

湖北省襄阳市普通高中 2023 届下学期高三期末监测试卷数学试题

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设 O 为坐标原点， P 是以 F 为焦点的抛物线 $y^2 = 4x$ 上任意一点， M 是线段 PF 上的点，且 $PM = MF$ ，则直线 OM 的斜率的最大值为（ ）

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

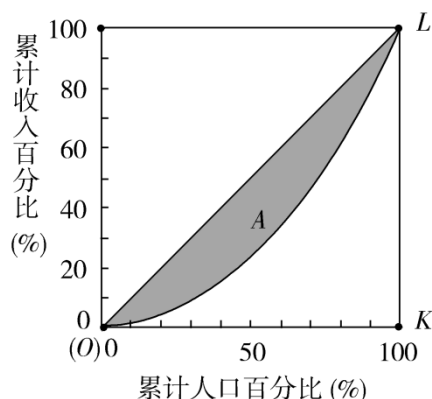
2. 已知 $a > 0$ ， $b > 0$ ， $a + b = 1$ ，若 $\alpha = a + \frac{1}{a}$ ， $\beta = b + \frac{1}{b}$ ，则 $\alpha + \beta$ 的最小值是（ ）

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

3. 若 $a = \log_4 15.9$ ， $b = 2^{1.01}$ ， $c = 0.4^{0.1}$ ，则（ ）

- A. $c > a > b$ B. $a > b > c$
C. $b > a > c$ D. $a > c > b$

4. 为了研究国民收入在国民之间的分配，避免贫富过分悬殊，美国统计学家劳伦茨提出了著名的劳伦茨曲线，如图所示. 劳伦茨曲线为直线 OL 时，表示收入完全平等. 劳伦茨曲线为折线 OKL 时，表示收入完全不平等. 记区域 A 为不平等区域， a 表示其面积， S 为 $\triangle OKL$ 的面积，将 $Gini = \frac{a}{S}$ 称为基尼系数.



对于下列说法：

- ① Gini 越小，则国民分配越公平；
- ② 设劳伦茨曲线对应的函数为 $y = f(x)$ ，则对 $\forall x \in (0,1)$ ，均有 $\frac{f(x)}{x} > 1$ ；

③若某国家某年的劳伦茨曲线近似为 $y = x^2 (x \in [0,1])$ ，则 $\text{Gini} = \frac{1}{4}$ ；

④若某国家某年的劳伦茨曲线近似为 $y = x^3 (x \in [0,1])$ ，则 $\text{Gini} = \frac{1}{2}$ 。

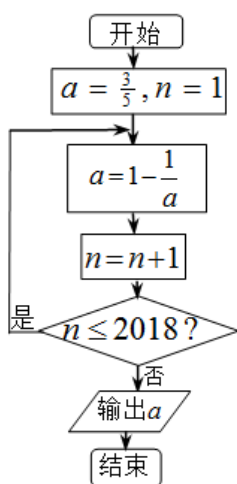
其中正确的是：

- A. ①④ B. ②③ C. ①③④ D. ①②④

5. 高三珠海一模中，经抽样分析，全市理科数学成绩 X 近似服从正态分布 $N(85, \sigma^2)$ ，且 $P(60 < X \leq 85) = 0.3$ 。从中随机抽取参加此次考试的学生 500 名，估计理科数学成绩不低于 110 分的学生人数约为 ()

- A. 40 B. 60 C. 80 D. 100

6. 阅读如图的程序框图，运行相应的程序，则输出的 a 的值为 ()

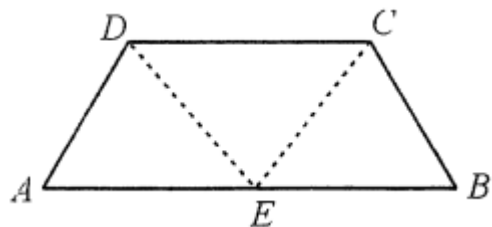


- A. $-\frac{2}{3}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{2}{5}$

7. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{3}$ ，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$ ，则 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

8. 如图，在等腰梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel DC$ ， $AB = 2DC = 2AD = 2$ ， $\angle DAB = 60^\circ$ ， E 为 AB 的中点，将 $\triangle ADE$ 与 $\triangle BEC$ 分别沿 ED 、 EC 向上折起，使 A 、 B 重合为点 F ，则三棱锥 $F-DCE$ 的外接球的体积是 ()



- A. $\frac{\sqrt{6}}{8}\pi$ B. $\frac{\sqrt{6}}{4}\pi$
C. $\frac{3}{2}\pi$ D. $\frac{2}{3}\pi$

9. 已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 内单调递减, $a = f(\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3})$, $b = f\left(\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$, $c = f\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\right)$, 则 a, b, c 满足 ()

c 满足 ()

- A. $a < b < c$ B. $c < a < b$ C. $b < c < a$ D. $c < b < a$

10. 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 AC 的中点, E 为 AB 上靠近点 B 的三等分点, 且 BD, CE 相交于点 P , 则 $\overrightarrow{AP} =$ ()

- A. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ B. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$
C. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ D. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

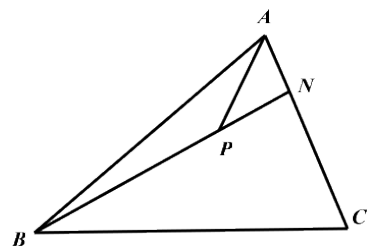
11. 将函数 $f(x) = \sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x + 1$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 给出下列关于 $g(x)$ 的结论:

- ① 它的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{9}$ 对称;
② 它的最小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$;
③ 它的图象关于点 $(\frac{11\pi}{18}, 1)$ 对称;
④ 它在 $[\frac{5\pi}{3}, \frac{19\pi}{9}]$ 上单调递增.

其中所有正确结论的编号是 ()

- A. ①② B. ②③ C. ①②④ D. ②③④

12. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, P 是 BN 上的一点, 若 $m\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, 则实数 m 的值为 ()



- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{9}$ C. 1 D. 2

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

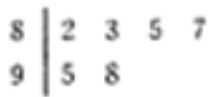
13. 给出下列四个命题, 其中正确命题的序号是_____. (写出所有正确命题的序号)

- ① 因为 $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \neq \sin x$, 所以 $\frac{\pi}{3}$ 不是函数 $y = \sin x$ 的周期;
② 对于定义在 R 上的函数 $f(x)$, 若 $f(-2) \neq f(2)$, 则函数 $f(x)$ 不是偶函数;
③ “ $M > N$ ”是“ $\log_2 M > \log_2 N$ ”成立的充分必要条件;

④ 若实数 a 满足 $a^2 \leq 4$, 则 $a \leq 2$.

14. 已知二项式 $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^n$ 的展开式中各项的二项式系数和为 512, 其展开式中第四项的系数_____.

15. 某高校组织学生辩论赛, 六位评委为选手 A 成绩打出分数的茎叶图如图所示, 若去掉一个最高分, 去掉一个最低分, 则所剩数据的平均数与中位数的差为_____.



16. 已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\left\{\frac{a_n^2}{n}\right\}$ 均为等差数列 ($n \in N^*$), 且 $a_1 = 2$, 则 $a_{10} =$ _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = |x-3| + |x-1|$.

(1) 求不等式 $f(x) \leq 6$ 的解集;

(2) 设 $f(x)$ 的最小值为 M , 正数 a, b 满足 $a^2 + 4b^2 = M$, 证明: $a + 2b \geq 4ab$.

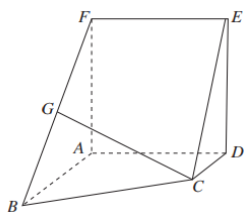
18. (12 分) 已知函数 $f(x) = x + a(1 - e^x)$, $a \in R$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $a \geq 1$ 时, 证明: $f(x) - a \ln a + a \leq 1$.

19. (12 分) 如图所示的几何体中, 面 $ADEF \perp$ 底面 $ABCD$, 四边形 $ADEF$ 为正方形, 四边形 $ABCD$ 为梯形,

$AB \parallel CD$, $\angle BAD = \frac{\pi}{2}$, $AB = AD = 2CD = 4$, G 为 BF 中点.



(1) 证明: $CG \parallel$ 面 $ADEF$;

(2) 求二面角 $A-BF-C$ 的余弦值.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x + ax}{e^x}$, $a \in R$

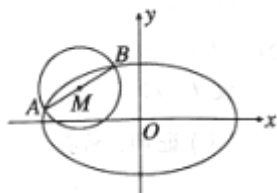
(1) 若函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ ($\ln 2 < x_0 < \ln 3$) 处取得极值 1, 证明: $2 - \frac{1}{\ln 2} < a < 3 - \frac{1}{\ln 3}$

(2) 若 $f(x) \geq x - \frac{1}{e^x}$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

21. (12分) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的半焦距为 c , 原点 O 到经过两点 $(c, 0)$, $(0, b)$ 的直线的距离为 $\frac{1}{2}c$.

(I) 求椭圆 E 的离心率;

(II) 如图, AB 是圆 $M: (x+2)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{2}$ 的一条直径, 若椭圆 E 经过 A , B 两点, 求椭圆 E 的方程.

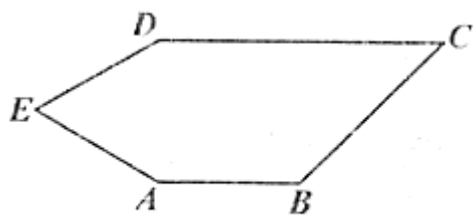


22. (10分) 如图(1) 五边形 $ABCDE$ 中, $ED = EA$, $AB \parallel CD$, $CD = 2AB$,

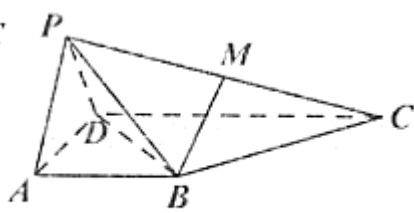
$\angle EDC = 150^\circ$, 将 $\triangle EAD$ 沿 AD 折到 $\triangle PAD$ 的位置, 得到四棱锥 $P-ABCD$, 如图(2), 点 M 为线段 PC 的中点, 且 $BM \perp$ 平面 PCD .

(1) 求证: 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 若直线 PC 与 AB 所成角的正切值为 $\frac{1}{2}$, 求直线 BM 与平面 PDB 所成角的正弦值.



图(1)



图(2)

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. A

【解析】

设 $P(\frac{y_0^2}{2p}, y_0)$, $M(x, y)$, 因为 $PM = MF$, 得到 $x = \frac{p}{4} + \frac{y_0^2}{4p}$, $y = \frac{y_0}{2}$, 利用直线的斜率公式, 得到

$$k_{OM} = \frac{\frac{y_0}{2}}{\frac{p}{4} + \frac{y_0^2}{4p}} = \frac{2}{\frac{p}{y_0} + \frac{y_0}{p}}, \text{ 结合基本不等式, 即可求解.}$$

【详解】

由题意, 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点坐标为 $F(\frac{p}{2}, 0)$,

设 $P(\frac{y_0^2}{2p}, y_0), M(x, y)$,

因为 $PM = MF$, 即 M 线段 PF 的中点, 所以 $x = \frac{1}{2}(\frac{p}{2} + \frac{y_0^2}{2p}) = \frac{p}{4} + \frac{y_0^2}{4p}, y = \frac{y_0}{2}$,

$$\text{所以直线 } OM \text{ 的斜率 } k_{OM} = \frac{\frac{y_0}{2}}{\frac{p}{4} + \frac{y_0^2}{4p}} = \frac{2}{\frac{p}{y_0} + \frac{y_0}{p}} \leq \frac{2}{2\sqrt{\frac{p}{y_0} \cdot \frac{y_0}{p}}} = 1,$$

当且仅当 $\frac{p}{y_0} = \frac{y_0}{p}$, 即 $y_0 = p$ 时等号成立,

所以直线 OM 的斜率的最大值为 1.

故选: A.

【点睛】

本题主要考查了抛物线的方程及其应用, 直线的斜率公式, 以及利用基本不等式求最值的应用, 着重考查了推理与运算能力, 属于中档试题.

2. C

【解析】

根据题意, 将 a, b 代入 $a + \beta$, 利用基本不等式求出最小值即可.

【详解】

$\because a > 0, b > 0, a + b = 1,$

$$\therefore a + \beta = a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} = 1 + \frac{1}{ab} \geq 1 + \frac{1}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = 5,$$

当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 时取“=”号.

答案: C

【点睛】

本题考查基本不等式的应用，“1”的应用，利用基本不等式求最值时，一定要正确理解和掌握“一正，二定，三相等”的内涵：一正是首先要判断参数是否为正；二定是其次要看和或积是否为定值（和定积最大，积定和最小）；三相等是最后一定要验证等号能否成立，属于基础题.

3. C

【解析】

利用指数函数和对数函数的单调性比较 a 、 b 、 c 三个数与1和2的大小关系，进而可得出 a 、 b 、 c 三个数的大小关系.

【详解】

对数函数 $y = \log_4 x$ 为 $(0, +\infty)$ 上的增函数，则 $1 = \log_4 4 < \log_4 15.9 < \log_4 16 = 2$ ，即 $1 < a < 2$ ；

指数函数 $y = 2^x$ 为 R 上的增函数，则 $b = 2^{1.01} > 2^1 = 2$ ；

指数函数 $y = 0.4^x$ 为 R 上的减函数，则 $c = 0.4^{0.1} < 0.4^0 = 1$.

综上所述， $b > a > c$.

故选：C.

【点睛】

本题考查指数幂与对数式的大小比较，一般利用指数函数和对数函数的单调性结合中间值法来比较，考查推理能力，属于基础题.

4. A

【解析】

对于①，根据基尼系数公式 $\text{Gini} = \frac{a}{S}$ ，可得基尼系数越小，不平等区域的面积 a 越小，国民分配越公平，所以①正确.

对于②，根据劳伦茨曲线为一条凹向横轴的曲线，由图得 $\forall x \in (0, 1)$ ，均有 $f(x) < x$ ，可得 $\frac{f(x)}{x} < 1$ ，所以②错误.

对于③，因为 $a = \int_0^1 (x - x^2) dx = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3)|_0^1 = \frac{1}{6}$ ，所以 $\text{Gini} = \frac{a}{S} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$ ，所以③错误.对于④，因为

$a = \int_0^1 (x - x^3) dx = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4)|_0^1 = \frac{1}{4}$ ，所以 $\text{Gini} = \frac{a}{S} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ ，所以④正确.故选 A.

5. D

【解析】

由正态分布的性质，根据题意，得到 $P(X \geq 110) = P(X \leq 60)$ ，求出概率，再由题中数据，即可求出结果.

【详解】

由题意, 成绩 X 近似服从正态分布 $N(85, \sigma^2)$,

则正态分布曲线的对称轴为 $x = 85$,

根据正态分布曲线的对称性, 求得 $P(X \geq 110) = P(X \leq 60) = 0.5 - 0.3 = 0.2$,

所以该市某校有 500 人中, 估计该校数学成绩不低于 110 分的人数为 $500 \times 0.2 = 100$ 人,

故选: D .

【点睛】

本题考查正态分布的图象和性质, 考查学生分析问题的能力, 难度容易.

6. C

【解析】

根据给定的程序框图, 计算前几次的运算规律, 得出运算的周期性, 确定跳出循环时的 n 的值, 进而求解 a 的值, 得到答案.

【详解】

由题意, $a = \frac{3}{5}, n = 1$,

第 1 次循环, $a = -\frac{2}{3}, n = 2$, 满足判断条件;

第 2 次循环, $a = \frac{5}{2}, n = 3$, 满足判断条件;

第 3 次循环, $a = \frac{3}{5}, n = 4$, 满足判断条件;

L L

可得 a 的值满足以 3 项为周期的计算规律,

所以当 $n = 2019$ 时, 跳出循环, 此时 n 和 $n = 3$ 时的值对应的 a 相同, 即 $a = \frac{5}{2}$.

故选: C .

【点睛】

本题主要考查了循环结构的程序框图的计算与输出问题, 其中解答中认真审题, 得出程序运行时的计算规律是解答的关键, 着重考查了推理与计算能力.

7. A

【解析】

根据向量的运算法则展开后利用数量积的性质即可.

【详解】

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - 3 + 1 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}.$$

故选：A.

【点睛】

本题主要考查数量积的运算，属于基础题.

8. A

【解析】

由题意等腰梯形中的三个三角形都是等边三角形，折叠成的三棱锥是正四面体，易求得其外接球半径，得球体积.

【详解】

由题意等腰梯形中 $DA = AE = EB = BC = CD$ ，又 $\angle DAB = 60^\circ$ ， $\therefore \triangle AED$ ， $\triangle BCE$ 是靠边三角形，从而可得 $DE = CE = CD$ ， $\therefore$ 折叠后三棱锥 $F - DEC$ 是棱长为 1 的正四面体，

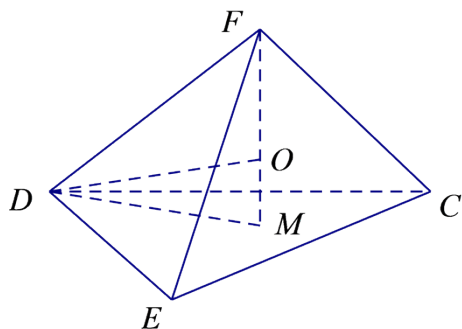
设 M 是 $\triangle DCE$ 的中心，则 $FM \perp$ 平面 DCE ， $DM = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ， $FM = \sqrt{FD^2 - DM^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，

$F - DCE$ 外接球球心 O 必在高 FM 上，设外接球半径为 R ，即 $OF = OD = R$ ，

$\therefore R^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3} - R\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$ ，解得 $R = \frac{\sqrt{6}}{4}$ ，

球体积为 $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \times \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3 = \frac{\sqrt{6}}{8} \pi$.

故选：A.



【点睛】

本题考查求球的体积，解题关键是由已知条件确定折叠成的三棱锥是正四面体.

9. D

【解析】

首先由函数为偶函数，可得函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内单调递增，再由 $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3} > \left| \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) \right| > \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$ ，即可判定大小

【详解】

因为偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 减, 所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上增,

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3} > 1, \quad \left| \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) \right| \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \therefore c < b < a.$$

故选: D

【点睛】

本题考查函数的奇偶性和单调性, 不同类型的数比较大小, 应找一个中间数, 通过它实现大小关系的传递, 属于中档题.

10. B

【解析】

$$\text{设 } \vec{AP} = x\vec{AB} + y\vec{AC}, \text{ 则 } \vec{AP} = x\vec{AB} + 2y\vec{AD}, \quad \vec{AP} = \frac{3x}{2}\vec{AE} + y\vec{AC},$$

由 B, P, D 三点共线, C, P, E 三点共线, 可知 $x + 2y = 1$, $\frac{3x}{2} + y = 1$, 解得 x, y 即可得出结果.

【详解】

$$\text{设 } \vec{AP} = x\vec{AB} + y\vec{AC}, \text{ 则 } \vec{AP} = x\vec{AB} + 2y\vec{AD}, \quad \vec{AP} = \frac{3x}{2}\vec{AE} + y\vec{AC},$$

因为 B, P, D 三点共线, C, P, E 三点共线,

$$\text{所以 } x + 2y = 1, \quad \frac{3x}{2} + y = 1, \quad \text{所以 } x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{4}.$$

故选: B.

【点睛】

本题考查了平面向量基本定理和向量共线定理的简单应用, 属于基础题.

11. B

【解析】

根据函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 图象的平移变换公式求出函数 $g(x)$ 的解析式, 再利用正弦函数的对称性、单调区间等相关性质求解即可.

【详解】

因为 $f(x) = \sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x + 1 = 2 \sin(3x - \frac{\pi}{3}) + 1$, 由 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 图象的平移变换公式知,

函数 $g(x) = 2 \sin[3(x + \frac{\pi}{6}) - \frac{\pi}{3}] + 1 = 2 \sin(3x + \frac{\pi}{6}) + 1$, 其最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{3}$, 故②正确;

令 $3x + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}$, 得 $x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{9}$ ($k \in \mathbb{Z}$), 所以 $x = \frac{5\pi}{9}$ 不是对称轴, 故①错误;

令 $3x + \frac{\pi}{6} = k\pi$, 得 $x = \frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{18}$ ($k \in \mathbb{Z}$), 取 $k = 2$, 得 $x = \frac{11\pi}{18}$, 故函数 $g(x)$ 的图象关于点 $(\frac{11\pi}{18}, 1)$ 对称, 故③正确;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/455322200131011340>