第二章　导数与微分

第三节 函数的微分

本节主要内容:

一. 微分的概念

二. 微分的几何意义

三. 微分的基本公式及运算法则

四. 微分的近似计算

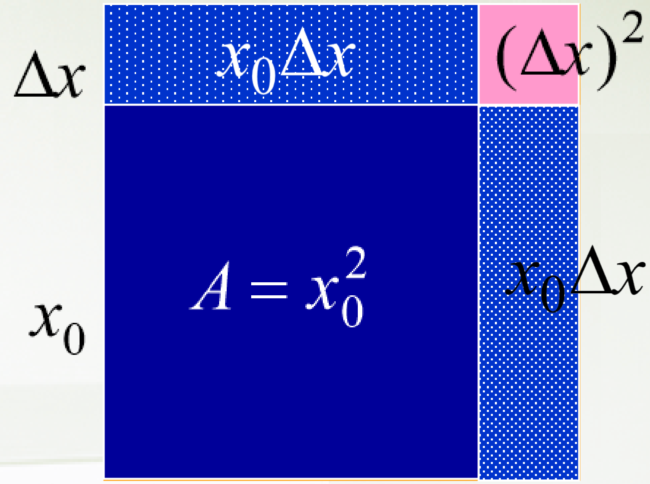
一. 微分的概念

引例：一块正方形金属片受热后其边长 x 由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$，考查此薄片的面积 A 的改变情况.

因为 $A=x^2$，所以金属片面积的改变量为

$$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-(x_0)^2$$

$$=\underbrace{2x_0\Delta x}_{(1)}+\underbrace{(\Delta x)^2}_{(2)}.$$



(1)：Δx的线性函数，且为ΔA的主要部分；

(2)：Δx的高阶无穷小，当$|\Delta x|$很小时可忽略.

$$\Delta A\approx 2x_0\Delta x$$

定义2. 3. 1 若函数$y=f(x)$的增量Δy可表示为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x) \qquad (\Delta x\to 0),$$

其中A与Δx无关,则称$y=f(x)$在x_0可微,且称$A\Delta x$为$f(x)$在x_0的微分，记作 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}$ 或 $\mathrm{d}f\big|_{x=x_0}$.

即

$$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=A\Delta x$$

$y=f(x)$在点x_0可微$\Leftrightarrow \Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，即 $\mathrm{d}y=A\Delta x$.

定理2. 3. 1 函数$y=f(x)$在x_0可微的充要条件是$y=f(x)$在x_0可导．当$y=f(x)$在x_0可微时，有

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x$$

通常把自变量的增量 Δx 称为**自变量的微分**，记做 dx，则函数 $y=f(x)$ 的微分可记做

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x,$$

从而有

$$dy=f'(x)dx \longrightarrow \frac{dy}{dx}=f'(x)$$

例1 求函数 $y = 3x^2$在x=1 处Δx分别为0.1和 0.01的增量与微分.

解: $\Delta x = 0.1:$

$$\Delta y = 3\times(1+0.1)^2 - 3\times 1^2 = 0.63,$$

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=1} = 6\times 0.1 = 0.6;$$

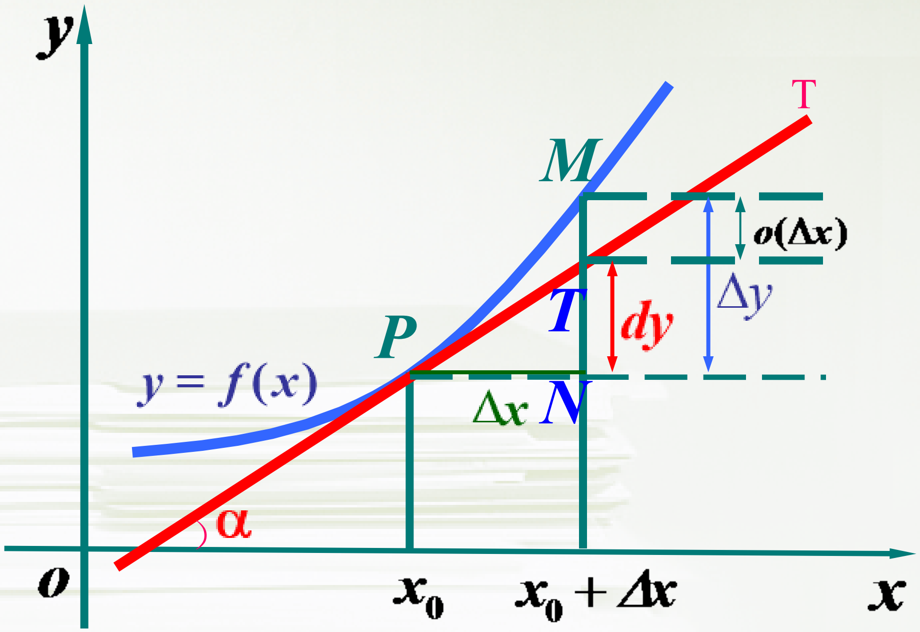
$\Delta x = 0.01:$

$$\Delta y = 3\times(1+0.01)^2 - 3\times 1^2 = 0.0603,$$

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=1} = 6\times 0.01 = 0.06.$$

二. 微分的几何意义

如图所示，$PN=\mathrm{d}x$， $NM=\Delta y$，$NT=PN\tan\alpha=f'(x)\mathrm{d}x$，所以 $\mathrm{d}y=NT$，即函数 $y=f(x)$ 的微分 $\mathrm{d}y$ 就是曲线 $y=f(x)$ 在点 P 处切线的纵坐标的增量，而 Δy 就是曲线 $y=f(x)$ 的纵坐标的增量 .



三. 微分的基本公式及运算法则

导数公式:

$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$

$(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$

$(\tan x)'=\sec^2 x$

$(\cot x)'=-\csc^2 x$

$(\sec x)'=\sec x\tan x$

$(\csc x)'=-\csc x\cot x$

$(a^{x})'=a^{x}\ln a$

$(e^{x})=e^{x}$

微分公式:

$d(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}dx$

$d(\sin x)=\cos x dx$

$d(\cos x)=-\sin x dx$

$d(\tan x)=\sec^2 x dx$

$d(\cot x)=-\csc^2 x dx$

$d(\sec x)=\sec x\tan x dx$

$d(\csc x)=-\csc x\cot x dx$

$d(a^{x})=a^{x}\ln a dx$

$d(e^{x})=e^{x}dx$

导数公式:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

微分公式:

$$d(\log_a x) = \frac{1}{x\ln a}dx$$

$$d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$$

$$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$d(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2}dx$$

微分的四则运算

求导法则

$$(u\pm v)'=u'\pm v'$$

$$(Cu)'=Cu'$$

$$(uv)'=u'v+uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\ (v\neq 0)$$

微分法则

$$d(u\pm v)=du\pm dv$$

$$d(Cu)=Cdu$$

$$d(u\cdot v)=vdu+udv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}dx(v\neq 0)$$

例2 求$y=x^2\arctan x$的微分.

解: $$dy=d\left(x^2\arctan x\right)$$

$$=\arctan x\,d\left(x^2\right)+x^2d\left(\arctan x\right)$$

$$=2x\arctan x\,dx+\frac{x^2}{1+x^2}dx$$