

湖南省永州市第四中学 2023-2024 学年高考全国统考预测密卷数学试卷

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 新闻出版业不断推进供给侧结构性改革，深入推动优化升级和融合发展，持续提高优质出口产品供给，实现了行业的良性发展.下面是 2012 年至 2016 年我国新闻出版业和数字出版业营收增长情况，则下列说法错误的是（ ）



- A. 2012 年至 2016 年我国新闻出版业和数字出版业营收均逐年增加
- B. 2016 年我国数字出版业营收超过 2012 年我国数字出版业营收的 2 倍
- C. 2016 年我国新闻出版业营收超过 2012 年我国新闻出版业营收的 1.5 倍
- D. 2016 年我国数字出版营收占新闻出版营收的比例未超过三分之一
2. 已知三棱锥 $A-BCD$ 的所有顶点都在球 O 的球面上， $AD \perp$ 平面 ABC ， $\angle BAC = 120^\circ$ ， $AD = 2$ ，若球 O 的表面积为 20π ，则三棱锥 $A-BCD$ 的体积的最大值为（ ）
- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$
3. 若函数 $f(x) = e^{|x|} - mx^2$ 有且只有 4 个不同的零点，则实数 m 的取值范围是（ ）
- A. $\left[\frac{e^2}{4}, +\infty\right)$ B. $\left(\frac{e^2}{4}, +\infty\right)$ C. $\left(-\infty, \frac{e^2}{4}\right)$ D. $\left(-\infty, \frac{e^2}{4}\right]$
4. 设 $\square, \square \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ ，则 " $\square = \square$ " 是 " $\square\square\square\square = \square\square\square\square$ " 的（ ）
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ ，若函数 $y = f(x+2)$ 为偶函数，且 $f(x)$ 对任意 $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$)

，都有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$ ，若 $f(a) \leq f(3a+1)$ ，则实数 a 的取值范围是（ ）

- A. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ B. $[-2, -1]$ C. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ D. $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$

6. 函数 $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图象为 C ，以下结论中正确的是（ ）

- ① 图象 C 关于直线 $x = \frac{5}{12}\pi$ 对称；
② 图象 C 关于点 $(-\frac{\pi}{3}, 0)$ 对称；
③ 由 $y = 2\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度可以得到图象 C 。

- A. ① B. ①② C. ②③ D. ①②③

7. i 为虚数单位，则 $\frac{2i^3}{1-i}$ 的虚部为（ ）

- A. $-i$ B. i C. -1 D. 1

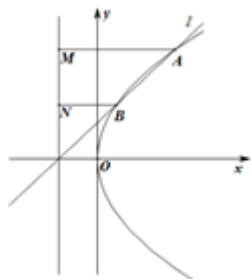
8. 设 a, b, c 为非零实数，且 $a > c, b > c$ ，则（ ）

- A. $a+b > c$ B. $ab > c^2$ C. $\frac{a+b}{2} > c$ D. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{2}{c}$

9. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线与直线 $6x - 3y + 1 = 0$ 垂直，则该双曲线的离心率为（ ）

- A. 2 B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ D. $2\sqrt{3}$

10. 如图，已知直线 $l: y = k(x+1) (k > 0)$ 与抛物线 $C: y^2 = 4x$ 相交于 A, B 两点，且 A, B 两点在抛物线准线上的投影分别是 M, N ，若 $|AM| = 2|BN|$ ，则 k 的值是（ ）



- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $2\sqrt{2}$

11. 设函数 $f(x), g(x)$ 的定义域都为 R ，且 $f(x)$ 是奇函数， $g(x)$ 是偶函数，则下列结论正确的是（ ）

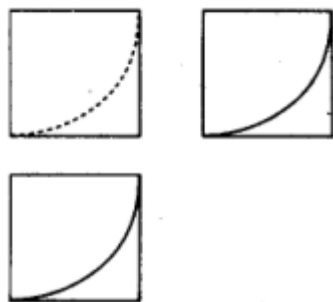
A. $f(x) \cdot g(x)$ 是偶函数

B. $|f(x)| \cdot g(x)$ 是奇函数

C. $f(x) \cdot |g(x)|$ 是奇函数

D. $|f(x) \cdot g(x)|$ 是奇函数

12. 一个几何体的三视图如图所示，正视图、侧视图和俯视图都是由一个边长为 a 的正方形及正方形内一段圆弧组成，则这个几何体的表面积是 ()



A. $\left(3 - \frac{\pi}{4}\right)a^2$

B. $\left(6 - \frac{\pi}{2}\right)a^2$

C. $\left(6 - \frac{\pi}{4}\right)a^2$

D. $\left(6 - \frac{3\pi}{4}\right)a^2$

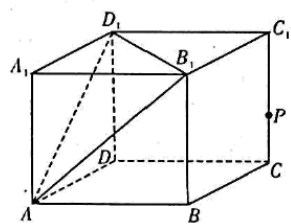
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中， S_n 为其前 n 项和，若 $a_3 = 1$ ，且 $S_5 = S_2 + 2$ ，则公比 q 的值为_____.

14. 已知圆柱的两个底面的圆周在同一个球的球面上，圆柱的高和球半径均为 2，则该圆柱的底面半径为_____.

15. 已知函数 $f(x) = A \cos^2(\omega x + \varphi) + 1$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的最大值为 3， $f(x)$ 的图象与 y 轴的交点坐标为 $(0, 2)$ ，其相邻两条对称轴间的距离为 2，则 $f(1) + f(2) + \dots + f(2015) =$

16. 若点 N 为点 M 在平面 α 上的正投影，则记 $N = f_\alpha(M)$. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，记平面 AB_1D_1 为 β ，平面 $ABCD$ 为 γ ，点 P 是线段 CC_1 上一动点， $Q_1 = f_\gamma[f_\beta(P)]$, $Q_2 = f_\beta[f_\gamma(P)]$. 给出下列四个结论：



① Q_2 为 $\triangle AB_1D_1$ 的重心；

② $Q_1Q_2 \perp BD$ ；

③ 当 $CP = \frac{4}{5}$ 时， $PQ_1 \perp$ 平面 β ；

④ 当三棱锥 $D_1 - APB_1$ 的体积最大时，三棱锥 $D_1 - APB_1$ 外接球的表面积为 2π 。

其中，所有正确结论的序号是_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x + be^{-x} - 2a \sin x (a, b \in R)$.

(1) 若 $a = 0, b = 1$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) $b = -1$ 时, 若 $f(x) > 0$ 对一切 $x \in (0, \pi)$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

18. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2t \\ y = \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$ (t 为参数), 以原点 O 为极点, x 轴的正半

轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 极坐标方程为 $\rho \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$. 若直线 l 交曲线 C 于 A, B 两点, 求线段 AB 的长.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 + m^2x (m \in R)$ 的导函数为 $f'(x)$.

(1) 若函数 $g(x) = f(x) - f'(x)$ 存在极值, 求 m 的取值范围;

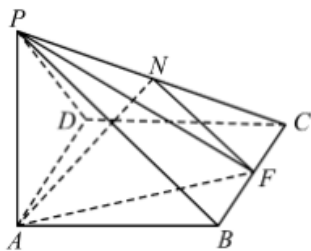
(2) 设函数 $h(x) = f'(e^x) + f'(\ln x)$ (其中 e 为自然对数的底数), 对任意 $m \in R$, 若关于 x 的不等式 $h(x) \geq m^2 + k^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 求正整数 k 的取值集合.

20. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $2\sqrt{3}\sin^2 \frac{A}{2} + \sin A - \sqrt{3} = 0$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 已知 $\triangle ABC$ 外接圆半径 $R = \sqrt{3}, AC = \sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

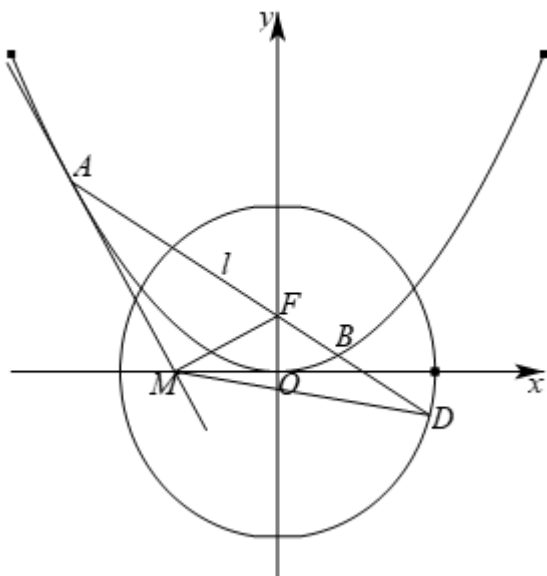
21. (12 分) 如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, $PA \perp AB, PA = 6, AB = 8, PD = 10$, N 为 PC 的中点, F 为棱 BC 上的一点.



(1) 证明: 面 $PAF \perp$ 面 $ABCD$;

(2) 当 F 为 BC 中点时, 求二面角 $A-NF-C$ 余弦值.

22. (10 分) 已知抛物线 $C_1: x^2 = 4y$ 的焦点 F 也是椭圆 $C_2: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点, C_1 与 C_2 的公共弦的长为 $2\sqrt{6}$.



(1) 求 C_2 的方程；

(2) 过点 F 的直线与 C_1 相交于 A 、 B 两点，与 C_2 相交于 C 、 D 两点，且 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 同向，设 C_1 在点 A 处的切线与 x 轴的交点为 M ，证明：直线 l 绕点 F 旋转时， $\triangle MFD$ 总是钝角三角形；

(3) P 为 C_2 上的动点， A_1 、 A_2 为 C_2 长轴的两个端点，过点 O 作 A_2P 的平行线交椭圆于点 R ，过点 O 作 A_1P 的平行线交椭圆于点 S ，请问 $\triangle ORS$ 的面积是否为定值，并说明理由.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

通过图表所给数据，逐个选项验证.

【详解】

根据图示数据可知选项 A 正确；对于选项 B： $1935.5 \times 2 = 3871 < 5720.9$ ，正确；对于选项 C：

$16635.3 \times 1.5 > 23595.8$ ，故 C 不正确；对于选项 D： $23595.8 \times \frac{1}{3} \approx 7865 > 5720.9$ ，正确.选 C.

【点睛】

本题主要考查柱状图是识别和数据分析，题目较为简单.

2、B

【解析】

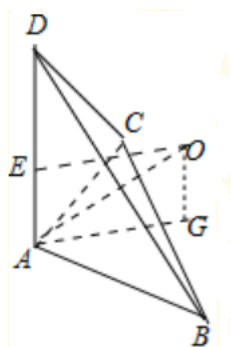
由题意画出图形，设球 O 的半径为 R ， $AB=x$ ， $AC=y$ ，由球 O 的表面积为 20π ，可得 $R^2=5$ ，再求出三角形 ABC 外接圆的半径，利用余弦定理及基本不等式求 xy 的最大值，代入棱锥体积公式得答案。

【详解】

设球 O 的半径为 R ， $AB=x$ ， $AC=y$ ，

由 $4\pi R^2 = 20\pi$ ，得 $R^2 = 5$ 。

如图：



设三角形 ABC 的外心为 G ，连接 OG ， GA ， OA ，

可得 $OG = \frac{1}{2}AD = 1$ ，则 $AG = \sqrt{R^2 - 1} = 2$ 。

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理可得： $\frac{BC}{\sin 120^\circ} = 2AG = 4$ ，

即 $BC = 2\sqrt{3}$ ，

由余弦定理可得， $BC^2 = 12 = x^2 + y^2 - 2xy \times (-\frac{1}{2}) = x^2 + y^2 + xy \dots 3xy$ ，

$\therefore xy \leq 4$ 。

则三棱锥 $A-BCD$ 的体积的最大值为 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times \sin 120^\circ \times 2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。

故选：B。

【点睛】

本题考查三棱锥的外接球、三棱锥的侧面积、体积，基本不等式等基础知识，考查空间想象能力、逻辑思维能力、运算求解能力，考查数学转化思想方法与数形结合的解题思想方法，是中档题。

3、B

【解析】

由 $f(x) = e^{|x|} - mx^2$ 是偶函数，则只需 $f(x) = e^{|x|} - mx^2$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上有且只有两个零点即可。

【详解】

解：显然 $f(x) = e^{|x|} - mx^2$ 是偶函数

所以只需 $x \in (0, +\infty)$ 时， $f(x) = e^{|x|} - mx^2 = e^x - mx^2$ 有且只有 2 个零点即可

$$\text{令 } e^x - mx^2 = 0, \text{ 则 } m = \frac{e^x}{x^2}$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{e^x}{x^2}, \quad g'(x) = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$$

$x \in (0, 2), g'(x) < 0, g(x)$ 递减, 且 $x \rightarrow 0^+, g(x) \rightarrow +\infty$

$x \in (2, +\infty), g'(x) > 0, g(x)$ 递增, 且 $x \rightarrow +\infty, g(x) \rightarrow +\infty$

$$g(x) \geq g(2) = \frac{e^2}{4}$$

$x \in (0, +\infty)$ 时， $f(x) = e^{|x|} - mx^2 = e^x - mx^2$ 有且只有 2 个零点，

$$\text{只需 } m > \frac{e^2}{4}$$

故选：B

【点睛】

考查函数性质的应用以及根据零点个数确定参数的取值范围，基础题.

4、A

【解析】

根据题意得到充分性，验证 $\square = 2, \square = \frac{l}{2}$ 得出不必要，得到答案.

【详解】

$\square, \square \in (0, l) \cup (l, +\infty)$ ，当 " $\square = \square$ " 时， $\log_{\square} \square = \log_{\square} \square$ ，充分性；

当 $\log_{\square} \square = \log_{\square} \square$ ，取 $\square = 2, \square = \frac{l}{2}$ ，验证成立，故不必要.

故选：□.

【点睛】

本题考查了充分不必要条件，意在考查学生的计算能力和推断能力.

5、A

【解析】

根据题意, 分析可得函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=2$ 对称且在 $[2, +\infty)$ 上为减函数, 则不等式 $f(a) \leq f(3a+1)$ 等价于 $|a-2| \geq |3a-1|$, 解得 a 的取值范围, 即可得答案.

【详解】

解: 因为函数 $y=f(x+2)$ 为偶函数,

所以函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=2$ 对称,

因为 $f(x)$ 对任意 $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$), 都有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上为减函数,

则 $f(a) \leq f(3a+1) \Leftrightarrow f(|a-2|) \leq f(|3a+1-2|) \Leftrightarrow |a-2| \geq |3a-1|$,

解得: $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{4}$.

即实数 a 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$.

故选: A.

【点睛】

本题考查函数的对称性与单调性的综合应用, 涉及不等式的解法, 属于综合题.

6、B

【解析】

根据三角函数的对称轴、对称中心和图象变换的知识, 判断出正确的结论.

【详解】

因为 $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$,

又 $f(\frac{5\pi}{12}) = 2\sin(2 \times \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{3}) = 2\sin \frac{3\pi}{6} = 2$, 所以①正确.

$f(-\frac{\pi}{3}) = 2\sin(2 \times \frac{-\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = 2\sin(-\pi) = 0$, 所以②正确.

将 $y = 2\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得 $y = 2\sin[2(x - \frac{\pi}{3})] = 2\sin(2x - \frac{2\pi}{3})$, 所以③错误.

所以①②正确, ③错误.

故选: B

【点睛】

本小题主要考查三角函数的对称轴、对称中心，考查三角函数图象变换，属于基础题.

7、C

【解析】

利用复数的运算法则计算即可.

【详解】

$$\frac{2i^3}{1-i} = \frac{-2i}{1-i} = \frac{-2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -i(1+i) = 1-i, \text{ 故虚部为 } -1.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查复数的运算以及复数的概念，注意复数 $a+bi$ ($a, b \in R$) 的虚部为 b ，不是 bi ，本题为基础题，也是易错题.

8、C

【解析】

取 $a = -1, b = -1, c = -2$ ，计算知 ABD 错误，根据不等式性质知 C 正确，得到答案.

【详解】

$$a > c, b > c, \text{ 故 } a+b > 2c, \frac{a+b}{2} > c, \text{ 故 } C \text{ 正确};$$

取 $a = -1, b = -1, c = -2$ ，计算知 ABD 错误;

故选：C.

【点睛】

本题考查了不等式性质，意在考查学生对于不等式性质的灵活运用.

9、B

【解析】

由题中垂直关系，可得渐近线的方程，结合 $c^2 = a^2 + b^2$ ，构造齐次关系即得解

【详解】

双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线与直线 $6x - 3y + 1 = 0$ 垂直.

$$\therefore \text{双曲线的渐近线方程为 } y = \pm \frac{1}{2}x.$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{1}{2}, \text{ 得 } 4b^2 = a^2, c^2 - a^2 = \frac{1}{4}a^2.$$

$$\text{则离心率 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

故选：B

【点睛】

本题考查了双曲线的渐近线和离心率，考查了学生综合分析，概念理解，数学运算的能力，属于中档题.

10、C

【解析】

直线 $y = k(x+1) (k > 0)$ 恒过定点 $P(-1, 0)$ ，由此推导出 $|OB| = \frac{1}{2}|AF|$ ，由此能求出点 B 的坐标，从而能求出 k 的值.

【详解】

设抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的准线为 $l: x = -1$ ，

直线 $y = k(x+1) (k > 0)$ 恒过定点 $P(-1, 0)$ ，

如图过 A 、 B 分别作 $AM \perp l$ 于 M ， $BN \perp l$ 于 N ，

由 $|AM| = 2|BN|$ ，则 $|FA| = 2|FB|$ ，

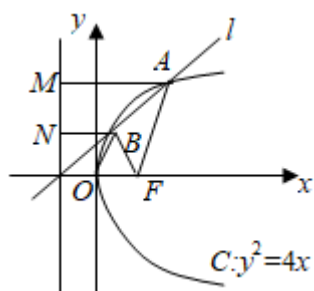
点 B 为 AP 的中点、连接 OB ，则 $|OB| = \frac{1}{2}|AF|$ ，

$\therefore |OB| = |BF|$ ，点 B 的横坐标为 $\frac{1}{2}$ ，

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $B\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$ ，把 $B\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$ 代入直线 $y = k(x+1) (k > 0)$ ，

解得 $k = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，

故选：C.



【点睛】

本题考查直线与圆锥曲线中参数的求法，考查抛物线的性质，是中档题，解题时要注意等价转化思想的合理运用，属于中档题.

11、C

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/456013233035010122>