形的性质，进行判断即可.

【详解】解：由图可知，只有选项甲和丁中的对应角相等，且对应边对应成比例，它们的形状相同，大小不同，是相似形.

故选 D.

考点二：相似多边形的性质及对应性

例 2.如图，四边形 $ABCD$ ∽ 四边形 $A'B'C'D'$，$AB=12$，$BC=9$，$B'C'=6$，$C'D'=4$．$\angle A=95°$，$\angle D=136°$，$\angle B'=60°$



(1) $\angle C'=$_____；

(2)求边 $A'B'$，CD 的长度.

【答案】(1) $69°$

(2) $A'B'=8$，$CD=6$

【分析】本题考查了相似多边形的性质；

（1）根据相似多边形的性质得出对应角相等，根据四边形内角和定理求得 $\angle C'$；

（2）由四边形 $ABCD$ ∽ 四边形 $A'B'C'D'$，根据相似多边形对应边的比相等列出比例式 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}$

，将 $AB=12$，$BC=9$，$B'C'=6$，$C'D'=4$ 代入，计算即可求出边 $A'B'$，CD 的长．

【详解】（1）解：∵四边形 $ABCD\backsim$ 四边形 $A'B'C'D'$，$\angle A=95°$，$\angle D=136°$，$\angle B'=60°$

$\therefore\angle A'=95°$，$\angle D'=136°$

$\therefore\angle C'=360°-\angle A'-\angle B'-\angle D'$

$=360°-95°-60°-136°=69°$

故答案为：$69°$

（2）解：∵四边形 $ABCD\backsim$ 四边形 $A'B'C'D'$

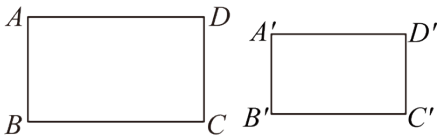
$\therefore\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CD}{C'D'}$

∵ $AB=12$，$BC=9$，$B'C'=6$，$C'D'=4$

$\therefore\dfrac{12}{A'B'}=\dfrac{9}{6}=\dfrac{CD}{4}$

解得：$A'B'=8$，$CD=6$

【变式 2-1】（22-23 九年级上·陕西咸阳·期中）如图，已知矩形 $ABCD\backsim$ 矩形 $A'B'C'D'$，且它们的相似比是 $4:3$，已知 $AB=3$，$BC=5$．求 $A'B'$ 和 $B'C'$ 的长．



【答案】$A'B'=\dfrac{9}{4}$，$B'C'=\dfrac{15}{4}$

【分析】本题考查了相似多边形的性质，熟练掌握相似多边形的性质是解题关键．根据相似多边形的性质求解即可得．

【详解】解：∵矩形 $ABCD\backsim$ 矩形 $A'B'C'D'$，且它们的相似比是 $4:3$，

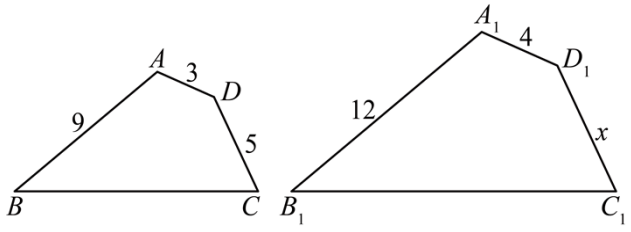
$\therefore\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{3}{4}$，

∵ $AB=3$，$BC=5$，

$\therefore\dfrac{A'B'}{3}=\dfrac{B'C'}{5}=\dfrac{3}{4}$，

解得 $A'B'=\dfrac{9}{4}$，$B'C'=\dfrac{15}{4}$．

【变式 2-2】（23-24 九年级上·陕西榆林·期中）如图，四边形 $ABCD\backsim$ 四边形 $A_1B_1C_1D_1$，$\angle A=116°$，$\angle B=40°$，$\angle C=65°$，求 x 的值和 $\angle D_1$ 的度数．



【答案】$x=\dfrac{20}{3}$，$\angle D_1=139°$.

【分析】本题主要考查了相似多边形的性质．根据“相似多边的对应角相等，对应边成比例”，即可求解．

【详解】解：∵$\angle A=116°$，$\angle B=40°$，$\angle C=65°$，

∴$\angle D=360°-116°-40°-65°=139°$.

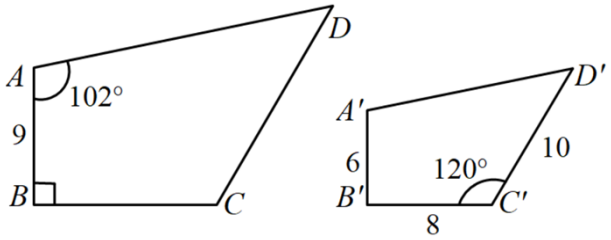
∵四边形 $ABCD\backsim$ 四边形 $A_1B_1C_1D_1$，

∴$\angle D_1=\angle D=139°$，$\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{CD}{C_1D_1}$，

∴$\dfrac{9}{12}=\dfrac{5}{x}$，

∴$x=\dfrac{20}{3}$.

【变式 2-3】（22-23 九年级上·河北邯郸·阶段练习）如图，四边形 $ABCD\backsim$ 四边形 $A'B'C'D'$



(1) $\angle D'$ 的度数为_____，四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 的相似比为_____；

(2)分别求边 BC　BC 与边 CD 的长度．

【答案】(1) $48°$；$\dfrac{3}{2}$

(2) $BC=12$，$CD=15$

【分析】（1）根据相似得到对应角相等，再根据四边形内角和定理即可得到答案；

（2）根据相似得到对应线段成比例即可得到答案．

【详解】（1）解：∵四边形 $ABCD\backsim$ 四边形 $A'B'C'D'$，

∴$\angle A=\angle A'=102°$，$\angle B=\angle B=90°,\angle C=\angle C'=120°$，

∴$\angle D'=360°-102°-90°-120°=48°$，

相似比为：$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{9}{6}=\dfrac{3}{2}$.

（2）解：∵四边形 $ABCD\backsim$ 四边形 $A'B'C'D'$，

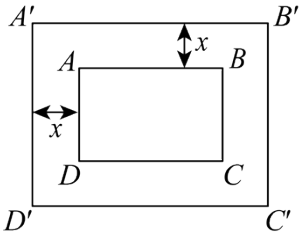
∴$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{AD}{A'D'}$，

∴$BC=\dfrac{9}{6}\times 8=12$，$CD=\dfrac{9}{6}\times 10=15$.

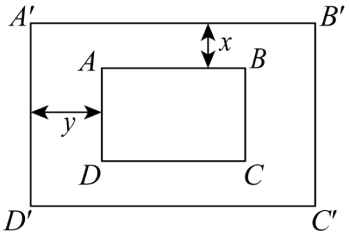
【点睛】本题考查相似图形的性质及四边形内角和定理，解题的关键是找准对应角对应边．

考点三：相似多边形性质的应用

例 3.（23-24 九年级下·全国·课后作业）在 $AB=30\text{m}$，$AD=20\text{m}$ 的矩形花坛四周修筑小路.



图①



图②

(1)如图①，如果四周小路的宽均相等，且宽度为 x，那么矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 相似吗？请说明理由；

(2)如图②，如果互相平行的两条小路的宽相等，且宽度分别为 x，$y\left(y>x\right)$，试问：当两条小路的宽 x 与 y 的比值为多少时，矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 相似？请说明理由.

【答案】(1)不相似，见解析

(2)$\frac{2}{3}$，见解析

【分析】此题考查了相似多边形的判定．此题难度适中，注意掌握数形结合思想与方程思想的应用.

（1）首先设四周的小路的宽为 x，易得 $\frac{30+2x}{30}\neq\frac{20+2x}{20}$，则可判定：小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 不相似；

（2）由相似多边形的性质可得：当 $\frac{30+2y}{30}=\frac{20+2y}{20}$ 时，小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 相似，继而求得答案.

【详解】（1）解：不相似，理由如下：

如果四周的小路的宽均相等，那么小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 不相似；

设四周的小路的宽为 x，

$\because\frac{30+2x}{30}=\frac{15+x}{15}$，$\frac{20+2x}{20}=\frac{10+x}{10}$，

$\therefore\frac{30+2x}{30}\neq\frac{20+2x}{20}$，

∴小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 不相似；

（2）解：当小路的宽 x 与 y 的比值为 $\frac{2}{3}$ 时，

矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 相似.

理由如下：

当矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 相似时 $\frac{30+2y}{30}=\frac{20+2y}{20}$，解得 $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$

所以当小路的宽 x 与 y 的比值为 $\frac{2}{3}$ 时，矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 相似.

【变式 3-1】（22-23 九年级上·宁夏银川·期中）一个矩形 $ABCD$ 的较短边长为 2.

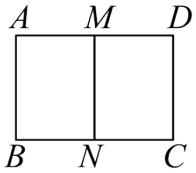


图1

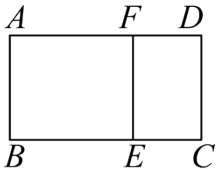


图2

(1)如图 1，若沿长边对折后得到的矩形与原矩形相似，求 BC 的长；

(2)如图 2，已知矩形 $ABCD$ 的另一边长为 4，剪去一个矩形 $ABEF$ 后，余下的矩形 $EFDC$ 与原矩形 $ABCD$ 相似，求矩形 $EFDC$ 的面积.

【答案】(1)$2\sqrt{2}$

(2)2

【分析】（1）根据题意可得 $MN=AB=2$，$MD=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC$，根据相似多边形的性质得 $\frac{DM}{AB}=\frac{MN}{BC}$，据此代值计算即可；

（2）根据相似多边形的性质得 $\frac{DF}{AB}=\frac{CD}{BC}$，然后利用比例性质求出 DF，再利用矩形面积公式计算矩形 $EFDC$ 的面积.

【详解】（1）解：由题意得 $MN=AB=2$，$MD=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC$，

∵沿长边对折后得到的矩形与原矩形相似，

∴矩形 $DMNC$ 与矩形 $ABCD$ 相似，

$\therefore \frac{DM}{AB}=\frac{MN}{BC}$，

$\therefore DM\cdot BC=AB\cdot MN$，即 $\frac{1}{2}BC^2=4$，

$\therefore BC=2\sqrt{2}$；

（2）解：∵矩形 $EFDC$ 与原矩形 $ABCD$ 相似，

$\therefore \frac{DF}{AB}=\frac{CD}{BC}$，

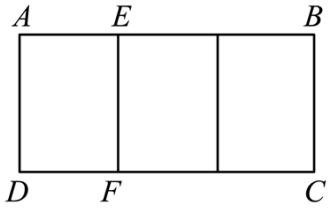
∵ $AB=CD=2$，$BC=4$，

$\therefore DF=\frac{AB\cdot CD}{BC}=1$，

∴矩形 $EFDC$ 的面积 $=CD\cdot DF=2\times 1=2$.

【点睛】本题考查了相似多边形的性质，解决本题的关键是掌握如果两个多边形的对应角相等，对应边的比相等，则这两个多边形是相似多边形；相似多边形对应边的比叫做相似比.

【变式 3-2】（22-23 九年级上·浙江杭州·期末）如图，把一个矩形 $ABCD$ 划分成三个全等的小矩形.



(1)若原矩形 $ABCD$ 的长 $AB=6$，宽 $BC=4$．问：每个小矩形与原矩形相似吗？请说明理由.

(2)若原矩形的长 $AB=a$，宽 $BC=b$，且每个小矩形与原矩形相似，求矩形长 a 与宽 b 应满足的关系式.

【答案】(1)不相似；证明过程见详解

(2) $a^2=3b^2$

【分析】（1）根据划分后小矩形的长为 $AD=4$，宽为 AE=2，可得 $\frac{AB}{BC}\neq\frac{AD}{AE}$，进而可判断结论；

（2）根据划分后小矩形的长为 $AD=b$，宽为 $AE=\frac{a}{3}$，再根据每个小矩形与原矩形相似，可得 $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{AE}$，从而可得 a 与 b 的关系式.

【详解】（1）解：不相似．理由如下：

∵原矩形 $ABCD$ 的长 $AB=6$，宽 $BC=4$，

∴划分后小矩形的长为 $AD=4$，宽为 $AE=6\div3$=2，

又∵ $\frac{AB}{BC}=\frac{6}{4}\neq\frac{4}{2}=\frac{AD}{AE}$，即原矩形与每个小矩形的边不成比例，

∴每个小矩形与原矩形不相似.

（2）∵原矩形的长 $AB=a$，宽 $BC=b$，

∴划分后小矩形的长为 $AD=b$，宽为 $AE=\frac{a}{3}$，

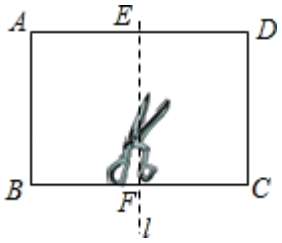
又∵每个小矩形与原矩形相似，

$\therefore\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{AE}$

$\therefore\frac{a}{b}=\frac{b}{\frac{a}{3}}$，即 $a^2=3b^2$.

【点睛】本题考查了相似多边形的性质，本题的关键是根据两矩形相似得到比例式.

【变式 3-3】（2022 九年级上·浙江·专题练习）矩形 $ABCD$ 纸片的边 AB 长为2cm，动直线 l 分别交 AD,BC 于 E、F 两点，且 $EF/\!/AB$：



(1)若直线 l 是矩形 $ABCD$ 的对称轴，且沿着直线 l 剪开后得的矩形 $EFCD$ 与原矩形相似，试求 AD 的长？

(2)若使 $AD=\left(\sqrt{5}+1\right)\text{cm}$，试探究：在 AD 边上是否存在点 E，使剪刀沿着直线 l 剪开后，所得到的小矩形纸片中存在与原矩形 $ABCD$ 相似的情况．若存在，请求出 AE 的值，并判断 E 点在边 AD 上位置的特殊性；若不存在，试说明理由．

【答案】(1) $2\sqrt{2}$

(2)存在， $AE=\left(\sqrt{5}-1\right)\text{cm}$ 或 2cm，E 刚好是边 AD 的两个黄金分割点

【分析】（1）先根据矩形 $EFCD\backsim$ 矩形 $CBAD$ 可得出两矩形的对应边成比例，再 $AD=2CF=2x$，把 CD,AB 的值代入关系式即可得出 x 的值，进而可求出 AD 的值；

（2）假设存在矩形 $EFCD$ 与矩形 $ABCD$ 相似，则 DC 必与 AD 对应，ED 必与 DC 对应，由相似多边形的对应边成比例即可得出 ED 的长，进而可得出 AE 的长，进而可得出结论．

【详解】（1）解：∵矩形 $EFCD\backsim$ 矩形 $CBAD$，

$\therefore\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{AB}{CF}$，

又∵ $CD=AB=2$，

可设 $AD=2CF=2x$，

$\therefore\dfrac{2x}{2}=\dfrac{2}{x}$，

解得：$x=\sqrt{2}$，

$\therefore AD=2\sqrt{2}$；

（2）解：假设存在矩形 $EFCD$ 与矩形 $ABCD$ 相似；

则 DC 必与 AD 对应，ED 必与 DC 对应，

$\therefore\dfrac{DC}{AD}=\dfrac{ED}{DC}$，

$\therefore DC^2=AD\cdot ED$，

又∵ $DC=2\text{cm},AD=\left(\sqrt{5}+1\right)\text{cm}$

$\therefore ED=\dfrac{DC^2}{AD}=\dfrac{4}{\sqrt{5}+1}=\left(\sqrt{5}-1\right)\text{cm}$

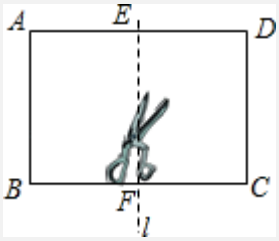
$\therefore AE=AD-\left(\sqrt{5}-1\right)=2\text{cm}$，

而 $AE=2>\sqrt{5}-1=ED$，

依据对称性考虑，必定存在当 $AE=\left(\sqrt{5}-1\right)\text{cm}$ 时，使矩形 $EFCD$ 与矩形 $ABCD$ 相似的情形，

综上所述：当 $AE=\left(\sqrt{5}-1\right)\text{cm}$ 或 2cm 时，在剪开所得到的小矩形纸片中必存在与原矩形相似；

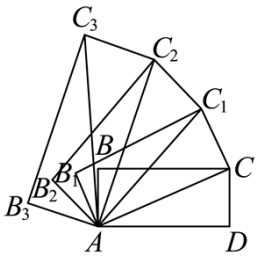
且该两种情形中，E 刚好是边 AD 的两个黄金分割点．



【点睛】本题考查的是相似多边形的性质，熟练掌握相似多边形的对应边成比例是解题的关键．

考点四：相似多边形性质的动态问题

例 4.（23-24 九年级上·四川内江·期中）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$BC=2$，连接 AC，以对角线 AC 为边，按逆时针方向作矩形 ACC_1B_1，使矩形 $ACC_1B_1\backsim$ 矩形 $ADCB$；再连接 AC_1，以对角线 AC_1 为边，按逆时针方向作矩形 $AC_1C_2B_2$，使矩形 $AC_1C_2B_2\backsim$ 矩形 ACC_1B_1，…，按照此规律作下去，则边 AC_{2023} 的长为（）



A．$\sqrt{5}\times\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{2023}$　B．$2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{2022}$　C．$\sqrt{5}\times2^{2023}$　D．$2\times\left(\sqrt{5}\right)^{2023}$

【答案】A

【分析】本题考查了矩形的性质，勾股定理，相似多边形的性质“相似多边形对应边的比叫做相似比”，解此题的关键是能根据求出的结果得出规律．

根据已知和矩形的性质可分别求得 AC，利用相似多边形的性质可发现规律，根据规律即可解决问题．

【详解】∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AD\perp DC$,

$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$,

∵按逆时针方向作矩形 $ABCD$ 的相似矩形 ACC_1B_1，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/448076077020006111