

技巧归类

解三角形
大题
归类

处理范围及最值问题

- ①基本不等式结合余弦定理:适用于“平方和”和“积”
 ②正弦定理转为三角函数问题:适用于整体结构不对称,或者角度有更细致的要求

多三角形

多三角形问题是指将一个三角形或者一个四边形切割成若干个三角形,在解题过程中,需要学生分析三角形间的公共边、公共角、关系角等图形特征,利用方程的思想,利用正余弦定理与三角函数公式进行结合求解

中线问题:

AD 为 $\triangle ABC$ 的内角 $\angle BAC$ 的中线,则有 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$,
 两边平方后 $|\overrightarrow{AD}|^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})$

角平分线问题:

AD 为 $\triangle ABC$ 的内角 $\angle BAC$ 的平分线,则有

- ①内角平分线定理: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$.
 ②等面积法:因为 $S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ABC}$,
 所以 $\frac{1}{2}c \cdot AD \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2}b \cdot AD \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2}bc \sin A$

高线问题:

- ① h_1, h_2, h_3 分别为 $\triangle ABC$ 边 a, b, c 上的高,
 则 $h_1:h_2:h_3 = \frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c} = \frac{1}{\sin A}:\frac{1}{\sin B}:\frac{1}{\sin C}$;
 ②一般采用等面积法求解

题型目录

题型一	利用基本不等式求最值范围
题型二	与角度有关的最值范围
题型三	化边为角求最值范围
题型四	多三角形问题
题型五	中线问题
题型六	角平分线问题
题型七	高线问题

利用基本不等式求最值范围

1. 在① $(2 - \sin A)\cos B - 1 = \cos A \sin B - 2\cos B \sin C$; ② $(2a - c)\cos B = b\cos C$ 两个条件中任选一个, 补充在下面的问题中, 并解答该问题. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 且 _____.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 若点 D 满足 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$, 且线段 $AD = 3$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

$$(1) B = \frac{\pi}{3}$$

$$(2) \frac{9\sqrt{3}}{8}$$

【分析】(1) ①由三角恒等变换可得; ②由正弦定理和正弦展开式可得;

(2) 由余弦定理和基本不等式求出 $ac \leq \frac{9}{2}$, 再求出面积最值即可.

【解析】(1) 选①, $2\cos B - 1 = \sin A \cos B + \cos A \sin B - 2\cos B \sin C = \sin(A + B) - 2\cos B \sin C = (1 - 2\cos B)\sin C$,

所以 $(1 + \sin C)(2\cos B - 1) = 0$.

因为 $1 + \sin C \neq 0$, 所以 $2\cos B - 1 = 0$, 即 $\cos B = \frac{1}{2}$, $0 < B < \pi$,

所以 $B = \frac{\pi}{3}$.

选②. 由 $(2a - c)\cos B = b\cos C$ 及正弦定理得 $\sin B \cos C = (2\sin A - \sin C)\cos B$,

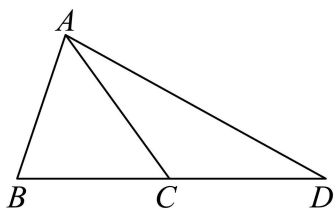
所以 $2\sin A \cos B = \sin B \cos C + \cos B \sin C = \sin(B + C) = \sin A$.

因为 $A, B \in (0, \pi)$, 所以 $\sin A > 0$,

所以 $\cos B = \frac{1}{2}$, $0 < B < \pi$,

所以 $B = \frac{\pi}{3}$.

(2) 如图,



点 D 满足 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$, 则 $BC = CD$, 故 $BD = 2a$, 又 $AD = 3$,

$$\text{故 } AD^2 = c^2 + (2a)^2 - 2c \cdot 2a \cdot \cos \frac{\pi}{3} = c^2 + 4a^2 - 2ac = 9,$$

即 $c^2 + 4a^2 - 9 = 2ac \geq 4ac - 9$, 即 $ac \leq \frac{9}{2}$, 当且仅当 $c = 2a = 3$ 时, 取等号,

故 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac\sin B \leq \frac{9\sqrt{3}}{8}$, 即 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{9\sqrt{3}}{8}$.

2. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\triangle ABC$ 的周长为 6, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{3a^2 - 2bc}{2}$.

(1) 求 a 的值;

(2) 求 A 的最大值.

(1) 2

(2) $\frac{\pi}{3}$

【分析】(1) 由题意结合数量积定义、余弦定理即可求解.

(2) 由题意结合余弦定理以及基本不等式相关推论即可求解.

【解析】(1) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = bc \cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2} = \frac{3a^2 - 2bc}{2}$,

即 $(b+c)^2 = 4a^2$.

因为 $\triangle ABC$ 的周长为 6, 所以 $(6-a)^2 = 4a^2$,

解得 $a = 2$.

(2) 由 (1) 可知 $b+c = 4$.

$\cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - 2bc - a^2}{2bc} = \frac{6}{bc} - 1 \geq \frac{6}{\left(\frac{b+c}{2}\right)^2} - 1 = \frac{1}{2}$, 当且仅当 $b=c$ 时, 等号成立.

故当 $b=c=2$ 时, A 取得最大值 $\frac{\pi}{3}$.

3. 已知在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 且有 $c \sin \frac{B+C}{2} = a \sin C$

(1) 求 A ;

(2) 若 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2$, 求 a 的最小值.

(1) $\frac{\pi}{3}$

(2) 2

【分析】(1) 由正弦定理, 三角恒等变换的应用化简已知等式可求 $\sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2}$, 根据角的范围即可求解 A 的值; (2) 根据向量的数量积公式可得 $bc = 4$, 利用余弦定理可得 $a^2 = b^2 + c^2 - 4$, 结合基本不等式即可得到 a 的最小值.

【解析】(1) 因为 $c \sin \frac{B+C}{2} = a \sin C$, 可得 $c \sin \frac{\pi-A}{2} = c \cos \frac{A}{2} = a \sin C$,

所以由正弦定理可得 $\sin C \cos \frac{A}{2} = \sin A \sin C$, 又 C 为三角形内角, 则 $\sin C \neq 0$,

所以 $\cos \frac{A}{2} = \sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$, 因为 $A \in (0, \pi)$, $\frac{A}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\cos \frac{A}{2} > 0$,

所以 $\sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2}$, 即 $\frac{A}{2} = \frac{\pi}{6}$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$

(2) 因为 $A = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = c \cdot b \cdot \cos A = 2$, 即 $bc = 4$,

由余弦定理可得: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - 4$,

由基本不等式可得 $a^2 = b^2 + c^2 - 4 \geq 2bc - 4 = 2 \times 4 - 4 = 4$, 即 $a \geq 2$,

当且仅当 $b=c=2$ 时, 即 $\triangle ABC$ 是等边三角形时等号成立.

故 a 的最小值是 2.

4. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\tan^2 \frac{B}{2} = \frac{2\sin C - 2\sin A + \sin B}{2\sin C + 2\sin A - \sin B}$.

(1) 求角 C ;

(2) 若 $c = 5$, 求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

$$(1) C = \frac{\pi}{3}$$

$$(2) \frac{25\sqrt{3}}{4}$$

【分析】(1) 利用同角三角函数的基本关系和降幂公式, 结合余弦定理化简已知等式, 由 $\cos C$ 的值求角 C ;

(2) 由余弦定理和基本不等式, 求出 ab 的最大值, 结合面积公式求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

【解析】(1) 因为 $\tan^2 \frac{B}{2} = \frac{2\sin C - 2\sin A + \sin B}{2\sin C + 2\sin A - \sin B}$,

$$\text{所以 } \frac{\sin^2 \frac{B}{2}}{\cos^2 \frac{B}{2}} = \frac{2c - 2a + b}{2c + 2a - b}, \text{ 所以 } \frac{1 - \cos B}{1 + \cos B} = \frac{2c - 2a + b}{2c + 2a - b},$$

$$\text{整理得 } \cos B = \frac{2a - b}{2c}, \text{ 即 } \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2a - b}{2c}, \text{ 化简得 } a^2 + b^2 - c^2 = ab,$$

$$\text{故 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{又因为 } C \in (0, \pi), \text{ 所以 } C = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可知 } \cos C = \frac{1}{2},$$

$$\text{由余弦定理 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C, \text{ 得 } 25 = a^2 + b^2 - ab.$$

$$\text{又因为 } a^2 + b^2 - ab \geq 2ab - ab = ab \text{ (当且仅当 } a = b = 5 \text{ 时取等号)},$$

$$\text{所以 } ab \leq 25.$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C \leq \frac{1}{2} \times 25 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4},$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的面积的最大值为 } \frac{25\sqrt{3}}{4}.$$

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 记 $\triangle ABC$ 的面积为 S , 已知 $\sqrt{3} \cdot \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2S$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $a = 2\sqrt{3}$, 求 $b^2 + c^2$ 的最大值.

$$(1) A = \frac{\pi}{3}$$

$$(2) 24$$

【分析】(1) 根据向量数量积公式及面积公式求出角 A 即可;

(2) 应用余弦定理结合基本不等式求出最值即得解.

【解析】(1) 因为 $\sqrt{3} \cdot \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2S$, 所以 $\sqrt{3}bccosA = bcsinA$,

$$\text{可得 } \tan A = \sqrt{3}, \text{ 因为 } 0 < A < \pi, \text{ 所以 } A = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) \text{ 由余弦定理可知 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\frac{\pi}{3}, \text{ 即 } 12 = b^2 + c^2 - bc,$$

$$\text{因为 } b^2 + c^2 \geq 2bc, \text{ 所以 } bc \leq \frac{b^2 + c^2}{2},$$

$$\text{所以 } bc = b^2 + c^2 - 12 \leq \frac{b^2 + c^2}{2}, \text{ 可得 } b^2 + c^2 \leq 24,$$

当且仅当 $b=c=2\sqrt{3}$ 时,等号成立,所以 b^2+c^2 的最大值为 24.

6. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a\sin C = \sqrt{3}c\cos A$.

(1) 求角 A ;

(2) 若 $a=2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

(1) $A = \frac{\pi}{3}$

(2) $\sqrt{3}$

【分析】(1) 由正弦定理, 将边化为角, 根据三角函数值, 即可求解;

(2) 根据 (1) 的结果, 写出余弦定理, 再结合基本不等式和三角形的面积公式, 即可求解.

【解析】(1) 由正弦定理, 得 $\sin A \sin C = \sqrt{3} \sin C \cos A$,

又 $C \in (0, \pi)$, $\sin C \neq 0$, 所以 $\sin A = \sqrt{3} \cos A$,

即 $\tan A = \sqrt{3}$.

又 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

(2) 由余弦定理, 得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$,

所以 $b^2 + c^2 - 4 = bc$.

由基本不等式知 $b^2 + c^2 \geq 2bc$,

于是 $bc = b^2 + c^2 - 4 \geq 2bc - 4 \Rightarrow bc \leq 4$.

当且仅当 $b=c=2$ 时等号成立.

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}bc \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = \sqrt{3}$,

当且仅当 $b=c=2$ 时, 面积 S 取得最大值 $\sqrt{3}$.

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 若 $2a + b\cos A - c = b\tan B\sin A$.

(1) 求 B ;

(2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 求 $\frac{\sin A + \sin B}{\sin C}$ 的取值范围.

$$(1) B = \frac{\pi}{3};$$

$$(2) \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, 2+\sqrt{3} \right).$$

【分析】(1) 利用边化角及三角恒等变换公式整理计算即可;

(2) 通过角的转化, 借助三角恒等变换公式, 得到 $\frac{\sin A + \sin B}{\sin C} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\tan \frac{C}{2}} + \frac{1}{2}$, 利用

C 的范围, 即可求出结果.

【解析】(1) 因为 $2a + b\cos A - c = b\tan B\sin A$, 整理得

$$\frac{2a-c}{b} = \tan B\sin A - \cos A = \frac{\sin B\sin A - \cos A\cos B}{\cos B} = -\frac{\cos(A+B)}{\cos B} = \frac{\cos C}{\cos B},$$

所以 $2a\cos B - c \cdot \cos B = b\cos C$,

由正弦定理得: $2\sin A\cos B = \sin B\cos C + \cos B\sin C = \sin(B+C) = \sin A$,

因为 $0 < A < \pi, 0 < B < \pi$, 所以 $\sin A \neq 0, \cos B = \frac{1}{2}$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$.

(2) 因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, $B = \frac{\pi}{3}$, 所以 $0 < C < \frac{\pi}{2}$, 且 $0 < \frac{2\pi}{3} - C < \frac{\pi}{2}$,

所以 $C \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right)$,

$$\begin{aligned} \text{解法 1: } \frac{\sin A + \sin B}{\sin C} &= \frac{\sin\left(C + \frac{\pi}{3}\right) + \sin \frac{\pi}{3}}{\sin C} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\cos C + 1}{\sin C} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\cos^2 \frac{C}{2}}{2\sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\tan \frac{C}{2}} + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

因为 $C \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right)$, 所以 $\frac{C}{2} \in \left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4} \right), \tan \frac{C}{2} \in (2-\sqrt{3}, 1)$,

所以 $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\tan \frac{C}{2}} + \frac{1}{2} \in \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, 2+\sqrt{3} \right)$,

即 $\frac{\sin A + \sin B}{\sin C}$ 的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, 2+\sqrt{3} \right)$.

$$\begin{aligned} \text{解法 2: } \frac{\sin A + \sin B}{\sin C} &= \frac{\sin\left(C + \frac{\pi}{3}\right) + \sin \frac{\pi}{3}}{\sin C} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\cos C + 1}{\sin C} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{(\cos C + 1)^2}{1 - \cos^2 C}} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{1 - \cos C}} - 1 + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

因为 $C \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right)$, 所以 $\cos C \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$, 得 $\frac{2}{1 - \cos C} \in \left(2, \frac{4}{2-\sqrt{3}} \right)$,

所以 $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{1-\cos C}} - 1 + \frac{1}{2} \in \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, 2+\sqrt{3}\right)$,
 即 $\frac{\sin A + \sin B}{\sin C}$ 的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, 2+\sqrt{3}\right)$.

2. 在 $\triangle ABC$ 中 a, b, c 分别为内角 A, B, C 的对边, $2a\sin A = (2b-c)\sin B + (2c-b)\sin C$.

(1) 求 A 的大小;

(2) 若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 求 $\cos B + \cos C$ 的取值范围.

$$(1) A = \frac{\pi}{3}$$

$$(2) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$$

【分析】(1) 应用正弦定理的边角互化结合余弦定理即可求解;

(2) 设 $B = \frac{\pi}{3} + \alpha, C = \frac{\pi}{3} - \alpha, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$, 代入结合两角和与差的余弦即可求解.

【解析】(1) 由 $2a\sin A = (2b-c)\sin B + (2c-b)\sin C$,

由正弦定理得 $2a^2 = (2b-c)b + (2c-b)c$,

即 $bc = b^2 + c^2 - a^2$, 则 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$,

因为 $A \in (0, \pi)$, 则 $A = \frac{\pi}{3}$

(2) 由 (1) 得 $B + C = \frac{2\pi}{3}$,

设 $B = \frac{\pi}{3} + \alpha, C = \frac{\pi}{3} - \alpha$, 因为 $B, C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

则 $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$,

则 $\cos B + \cos C = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$

$= 2\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha = \cos\alpha \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$,

则 $\cos B + \cos C$ 的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$.

3. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $2\cos(\pi + B) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2B\right) + \frac{3}{2} = 0$

(1) 求角 B ;

(2) 若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 求 $\cos A + \cos B + \cos C$ 的取值范围.

$$(1) B = \frac{\pi}{3};$$

$$(2) \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

【分析】(1) 由诱导公式、倍角余弦公式, 将条件化为 $2\cos^2 B - 2\cos B + \frac{1}{2} = 0$, 即可求 $\cos B$, 进而求角的大小;

(2) 由题设 $A = \frac{2\pi}{3} - C$ 且 $\frac{\pi}{6} < C < \frac{\pi}{2}$, 将 $\cos A + \cos B + \cos C$ 化为 $\sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$, 利用正弦型函数性质求范围即可.

【解析】(1) 由题设 $-2\cos B + \cos 2B + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 2\cos^2 B - 2\cos B + \frac{1}{2} = 0$,

所以 $4\cos^2 B - 4\cos B + 1 = 0 \Rightarrow (2\cos B - 1)^2 = 0 \Rightarrow \cos B = \frac{1}{2}$,

又 $B \in (0, \pi)$, 故 $B = \frac{\pi}{3}$.

(2) 由 (1) 知: $B = \frac{\pi}{3}$, 则 $A + C = \frac{2\pi}{3}$, 故 $A = \frac{2\pi}{3} - C$,

又 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 则 $\begin{cases} 0 < C < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \frac{2\pi}{3} - C < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < C < \frac{\pi}{2}$,

所以 $\cos A + \cos B + \cos C = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - C\right) + \cos C + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C + \frac{1}{2}\cos C + \frac{1}{2} = \sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$,

所以 $\frac{\pi}{3} < C + \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3}$, 故 $\sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right) \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$,

综上, $\cos A + \cos B + \cos C$ 的取值范围为 $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

4. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $b\sin B + c\sin C - a\sin A = 2b\sin B\sin C$ 且 $C \neq \frac{\pi}{2}$.

(1) 求证: $B = A + \frac{\pi}{2}$;

(2) 求 $\cos A + \sin B + \sin C$ 的取值范围.

(1) 证明见解析

(2) $(\sqrt{2}, 3)$

【分析】(1) 根据正弦定理和余弦定理可把题设中的边角关系化简为 $\cos A = \sin B$, 结合诱导公式及 $C \neq \frac{\pi}{2}$

可证 $B = A + \frac{\pi}{2}$.

(2) 根据 $B = A + \frac{\pi}{2}$ 及 $\cos A = \sin B$, 结合诱导公式和二倍角余弦公式将 $\cos A + \sin B + \sin C = 2\sin B + \sin C = 2\sin\left(A + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2A\right)$ 化为 $2\left(\cos A + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$, 先求出角 A 的范围, 然后利用余弦函数和二次函数的性质求解即可.

【解析】(1) 因为 $b\sin B + c\sin C - a\sin A = 2b\sin B\sin C$,

由正弦定理得, $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\sin B$, 由余弦定理得 $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos A = 2bc\sin B$,

所以 $\cos A = \sin B$, 又 $\cos A = \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$, 所以 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \sin B$.

又 $0 < A < \pi$, $0 < B < \pi$, 所以 $\frac{\pi}{2} - A = B$ 或 $\frac{\pi}{2} - A + B = \pi$,

所以 $A + B = \frac{\pi}{2}$ 或 $B = A + \frac{\pi}{2}$,

又 $C \neq \frac{\pi}{2}$, 所以 $A + B = \pi - C \neq \frac{\pi}{2}$, 所以 $B = A + \frac{\pi}{2}$, 得证.

(2) 由 (1) 知 $B = A + \frac{\pi}{2}$, 所以 $C = \pi - A - B = \frac{\pi}{2} - 2A$,

又 $\cos A = \sin B$, 所以 $\cos A + \sin B + \sin C = 2\sin B + \sin C = 2\sin\left(A + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2A\right)$

$= 2\cos A + \cos 2A = 2\cos^2 A + 2\cos A - 1 = 2\left(\cos A + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$,

$$\text{因为} \begin{cases} 0 < A < \pi \\ 0 < B = A + \frac{\pi}{2} < \pi, \text{ 所以 } 0 < A < \frac{\pi}{4}, \text{ 所以 } \frac{\sqrt{2}}{2} < \cos A < 1, \\ 0 < C = \frac{\pi}{2} - 2A < \pi \end{cases}$$

因为函数 $y = 2\left(\cos A + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$ 在 $\cos A \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ 单调递增,

$$\text{所以 } 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} = \sqrt{2} < 2\left(\cos A + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} < 2\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} = 3,$$

所以 $\cos A + \sin B + \sin C$ 的取值范围为 $(\sqrt{2}, 3)$.

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对边的边长分别为 a, b, c , 且 $a - 2c \cos B = c$.

(1) 若 $\cos B = \frac{1}{3}, c = 3$, 求 b 的值;

(2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 求 $\sin C$ 的取值范围.

$$(1) b = 2\sqrt{6}$$

$$(2) \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

【分析】(1) 由已知条件可得出 a 的值, 再利用余弦定理可求得 b 的值;

(2) 利用正弦定理以及两角和与差的正弦公式化简得出 $B = 2C$, 再利用 $\triangle ABC$ 为锐角三角形求出角 C 的取值范围, 即可求得 $\sin C$ 的取值范围.

【解析】(1) 因为 $\cos B = \frac{1}{3}, c = 3, a - 2c \cos B = c$, 所以, $a = 2c \cos B + c = 2 \times 3 \times \frac{1}{3} + 3 = 5$,

由余弦定理可得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 25 + 9 - 2 \times 5 \times 3 \times \frac{1}{3} = 24$, 故 $b = 2\sqrt{6}$.

(2) 因为 $a - 2c \cos B = c$, 由正弦定理可得 $\sin A - 2 \sin C \cos B = \sin C$,

$$\text{即 } \sin C = \sin(B + C) - 2 \cos B \sin C = \sin B \cos C + \cos B \sin C - 2 \cos B \sin C \\ = \sin B \cos C - \cos B \sin C = \sin(B - C),$$

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 则 $A, B, C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以, $B - C \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

因为正弦函数 $y = \sin x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上为增函数, 所以, $C = B - C$, 即 $B = 2C$,

$$\text{由} \begin{cases} 0 < C < \frac{\pi}{2} \\ 0 < B = 2C < \frac{\pi}{2} \\ 0 < A = \pi - 3C < \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{可得 } \frac{\pi}{6} < C < \frac{\pi}{4}, \text{ 故 } \frac{1}{2} < \sin C < \frac{\sqrt{2}}{2},$$

因此, $\sin C$ 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

6. 在 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $b^2 = c(a + c)$.

(1) 若 $B = \frac{\pi}{4}$, 求 $\frac{c}{a}$ 的值;

(2) 若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 求 $\sqrt{3} \sin B + 2 \cos^2 C$ 的取值范围.

$$(1) \sqrt{2} - 1$$

$$(2) (\sqrt{3} + 1, 3)$$

【分析】(1) 根据余弦定理即可求解,

(2) 根据余弦定理得边角关系, 即可利用正弦定理边角互化, 结合三角恒等变换可得 $B=2C$, 即可由三角函数的性质求解.

【解析】(1) 在 $\triangle ABC$ 中, $B = \frac{\pi}{4}$, 据余弦定理可得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = a^2 + c^2 - \sqrt{2}ac$ 又 $b^2 = c(a+c)$,

故 $a^2 - \sqrt{2}a = ac$, 由于 $a > 0$, 故 $a = (\sqrt{2}+1)c$, 得 $\frac{c}{a} = \sqrt{2} - 1$.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 据余弦定理可得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$,

又 $b^2 = c(a+c)$, 故 $a^2 - 2ac \cos B = ac$,

又 $a > 0$, 故 $a - 2c \cos B = c$

据正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 可得 $\sin A - 2 \sin C \cos B = \sin C$,

$\sin[\pi - (B+C)] - 2 \sin C \cos B = \sin C$,

$\sin B \cos C + \cos B \sin C - 2 \sin C \cos B = \sin C$,

$\sin(B-C) = \sin C$,

因为 $A, B, C \in (0, \pi)$, 所以 $B-C \in (-\pi, \pi)$,

则 $B-C = C$ 或 $B-C+C = \pi$,

即 $B = 2C$ 或 $B = \pi$ (舍)

所以 $\sqrt{3} \sin B + 2 \cos^2 C = \sqrt{3} \sin 2C + \cos 2C + 1 = 2 \sin\left(2C + \frac{\pi}{6}\right) + 1$,

$A = \pi - (B+C) = \pi - 3C$,

因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 所以
$$\begin{cases} 0 < \pi - 3C < \frac{\pi}{2} \\ 0 < 2C < \frac{\pi}{2} \\ 0 < C < \frac{\pi}{2} \end{cases}, \text{ 得 } \frac{\pi}{6} < C < \frac{\pi}{4},$$

$\frac{\pi}{2} < 2C + \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3}$, 故 $\sin\left(2C + \frac{\pi}{6}\right) \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$, $2 \sin\left(2C + \frac{\pi}{6}\right) + 1 \in (\sqrt{3} + 1, 3)$

故 $\sqrt{3} \sin B + 2 \cos^2 C \in (\sqrt{3} + 1, 3)$,

三 化边为角求最值范围

1. 已知 $\vec{a} = (\sqrt{3}\sin x - \cos x)$, $\vec{b} = (\cos x, \cos x)$, $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 图象的对称轴方程;

(2) 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $f(B) = \frac{1}{2}$ 且 $b = \sqrt{3}$. 求 $a + c$ 的取值范围.

$$(1) x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(2) (\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$$

【分析】(1) 由平面向量数量积的运算及三角恒等变换, 结合三角函数的性质求解即可;

(2) 由正弦定理可得 $a + c = 2\sqrt{3}\cos\left(A - \frac{\pi}{3}\right)$, 然后结合三角函数值域的求法求解即可.

【解析】(1) 已知 $\vec{a} = (\sqrt{3}\sin x - \cos x)$, $\vec{b} = (\cos x, \cos x)$,

$$\text{则 } f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b} = -\sqrt{3}\sin x \cos x - \cos^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2} = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2},$$

$$\text{由 } 2x - \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}), \text{ 得 } x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}),$$

即函数 $f(x)$ 图象的对称轴方程为 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$;

$$(2) \text{ 由 } f(B) = \frac{1}{2}, \text{ 得 } \sin\left(2B - \frac{\pi}{6}\right) = 1, \text{ 又 } 2B - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right), \text{ 即 } 2B - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{所以 } B = \frac{\pi}{3}, \text{ 又 } b = \sqrt{3},$$

$$\text{由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \text{ 得 } a = 2\sin A, c = 2\sin C,$$

$$\text{即 } a + c = 2\sin A + 2\sin C = 2\sin A + 2\sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right) = 2\sqrt{3}\cos\left(A - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{又 } 0 < A < \frac{2\pi}{3}, \text{ 所以 } -\frac{\pi}{3} < A - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3},$$

$$\text{所以 } 2\sqrt{3}\cos\left(A - \frac{\pi}{3}\right) \in (\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]. \text{ 即 } a + c \text{ 的取值范围为 } (\sqrt{3}, 2\sqrt{3}].$$

2. 已知锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C , 所对的边分别为 a, b, c , 且 $b\sin\frac{B+C}{2} = a\sin B$.

(1) 求角 A ;

(2) 若 $a = 2\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长的取值范围.

$$(1) \frac{\pi}{3}$$

$$(2) (2\sqrt{3} + 6, 6\sqrt{3}]$$

【分析】(1) 利用诱导公式和正弦定理即可;

(2) 根据正弦定理得 $b = 4\sin B, c = 4\sin\left(B + \frac{\pi}{3}\right)$, 从而化边为角, 结合三角恒等变换和三角函数值域即可得到其范围.

$$\text{【解析】(1) 由已知得, } b\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = a\sin B,$$

$$\text{则根据正弦定理得 } \sin B \cos \frac{A}{2} = \sin A \sin B (\sin B > 0),$$

$$\cos \frac{A}{2} = 2\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \Rightarrow \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2} (\cos \frac{A}{2} \neq 0),$$

$\because \triangle ABC$ 为锐角三角形, $\therefore A = \frac{\pi}{3}$.

(2) 由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 4$, 即 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin[\pi - (\frac{\pi}{3} + B)]} = 4$,

则 $b = 4\sin B, c = 4\sin(B + \frac{\pi}{3})$,

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2\sqrt{3} + 4\sin B + 4\sin(B + \frac{\pi}{3}) \\ &= 2\sqrt{3} + 4\sin B + 4(\sin B \cos \frac{\pi}{3} + \cos B \sin \frac{\pi}{3}) \\ &= 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} \sin(B + \frac{\pi}{6}), \end{aligned}$$

因为 $\begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \frac{2\pi}{3} - B < \frac{\pi}{2} \end{cases}$, 解得 $\frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2}$, 得 $B + \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$,

所以 $\sin(B + \frac{\pi}{6}) \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$, 得 $a + b + c \in (2\sqrt{3} + 6, 6\sqrt{3}]$.

3. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 $a, b, c, A = \frac{\pi}{3}$.

(1) 若 $bc = \frac{1}{2}a^2$, 求 $\cos(B - C)$ 的值;

(2) 若 $2b + c = 2\sqrt{3}(2\sin B + \sin C)$, 求 $c - b$ 的取值范围.

(1) $\frac{1}{4}$;

(2) $(-3, 3)$.

【分析】(1) 应用正弦定理化简已知, 再结合两角和差公式及诱导公式求取即可;

(2) 应用正弦定理结合两角和差公式及辅助角公式, 再应用角的范围化简求值域即得.

【解析】(1) 由 $bc = \frac{1}{2}a^2$ 及正弦定理得 $\sin B \sin C = \frac{1}{2} \sin^2 A = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{8}$,

$$\begin{aligned} \therefore \cos(B - C) &= \cos(B + C) + 2\sin B \sin C \\ &= -\cos A + 2\sin B \sin C \\ &= -\cos \frac{\pi}{3} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(2) 由 $\frac{2b + c}{2\sin B + \sin C} = 2\sqrt{3}$ 及正弦定理得 $\triangle ABC$ 的外接圆直径 $2R = 2\sqrt{3}$,

$$\begin{aligned} \therefore c - b &= 2R \sin C - 2R \sin B = 2R \left[\sin C - \sin \left(\frac{2\pi}{3} - C \right) \right] \\ &= 2R \left[\sin C - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos C + \frac{1}{2} \sin C \right) \right] \\ &= 2R \left(\frac{1}{2} \sin C - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos C \right) \\ &= 2\sqrt{3} \sin \left(C - \frac{\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

$\because 0 < C < \frac{2\pi}{3}, \therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin \left(C - \frac{\pi}{3} \right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore -3 < c - b < 3$, 即 $c - b$ 的取值范围是 $(-3, 3)$.

4. $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $2a - c = 2b \cos C$.

(1) 求 B ;

(2) 若 $b = 3$, 且 D 为 $\triangle ABC$ 外接圆劣弧 AC 上一点, 求 $AD + 2DC$ 的取值范围.

(1) $\frac{\pi}{3}$

(2) $(3, 6)$

【分析】(1) 根据题意, 由余弦定理化简得 $a^2 + c^2 - b^2 = ac$, 得到 $\cos B = \frac{1}{2}$, 即可求解;

(2) 设 $\angle ACD = \alpha$, 得到 $\angle CAD = \frac{\pi}{3} - \alpha$, 得到 $AD = 2\sqrt{3} \sin \alpha$, $CD = 2\sqrt{3} \sin(\frac{\pi}{3} - \alpha)$, 得出 $AD + 2DC = 6\cos \alpha$, 进而求得 $AD + 2DC$ 的取值范围.

【解析】(1) 解: 因为 $2a - c = 2b \cos C$, 由余弦定理得 $2a - c = 2b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$,

整理得 $a^2 + c^2 - b^2 = ac$, 可得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$,

又因为 $B \in (0, \pi)$, 可得 $B = \frac{\pi}{3}$.

(2) 解: 由圆内接四边形性质, 可得 $\angle D = \frac{2\pi}{3}$, 设 $\angle ACD = \alpha$, 则 $\angle CAD = \frac{\pi}{3} - \alpha$,

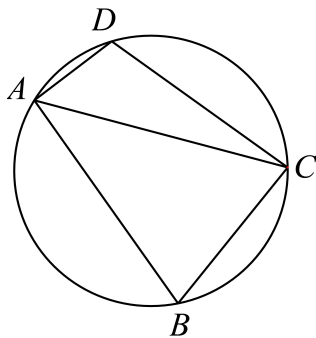
在 $\triangle ADC$ 中, 由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin \angle D} = \frac{AD}{\sin \alpha} = \frac{CD}{\sin(\frac{\pi}{3} - \alpha)} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$,

所以 $AD = 2\sqrt{3} \sin \alpha$, $CD = 2\sqrt{3} \sin(\frac{\pi}{3} - \alpha)$,

所以 $AD + 2DC = 2\sqrt{3} \sin \alpha + 4\sqrt{3} \sin(\frac{\pi}{3} - \alpha) = 6\cos \alpha$,

因为 $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$, 可得 $\cos \alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, 可得 $6\cos \alpha \in (3, 6)$,

所以 $AD + 2DC$ 的取值范围为 $(3, 6)$.



5. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足 $\cos 2A - \cos 2B = 2\cos(\frac{\pi}{6} - A)\cos(\frac{\pi}{6} + A)$.

(1) 求角 B 的值;

(2) 若 $b = \sqrt{3}$ 且 $b \leq a$, 求 $a - \frac{c}{2}$ 的取值范围.

(1) $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$

(2) $[\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$

【分析】(1) 利用二倍角公式和两角和与差的余弦公式化简, 可求出角 B 的值;

(2) 根据条件 $b \leq a$, 可求出角 B 的值以及角 A 的范围, 利用正弦定理可得到 $a - \frac{1}{2}c = 2\sin A - \sin C$, 将 $C = \frac{2\pi}{3} - A$ 代入, 用辅助角公式化简, 结合 A 的范围即可求出结果.

【解析】(1) 在 $\triangle ABC$ 中, $A + B + C = \pi$,

$$\cos 2A - \cos 2B = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - A\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} + A\right),$$

$$1 - 2\sin^2 A - (2\cos^2 B - 1) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A + \frac{1}{2}\sin A\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A - \frac{1}{2}\sin A\right),$$

$$2 - 2\sin^2 A - 2\cos^2 B = \frac{3}{2}\cos^2 A - \frac{1}{2}\sin^2 A,$$

$$2 - 2\sin^2 A - 2\cos^2 B = \frac{3}{2}(1 - \sin^2 A) - \frac{1}{2}\sin^2 A,$$

$$2\cos^2 B = \frac{1}{2}, \text{ 即 } \cos^2 B = \frac{1}{4}, \text{ 又 } B \in (0, \pi),$$

$$\text{所以 } \cos B = \pm \frac{1}{2}, \text{ 解得 } B = \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \frac{2\pi}{3}.$$

$$(2) \because b = \sqrt{3} \text{ 且 } b \leq a, \therefore B = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{由正弦定理得 } \frac{b}{\sin B} = 2, \text{ 所以 } a = 2\sin A, c = 2\sin C = 2\sin\left[\pi - \left(A + \frac{\pi}{3}\right)\right] = 2\sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right) = \sin A + \sqrt{3}\cos A.$$

$$\text{故 } a - \frac{1}{2}c = 2\sin A - \frac{1}{2}(\sin A + \sqrt{3}\cos A) = \frac{3}{2}\sin A - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos A = \sqrt{3}\sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\because b \leq a, \therefore \frac{\pi}{3} \leq A < \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6} \leq A - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2},$$

又易知函数 $y = \sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,

$$\text{于是当 } A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, \text{ 即 } A = \frac{\pi}{3} \text{ 时 } \sqrt{3}\sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) \text{ 的最小值为 } \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{当 } A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } A = \frac{2\pi}{3} \text{ 时 } \sqrt{3}\sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) \text{ 的最大值为 } \sqrt{3}.$$

$$\text{所以 } a - \frac{1}{2}c = \sqrt{3}\sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right), \text{ 即 } a - \frac{c}{2} \text{ 的取值范围 } \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right).$$

6. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 的对应边分别是 a, b, c , 且 $\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} = 2b\cos^2 \frac{A}{2}$.

(1) 求 $\cos B$ 的取值范围;

(2) 求 $\frac{2a+c}{b}$ 的取值范围.

$$(1) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$(2) (2\sqrt{2}+1, 2\sqrt{3}+2)$$

【分析】(1) 借助余弦定理、正弦定理与两角差的正弦公式可得 $A = 2B$, 结合 $\triangle ABC$ 为锐角三角形即可得 B 的取值范围, 即可得 $\cos B$ 的取值范围;

(2) 借助正弦定理将边的比例式转化为角的三角函数的比例式后, 结合三角恒等变换公式可得 $\frac{2a+c}{b} = 4\left(\cos B + \frac{1}{2}\right)^2 - 2$, 结合 $\cos B$ 的取值范围计算即可得.

$$\text{【解析】}(1) \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} = 2b\cos^2 \frac{A}{2} = 2b \times \frac{1 + \cos A}{2} = b + b\cos A,$$

$$\text{由 } \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}, \text{ 故 } a\cos B = b + b\cos A,$$

$$\text{由 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\text{故 } \sin A \cos B = \sin B + \sin B \cos A,$$

$$\text{则 } \sin A \cos B - \sin B \cos A = \sin(A-B) = \sin B,$$

$$\text{由 } \triangle ABC \text{ 为锐角三角形, 故 } A-B=B, \text{ 即 } A=2B,$$

$$\text{则有 } 0 < B < \frac{\pi}{2}, 0 < 2B < \frac{\pi}{2}, 0 < \pi - 2B - B < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{可得 } \frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{4}, \text{ 故 } \frac{\sqrt{2}}{2} < \cos B < \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 即 } \cos B \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$(2) \text{ 由 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, A=2B,$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \frac{2a+c}{b} &= \frac{2\sin A + \sin C}{\sin B} = \frac{2\sin 2B + \sin(\pi-3B)}{\sin B} = \frac{2\sin 2B + \sin 3B}{\sin B} \\ &= \frac{4\sin B \cos B + \sin B \cos 2B + \sin 2B \cos B}{\sin B} = 4\cos B + \cos 2B + \frac{2\sin B \cos^2 B}{\sin B} \\ &= 4\cos B + 2\cos^2 B - 1 + 2\cos^2 B = 4\cos^2 B + 4\cos B - 1 \\ &= 4\left(\cos B + \frac{1}{2}\right)^2 - 2, \end{aligned}$$

$$\text{由 (1) 知 } \cos B \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \text{ 故 } \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} < \left(\cos B + \frac{1}{2}\right)^2 < 1 + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{故 } 2\sqrt{2} + 1 < \frac{2a+c}{b} < 2\sqrt{3} + 2, \text{ 即 } \frac{2a+c}{b} \in (2\sqrt{2} + 1, 2\sqrt{3} + 2).$$

7. 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $\sqrt{3}$, 且 $\sin^2 B + \sin^2 C - \sin B \sin C = \sin^2 A$.

(1) 求 a ;

(2) 求 $\triangle ABC$ 的内切圆半径 r 的取值范围

(1) 3

(2) $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

【分析】(1) 由正弦定理化为边, 再由余弦定理求解即可;

(2) 根据等面积法可得出 r 的表达式, 利用正弦定理转化为函数, 再由三角函数求值域即可得出范围.

【解析】(1) 由正弦定理可得, $b^2 + c^2 - bc = a^2$, 即 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$,

$$\text{所以 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2},$$

$$\text{由 } 0 < A < \pi \text{ 可知, } A = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{所以 } \frac{a}{\sin A} = 2R = 2\sqrt{3}, \text{ 故 } a = 2\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.$$

(2) 因为 $\triangle ABC$ 的内切圆半径 r ,

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot r = \frac{1}{2}bc \sin A,$$

$$\text{即 } r = \frac{bc \sin A}{a+b+c} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{bc}{3+b+c},$$

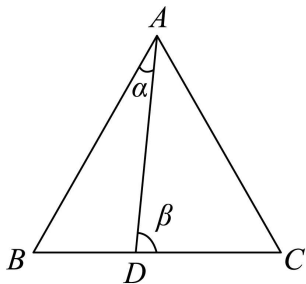
$$\text{又因为 } b^2 + c^2 - bc = a^2 = 9, \text{ 所以 } (b+c)^2 - 9 = 3bc,$$

$$\text{所以 } r = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{(b+c)^2 - 9}{3+b+c} = \frac{b+c-3}{2\sqrt{3}},$$

$$\begin{aligned}
& \text{由正弦定理 } b+c=2R(\sin B+\sin C)=2\sqrt{3}\left[\sin B+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)\right]=2\sqrt{3}\left(\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B\right) \\
& =2\sqrt{3}\left(\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right)=6\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right), \\
& \text{又 } B\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right), \text{ 则 } B+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right), \\
& \text{所以 } \sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},1\right], \text{ 故 } b+c-3=6\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)-3\in(0,3], \\
& \text{所以 } r=\frac{b+c-3}{2\sqrt{3}}\in\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right].
\end{aligned}$$

四 多三角形问题

1. 如图, $\triangle ABC$ 是等边三角形, D 是 BC 边上的动点 (含端点), 记 $\angle BAD = \alpha$, $\angle ADC = \beta$.



(1) 求 $2\cos\alpha - \cos\beta$ 的最大值;

(2) 若 $BD = 1$, $\cos\beta = \frac{1}{7}$, 求 $\triangle ABD$ 的面积.

(1) $\sqrt{3}$

(2) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【分析】(1) 由题意得到 $\beta = \alpha + \frac{\pi}{3}$, 利用两角和与差公式将所求化为 $\sqrt{3}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, 从而结合 α 的取值范围即可得解;

(2) 利用三角函数的平方关系与和差公式求得 $\sin\alpha$, 再利用正弦定理求得 AB , 从而利用三角形面积公式即可得解.

【解析】(1) 由 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 得 $\beta = \alpha + \frac{\pi}{3}$, $\therefore \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$,

$$\therefore 2\cos\alpha - \cos\beta = 2\cos\alpha - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = \sqrt{3}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{又 } \because \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right], \therefore \alpha + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right],$$

故当 $\alpha + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ 时, 即 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ 时, $2\cos\alpha - \cos\beta$ 取得最大值 $\sqrt{3}$.

$$(2) \text{ 由 } \cos\beta = \frac{1}{7}, \text{ 且 } \beta \in (0, \pi) \text{ 得 } \sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \frac{4\sqrt{3}}{7},$$

$$\text{故 } \sin\alpha = \sin\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\beta\cos\frac{\pi}{3} - \cos\beta\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{14},$$

在 $\triangle ABD$ 中, 由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin\angle ADB} = \frac{BD}{\sin\alpha}$, 又 $\sin\angle ADB = \sin(\pi - \beta) = \sin\beta$,

$$\text{故 } AB = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} BD = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{7}}{\frac{3\sqrt{3}}{14}} \times 1 = \frac{8}{3},$$

$$\text{故 } S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot BD \cdot \sin B = \frac{1}{2} \times \frac{8}{3} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/448130120021006057>