

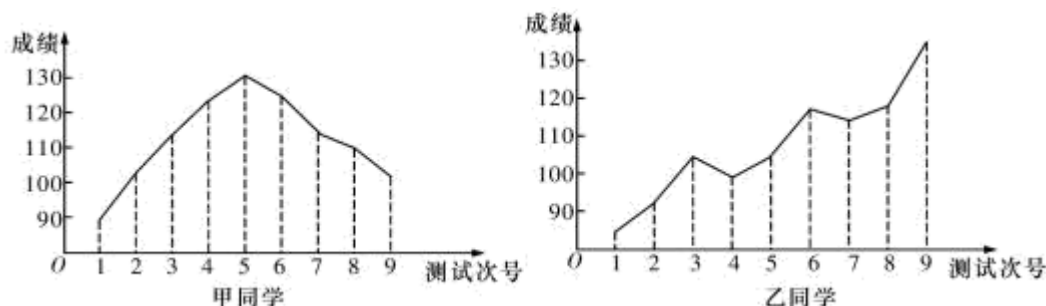
江苏省涟水一中 2023-2024 学年高三下学期第五次调研考试数学试题

考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 对某两名高三学生在连续 9 次数学测试中的成绩（单位：分）进行统计得到折线图，下面是关于这两位同学的数学成绩分析。



- ①甲同学的成绩折线图具有较好的对称性，故平均成绩为 130 分；
- ②根据甲同学成绩折线图提供的数据进行统计，估计该同学平均成绩在区间 $[110, 120]$ 内；
- ③乙同学的数学成绩与测试次号具有比较明显的线性相关性，且为正相关；
- ④乙同学连续九次测验成绩每一次均有明显进步。

其中正确的个数为（ ）

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

2. 已知 AB 是过抛物线 $y^2 = 4x$ 焦点 F 的弦， O 是原点，则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} =$ （ ）

- A. -2 B. -4 C. 3 D. -3

3. 已知集合 $M = \{x | x = 3^n, n \in \mathbb{N}^*\}$, $N = \{x | x = 2n, n \in \mathbb{N}^*\}$ ，将集合 $M \cup N$ 的所有元素从小到大一次排列构成一个新数列 $\{c_n\}$ ，则 $c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{35} =$ （ ）

- A. 1194 B. 1695 C. 311 D. 1095

4. 已知复数 $z = \frac{1+i}{1-i}$ ，则 $\bar{z}$ 的虚部是（ ）

- A. i B. -i C. -1 D. 1

5. 设 $a, b \in \mathbb{R}$, i 是虚数单位，则“复数 $z = a + bi$ 为纯虚数”是“ $ab = 0$ ”的（ ）

- A. 充要条件 B. 必要不充分条件

C. 既不充分也不必要条件

D. 充分不必要条件

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_n = \begin{cases} 2 & n \leq 5 \\ a_1 a_2 \dots a_{n-1} - 1, n \geq 6 \end{cases} (n \in \mathbb{N}^*)$ 若正整数 $k (k \geq 5)$ 使得 $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2 = a_1 a_2 \dots a_k$ 成立, 则 $k =$ ()

A. 16

B. 17

C. 18

D. 19

7. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的一条渐近线与圆 $x^2 + (y-2)^2 = 2$ 至多有一个交点, 则双曲线的离心率的取值范围是 ()

A. $[\sqrt{2}, +\infty)$

B. $[2, +\infty)$

C. $(1, \sqrt{2}]$

D. $(1, 2]$

8. 已知平面向量 $\vec{a} = (4, 2)$, $\vec{b} = (x, 3)$, $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则实数 x 的值等于 ()

A. 6

B. 1

C. $\frac{3}{2}$

D. $-\frac{3}{2}$

9. 若 $0 < a < b < 1$, 则 a^b , b^a , $\log_b a$, $\log_{\frac{1}{a}} b$ 的大小关系为 ()

A. $a^b > b^a > \log_b a > \log_{\frac{1}{a}} b$

B. $b^a > a^b > \log_{\frac{1}{a}} b > \log_b a$

C. $\log_b a > a^b > b^a > \log_{\frac{1}{a}} b$

D. $\log_b a > b^a > a^b > \log_{\frac{1}{a}} b$

10. 我国著名数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界瞩目的成就, 哥德巴赫猜想内容是“每个大于2的偶数可以表示为两个素数的和”(注: 如果一个大于1的整数除了1和自身外无其他正因数, 则称这个整数为素数), 在不超过15的素数中, 随机选取2个不同的素数 a 、 b , 则 $|a-b| < 3$ 的概率是 ()

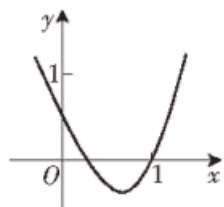
A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{4}{15}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{2}{5}$

11. 如图是二次函数 $f(x) = x^2 - bx + a$ 的部分图象, 则函数 $g(x) = a \ln x + f'(x)$ 的零点所在的区间是 ()



A. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

B. $(\frac{1}{2}, 1)$

C. (1, 2)

D. (2, 3)

12. 已知向量 $\vec{OA} = (-3, 4)$, $\vec{OA} + \vec{OB} = (-1, 5)$, 则向量 $\vec{OA}$ 在向量 $\vec{OB}$ 上的投影是 ()

A. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

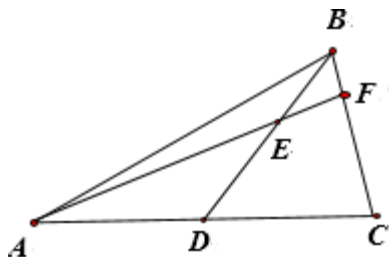
B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

C. $-\frac{2}{5}$

D. $\frac{2}{5}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=2$ ， $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$ ， $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{EB}$ ， AE 的延长线交 BC 边于点 F ，若 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{4}{5}$ ，则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____.



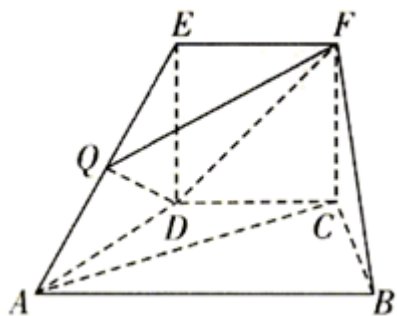
14. 设 α 为锐角，若 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ，则 $\sin 2\alpha$ 的值为_____.

15. 某校为了解学生学习的情况，采用分层抽样的方法从高一2400人、高二2000人、高三 n 人中，抽取90人进行问卷调查.已知高一被抽取的人数为36，那么高三被抽取的人数为_____.

16. 已知抛物线 $C: y = \frac{1}{4}x^2$ 的焦点为 F ，其准线与坐标轴交于点 E ，过 F 的直线 l 与抛物线 C 交于 A, B 两点，若 $3\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB}$ ，则直线 l 的斜率 $k =$ _____.

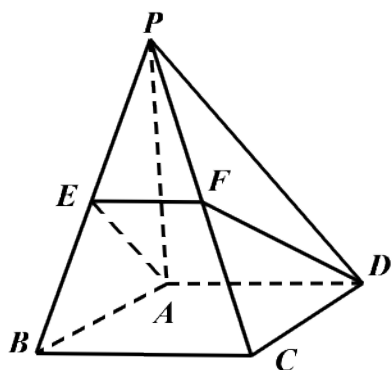
三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 在如图所示的几何体中，面 $CDEF$ 为正方形，平面 $ABCD$ 为等腰梯形， $AB \parallel CD$ ， $AB = 2BC$ ，点 Q 为 AE 的中点.



- (1) 求证： $AC \parallel$ 平面 DQF ；
(2) 若 $\angle ABC = 60^\circ$ ， $AC \perp FB$ ，求 BC 与平面 DQF 所成角的正弦值.

18. (12分) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，四边形 $ABCD$ 为正方形，点 F 为线段 PC 上的点，过 A, D, F 三点的平面与 PB 交于点 E .将① $AB = AP$ ，② $BE = PE$ ，③ $PB \perp FD$ 中的两个补充到已知条件中，解答下列问题：

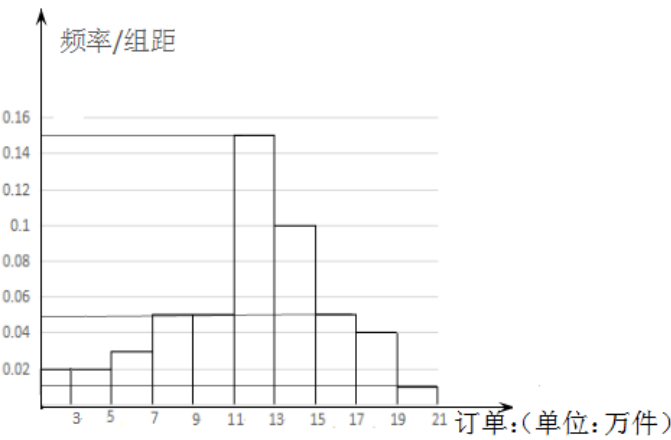


- (1) 求平面 $ADFE$ 将四棱锥分成两部分的体积比；
- (2) 求直线 PC 与平面 $ADFE$ 所成角的正弦值.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \sin(x + \frac{\pi}{2}) + \sin(x + \frac{\pi}{3})$, $x \in R$.

- (I) 求 $f(2019\pi)$ 的值；
- (II) 若 $f(\alpha) = 1$, 且 $0 < \alpha < \pi$, 求 $\cos \alpha$ 的值.

20. (12 分) 为了解网络外卖的发展情况, 某调查机构从全国各城市中抽取了 100 个相同等级地城市, 分别调查了甲乙两家网络外卖平台 (以下简称外卖甲、外卖乙) 在今年 3 月的订单情况, 得到外卖甲该月订单的频率分布直方图, 外卖乙该月订单的频数分布表, 如下图表所示.



订单: (单位: 万件)	[3,5)		[5,7)		[7,9)		[9,11)
频数	1		2		2		3
订单: (单位: 万件)	[11,13)		[13,15)		[15,17)		[17,19)
频数	40		20		20		10
							2

- (1) 现规定, 月订单不低于 13 万件的城市为“业绩突出城市”, 填写下面的列联表, 并根据列联表判断是否有 90% 的把握认为“是否为业绩突出城市”与“选择网络外卖平台”有关.

	业绩突出城市	业绩不突出城市	总计
外卖甲			
外卖乙			
总计			

（2）由频率分布直方图可以认为，外卖甲今年3月在全国各城市的订单数 Z （单位：万件）近似地服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ ，其中 μ 近似为样本平均数 $\bar{x}$ （同一组数据用该区间的中点值作代表）， σ 的值已求出，约为3.64，现把频率视为概率，解决下列问题：

- ①从全国各城市中随机抽取6个城市，记 X 为外卖甲在今年3月订单数位于区间(4.88,15.8)的城市个数，求 X 的数学期望；
- ②外卖甲决定在今年3月订单数低于7万件的城市开展“订外卖，抢红包”的营销活动来提升业绩，据统计，开展此活动后城市每月外卖订单数将提高到平均每月9万件的水平，现从全国各月订单数不超过7万件的城市中采用分层抽样的方法选出100个城市不开展营销活动，若每按一件外卖订单平均可获纯利润5元，但每件外卖平均需送出红包2元，则外卖甲在这100个城市中开展营销活动将比不开展营销活动每月多盈利多少万元？

附：①参考公式： $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n=a+b+c+d$ ．

参考数据：

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.001
k_0	2.702	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

②若 $Z \sim N(\mu,\sigma^2)$ ，则 $P(\mu-\sigma < Z \leq \mu+\sigma)=0.6826$ ， $P(\mu-2\sigma < Z \leq \mu+2\sigma)=0.9544$ ．

- 21.（12分）椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>1)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2 ，椭圆 E 上两动点 P,Q 使得四边形 PF_1QF_2 为平行四边形，且平行四边形 PF_1QF_2 的周长和最大面积分别为8和 $2\sqrt{3}$ ．
- （1）求椭圆 E 的标准方程；
- （2）设直线 PF_2 与椭圆 E 的另一交点为 M ，当点 F_1 在以线段 PM 为直径的圆上时，求直线 PF_2 的方程．

22.（10分）在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点， x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系；曲线 C_1

的普通方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ ，曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos \theta. \\ y = \sqrt{2} \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数) .

(I) 求曲线 C_1 和 C_2 的极坐标方程:

(II) 设射线 $\theta = \frac{\pi}{6}$ ($\rho > 0$) 分别与曲线 C_1 和 C_2 相交于 A, B 两点, 求 $|AB|$ 的值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、C

【解析】

利用图形, 判断折线图平均分以及线性相关性, 成绩的比较, 说明正误即可.

【详解】

①甲同学的成绩折线图具有较好的对称性, 最高 130 分, 平均成绩为低于 130 分, ①错误;

②根据甲同学成绩折线图提供的数据进行统计, 估计该同学平均成绩在区间 $[110, 120]$ 内, ②正确;

③乙同学的数学成绩与测试次号具有比较明显的线性相关性, 且为正相关, ③正确;

④乙同学在这连续九次测验中第四次、第七次成绩较上一次成绩有退步, 故④不正确.

故选: C.

【点睛】

本题考查折线图的应用, 线性相关以及平均分的求解, 考查转化思想以及计算能力, 属于基础题.

2、D

【解析】

设 $A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right)$, $B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right)$, 设 $AB: x = my + 1$, 联立方程得到 $y_1 y_2 = -4$, 计算

$OA \cdot OB = \frac{y_1^2 y_2^2}{16} + y_1 y_2$ 得到答案.

【详解】

设 $A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right)$, $B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right)$, 故 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{y_1^2 y_2^2}{16} + y_1 y_2$.

易知直线斜率不为 0, 设 $AB: x = my + 1$, 联立方程 $\begin{cases} x = my + 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$,

得到 $y^2 - 4my - 4 = 0$, 故 $y_1 y_2 = -4$, 故 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{y_1^2 y_2^2}{16} + y_1 y_2 = -3$.

故选: D.

【点睛】

本题考查了抛物线中的向量的数量积, 设直线为 $x = my + 1$ 可以简化运算, 是解题的关键.

3、D

【解析】

确定 $\{c_n\}$ 中前 35 项里两个数列中的项数, 数列 $\{2n\}$ 中第 35 项为 70, 这时可通过比较确定 $\{3^n\}$ 中有多少项可以插入这 35 项里面即可得, 然后可求和.

【详解】

$n = 35$ 时, $2 \times 35 = 70, 3^n < 70, n \leq 3$, 所以数列 $\{c_n\}$ 的前 35 项和中, $\{3^n\}$ 有三项 3, 9, 27, $\{2n\}$ 有 32 项, 所以 $c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{35} = 3 + 9 + 27 + 32 \times 2 + \frac{32 \times 31}{2} \times 2 = 1095$.

故选: D.

【点睛】

本题考查数列分组求和, 掌握等差数列和等比数列前 n 项和公式是解题基础. 解题关键是确定数列 $\{c_n\}$ 的前 35 项中有多少项是 $\{2n\}$ 中的, 又有多少项是 $\{3^n\}$ 中的.

4、C

【解析】

化简复数, 分子分母同时乘以 $1+i$, 进而求得复数 z , 再求出 $\bar{z}$, 由此得到虚部.

【详解】

$z = \frac{1+i}{1-i} = i$, $\bar{z} = -i$, 所以 $\bar{z}$ 的虚部为 -1 .

故选: C

【点睛】

本小题主要考查复数的乘法、除法运算, 考查共轭复数的虚部, 属于基础题.

5、D

【解析】

结合纯虚数的概念，可得 $a=0, b \neq 0$ ，再结合充分条件和必要条件的定义即可判定选项.

【详解】

若复数 $z = a + bi$ 为纯虚数，则 $a=0, b \neq 0$ ，所以 $ab=0$ ，若 $ab=0$ ，不妨设 $a=1, b=0$ ，此时复数 $z = a + bi = 1$ ，不是纯虚数，所以“复数 $z = a + bi$ 为纯虚数”是“ $ab=0$ ”的充分不必要条件.

故选：D

【点睛】

本题考查充分条件和必要条件，考查了纯虚数的概念，理解充分必要条件的逻辑关系是解题的关键，属于基础题.

6、B

【解析】

计算 $a_6^2 + a_7^2 + \dots + a_n^2 = a_{n+1} - a_6 + n - 5$ ，故 $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2 = a_{k+1} + k - 16 = a_{k+1} + 1$ ，解得答案.

【详解】

当 $n \geq 6$ 时， $a_{n+1} = a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n - 1 = (a_n + 1) a_n - 1$ ，即 $a_n^2 = a_{n+1} - a_n + 1$ ，且 $a_6 = 31$.

故 $a_6^2 + a_7^2 + \dots + a_n^2 = (a_7 - a_6) + (a_8 - a_7) + \dots + (a_{n+1} - a_n) + n - 5 = a_{n+1} - a_6 + n - 5$ ，

$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2 = a_{k+1} + k - 16 = a_{k+1} + 1$ ，故 $k = 17$.

故选：B.

【点睛】

本题考查了数列的相关计算，意在考查学生的计算能力和对于数列公式方法的综合应用.

7、C

【解析】

求得双曲线的渐近线方程，可得圆心 $(0, 2)$ 到渐近线的距离 $d \geq \sqrt{2}$ ，由点到直线的距离公式可得 a 的范围，再由离心率公式计算即可得到所求范围.

【详解】

双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的一条渐近线为 $y = \frac{1}{a}x$ ，即 $x - ay = 0$ ，

由题意知，直线 $x - ay = 0$ 与圆 $x^2 + (y - 2)^2 = 2$ 相切或相离，则 $d = \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} \geq \sqrt{2}$ ，

解得 $a \geq 1$ ，因此，双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{a}\right)^2} \in (1, \sqrt{2}]$.

故选：C.

【点睛】

本题考查双曲线的离心率的范围，注意运用圆心到渐近线的距离不小于半径，考查化简整理的运算能力，属于中档题.

8、A

【解析】

根据向量平行的坐标表示即可求解.

【详解】

$$\vec{a} = (4, 2), \vec{b} = (x, 3), \vec{a} \parallel \vec{b},$$

$$\therefore 4 \times 3 = 2x,$$

$$\text{即 } x = 6,$$

故选：A

【点睛】

本题主要考查了向量平行的坐标运算，属于容易题.

9、D

【解析】

因为 $0 < a < b < 1$ ，所以 $1 > b^a > a^a > a^b > 0$ ，

因为 $\log_b a > \log_b b > 1$ ， $0 < a < 1$ ，所以 $\frac{1}{a} > 1$ ， $\log_{\frac{1}{a}} b < 0$.

综上 $\log_b a > b^a > a^b > \log_{\frac{1}{a}} b$ ；故选 D.

10、B

【解析】

先列举出不超过15的素数，并列举出所有的基本事件以及事件“在不超过15的素数中，随机选取2个不同的素数 a 、 b ，满足 $|a-b| < 3$ ”所包含的基本事件，利用古典概型的概率公式可求得所求事件的概率.

【详解】

不超过15的素数有：2、3、5、7、11、13，

在不超过15的素数中，随机选取2个不同的素数，所有的基本事件有： $(2,3)$ 、 $(2,5)$ 、 $(2,7)$ 、 $f(x_1)-f(x_2)$ 、 $(2,13)$ 、 $(3,5)$ 、 $(3,7)$ 、 $(3,11)$ 、 $(3,13)$ 、 $(5,7)$ 、 $(5,11)$ 、 $(5,13)$ 、 $(7,11)$ 、 $(7,13)$ 、 $(11,13)$ ，共15种情况，

其中，事件“在不超过15的素数中，随机选取2个不同的素数 a 、 b ，且 $|a-b| < 3$ ”包含的基本事件有： $(2,3)$ 、

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/455214202222011220>