

福建省泉港一中 2024 年高三第一次调研测试数学试卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F ，左顶点为 A ，点 P 椭圆上，且 $PF \perp AF$ ，若 $\tan \angle PAF = \frac{1}{2}$ ，则

椭圆的离心率 e 为 ()

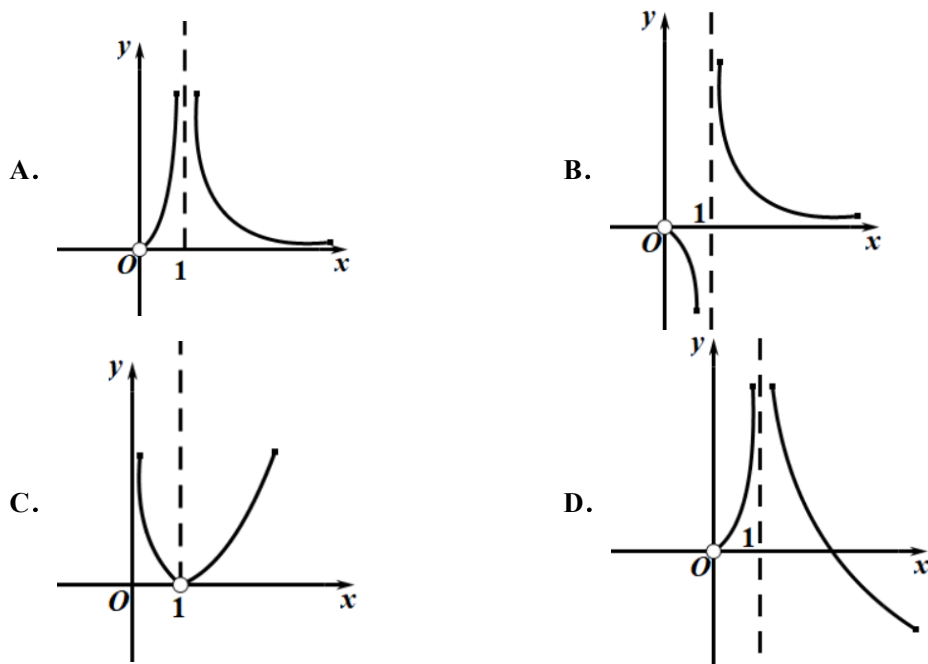
- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

2. 定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数 $f(x)$ 满足任意 $x \in \mathbf{R}$ ，有 $f(x+2) = f(x) - f(1)$ ，且当 $x \in [2, 3]$ 时，

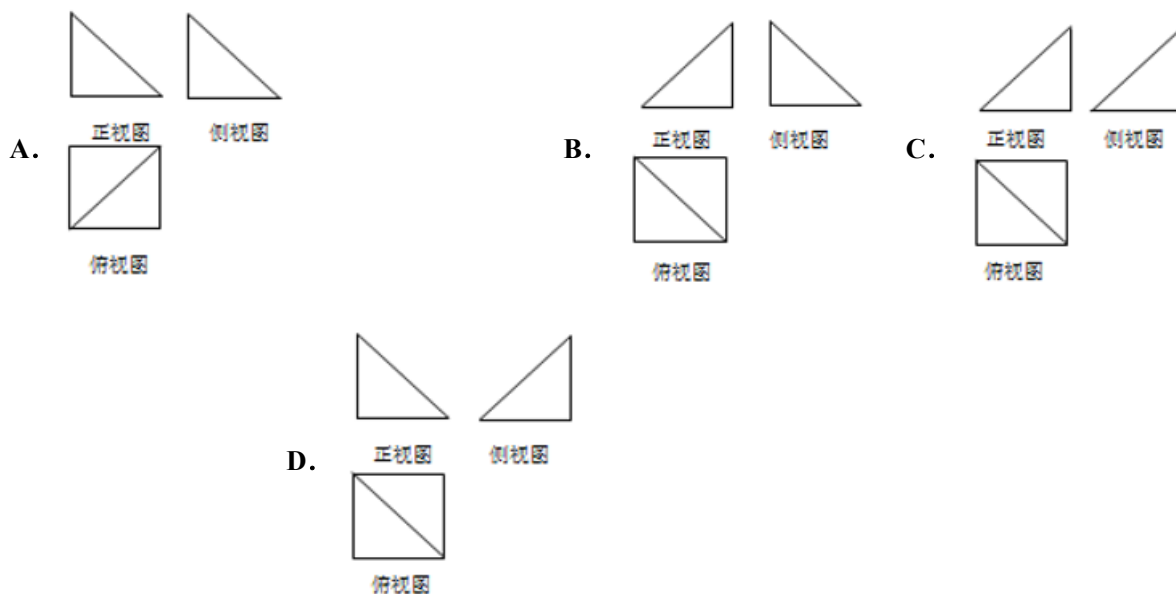
$f(x) = -2x^2 + 12x - 18$. 若函数 $y = f(x) - \log_a(x+1)$ 至少有三个零点，则 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ B. $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ C. $\left(0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ D. $\left(0, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

3. 已知函数 $f(x) = \frac{-2}{\ln(x+1) - x}$ ，则函数 $y = f(x-1)$ 的图象大致为 ()



4. 已知底面为正方形的四棱锥，其一条侧棱垂直于底面，那么该四棱锥的三视图可能是下列各图中的 ()



5. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin x + m \cos x$ ，其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称，为了得到函数 $g(x) = \sqrt{3+m^2} \cos 2x$ 的图象，只需将函数 $f(x)$ 的图象上的所有点（ ）

- A. 先向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，再把所得各点横坐标伸长为原来的 2 倍，纵坐标保持不变
- B. 先向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，再把所得各点横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ ，纵坐标保持不变
- C. 先向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，再把所得各点横坐标伸长为原来的 2 倍，纵坐标保持不变
- D. 先向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，再把所得各点横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ ，纵坐标保持不变

6. $\left(\frac{1}{x} + x + y^2\right)^8$ 的展开式中 $x^{-1}y^2$ 的系数是（ ）

- A. 160 B. 240 C. 280 D. 320

7. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 S_n 为前 n 项和， $2a_9 = a_{11} + 12$ ，则 S_{13} 的值是（ ）

- A. 156 B. 124 C. 136 D. 180

8. 我国著名数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界瞩目的成就，哥德巴赫猜想内容是“每个大于 2 的偶数可以表示为两个素数的和”（注：如果一个大于 1 的整数除了 1 和自身外无其他正因数，则称这个整数为素数），在不超过 15 的素数中，随机选取 2 个不同的素数 a 、 b ，则 $|a-b| < 3$ 的概率是（ ）

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{4}{15}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{5}$

9. 已知抛物线 $C: y^2 = 6x$ 的焦点为 F ，准线为 l ， A 是 l 上一点， B 是直线 AF 与抛物线 C 的一个交点，若

$\overrightarrow{FA} = 3\overrightarrow{FB}$ ，则 $|BF| =$ ()

- A. $\frac{7}{2}$ B. 3 C. $\frac{5}{2}$ D. 2

10. 已知非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，则 “ $|\vec{a} + 2\vec{b}| = |2\vec{a} - \vec{b}|$ ” 是 “ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ” 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件解:

11. 某大学计算机学院的薛教授在 2019 年人工智能方向招收了 6 名研究生.薛教授欲从人工智能领域的语音识别、人脸识别，数据分析、机器学习、服务器开发五个方向展开研究，且每个方向均有研究生学习，其中刘泽同学学习人脸识别，则这 6 名研究生不同的分配方向共有 ()

- A. 480 种 B. 360 种 C. 240 种 D. 120 种

12. 已知 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (m, m+3)$, $\vec{c} = (m-2, -1)$ ，若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，则 $\vec{b} \cdot \vec{c} =$ ()

- A. -7 B. -3 C. 3 D. 7

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $P(1,1)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 内一定点，经过 P 引一条弦，使此弦被 P 点平分，则此弦所在的直线方程为 _____.

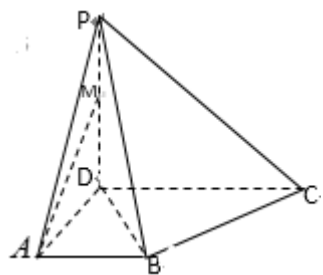
14. $(1-x)(1+x)^4$ 展开式中，含 x^2 项的系数为_____.

15. 二项式 $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2x}\right)^n$ 的展开式中所有项的二项式系数之和是 64，则展开式中的常数项为_____.

16. 函数 $y = \ln(3^x - 2^x)$ 的定义域为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PD \perp$ 底面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 是直角梯形， M 为侧棱 PD 上一点，已知 $BD = 2, BC = 2\sqrt{3}, CD = 4, DP = 4, DM = 3$.



(I) 证明:平面 $PBC \perp$ 平面 PBD ;

(II) 求二面角 $A-BM-C$ 的余弦值.

18. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中， $\sqrt{3}a \sin C = c \cos A$.

(I) 求角 A 的大小;

(II) 若 $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$, $b+c=2+2\sqrt{3}$, 求 a 的值.

19. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中, 已知点 $M\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + t \\ y = \sqrt{3}t \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\frac{3}{\rho^2} = 2 + \cos^2 \theta$.

(1) 求 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程;

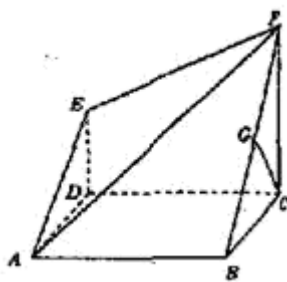
(2) 设曲线 C_1 与曲线 C_2 相交于 A, B 两点, 求 $\frac{1}{|MA|} + \frac{1}{|MB|}$ 的值.

20. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$, 过坐标原点 O 作两条互相垂直的射线与椭圆 C 分别交于 M, N 两点.

(1) 证明: 当 $a^2 + 9b^2$ 取得最小值时, 椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) 若椭圆 C 的焦距为 2, 是否存在定圆与直线 MN 总相切? 若存在, 求定圆的方程; 若不存在, 请说明理由.

21. (12 分) 在多面体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ABCD$ 是正方形, $CF \perp$ 平面 $ABCD$, $CF \parallel DE$, $AB = CF = 2DE = 2$, G 为 BF 的中点.



(1) 求证: $CG \perp AF$;

(2) 求平面 BCF 与平面 AEF 所成角的正弦值.

22. (10 分) 已知 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 均为正项数列, 其前 n 项和分别为 S_n, T_n , 且 $a_1 = \frac{1}{2}$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, 当 $n \geq 2$,

$$n \in N^* \text{ 时, } S_{n-1} = 1 - 2a_n, \quad b_n = \frac{2(T_n^2 - T_{n-1}^2)}{b_{n+1} + b_{n-1}} - 2T_{n-1}.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = \frac{(b_n + 2)a_n}{b_n^2 + b_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 P_n .

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

不妨设 P 在第一象限，故 $P\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$ ，根据 $\tan \angle PAF = \frac{1}{2}$ 得到 $1 - e - 2e^2 = 0$ ，解得答案.

【详解】

不妨设 P 在第一象限，故 $P\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$ ， $\tan \angle PAF = \frac{\frac{b^2}{a}}{a+c} = \frac{1}{2}$ ，即 $a^2 - ac - 2c^2 = 0$ ，

即 $1 - e - 2e^2 = 0$ ，解得 $e = \frac{1}{2}$ ， $e = -1$ （舍去）.

故选：C.

【点睛】

本题考查了椭圆的离心率，意在考查学生的计算能力.

2、B

【解析】

由题意可得 $f(x)$ 的周期为 2，当 $x \in [2, 3]$ 时， $f(x) = -2x^2 + 12x - 18$ ，令 $g(x) = \log_a(x+1)$ ，则 $f(x)$ 的图像和 $g(x)$ 的图像至少有 3 个交点，画出图像，数形结合，根据 $g(2) > f(2)$ ，求得 a 的取值范围.

【详解】

$f(x)$ 是定义域为 R 的偶函数，满足任意 $x \in R$ ，

$f(x+2) = f(x) - f(1)$ ，令 $x = -1$ ， $f(1) = f(-1) - f(1)$ ，

又 $f(-1) = f(1)$ ， $\therefore f(1) = 0$ ， $f(x+2) = f(x)$ ，

$\therefore f(x)$ 为周期为 2 的偶函数，

当 $x \in [2, 3]$ 时, $f(x) = -2x^2 + 12x - 18 = -2(x-3)^2$,

当 $x \in [0, 1], x+2 \in [2, 3], f(x) = f(x+2) = -2(x-1)^2$,

当 $x \in [-1, 0], -x \in [0, 1], f(x) = f(-x) = -2(x+1)^2$,

作出 $f(x), g(x)$ 图像, 如下图所示:

函数 $y = f(x) - \log_a(x+1)$ 至少有三个零点,

则 $f(x)$ 的图像和 $g(x)$ 的图像至少有 3 个交点,

Q $f(x) \leq 0$, 若 $a > 1$,

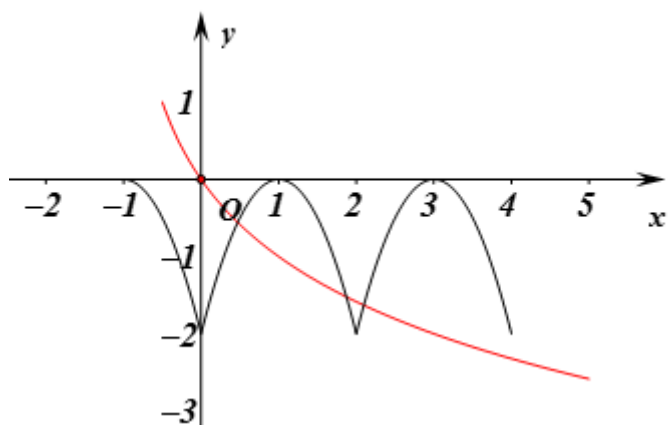
$f(x)$ 的图像和 $g(x)$ 的图像只有 1 个交点, 不合题意,

所以 $0 < a < 1$, $f(x)$ 的图像和 $g(x)$ 的图像至少有 3 个交点,

则有 $g(2) > f(2)$, 即 $\log_a(2+1) > f(2) = -2, \therefore \log_a 3 > -2$,

$\therefore \frac{1}{a^2} > 3, a^2 < \frac{1}{3}, \text{Q } 0 < a < 1, \therefore 0 < a < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选:B.



【点睛】

本题考查函数周期性及其应用, 解题过程中用到了数形结合方法, 这也是高考常考的热点问题, 属于中档题.

3、A

【解析】

用排除法, 通过函数图像的性质逐个选项进行判断, 找出不符合函数解析式的图像, 最后剩下即为此函数的图像.

【详解】

设 $g(x) = f(x-1) = \frac{-2}{\ln x - x + 1}$ ，由于 $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-2}{\ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} > 0$ ，排除 B 选项；由于 $g(e) = \frac{-2}{2-e}$, $g(e^2) = \frac{-2}{3-e^2}$ ，所

以 $g(e) > g(e^2)$ ，排除 C 选项；由于当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $g(x) > 0$ ，排除 D 选项.故 A 选项正确.

故选：A

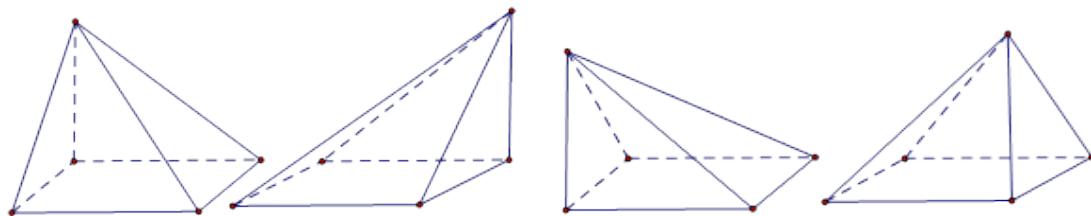
【点睛】

本题考查了函数图像的性质，属于中档题.

4、C

【解析】

试题分析：通过对以下四个四棱锥的三视图对照可知，只有选项 C 是符合要求的.



考点：三视图

5、D

【解析】

由函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称，得 $m = 1$ ，进而得 $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ，

再利用图像变换求解即可

【详解】

由函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称，得 $\left|f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| = \sqrt{3+m^2}$ ，即 $\left|\frac{3}{2} + \frac{m}{2}\right| = \sqrt{3+m^2}$ ，解得 $m = 1$ ，所以

$f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ， $g(x) = 2\cos 2x$ ，故只需将函数 $f(x)$ 的图象上的所有点“先

向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得 $y = 2\cos x$ ，再将横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ ，纵坐标保持不变，得 $g(x) = 2\cos 2x$ ”即可.

故选：D

【点睛】

本题考查三角函数的图象与性质，考查图像变换，考查运算求解能力，是中档题

6、C

【解析】

首先把 $\frac{1}{x} + x$ 看作为一个整体，进而利用二项展开式求得 y^2 的系数，再求 $\left(\frac{1}{x} + x\right)^7$ 的展开式中 x^{-1} 的系数，二者相乘即可求解。

【详解】

由二项展开式的通项公式可得 $\left(\frac{1}{x} + x + y^2\right)^8$ 的第 $r+1$ 项为 $T_{r+1} = C_8^r \left(\frac{1}{x} + x\right)^{8-r} y^{2r}$ ，令 $r=1$ ，则

$T_2 = C_8^1 \left(\frac{1}{x} + x\right)^7 y^2$ ，又 $\left(\frac{1}{x} + x\right)^7$ 的第 $r+1$ 项为 $T_{r+1} = C_7^r \left(\frac{1}{x}\right)^{7-r} x^r = C_7^r x^{2r-7}$ ，令 $r=3$ ，则 $C_7^3 = 35$ ，所以 $x^{-1}y^2$ 的系数是 $35 \times 8 = 280$ 。

故选：C

【点睛】

本题考查二项展开式指定项的系数，掌握二项展开式的通项是解题的关键，属于基础题。

7、A

【解析】

因为 $a_7 + a_{11} = 2a_9 = a_{11} + 12$ ，可得 $a_7 = 12$ ，根据等差数列前 n 项和，即可求得答案。

【详解】

$$\text{Q } a_7 + a_{11} = 2a_9 = a_{11} + 12,$$

$$\therefore a_7 = 12,$$

$$\therefore S_{13} = \frac{13(a_1 + a_{13})}{2} = 13a_7 = 13 \times 12 = 156.$$

故选：A.

【点睛】

本题主要考查了求等差数列前 n 项和，解题关键是掌握等差中项定义和等差数列前 n 项和公式，考查了分析能力和计算能力，属于基础题。

8、B

【解析】

先列举出不超过15的素数，并列举出所有的基本事件以及事件“在不超过15的素数中，随机选取2个不同的素数 a 、 b ，满足 $|a-b| < 3$ ”所包含的基本事件，利用古典概型的概率公式可求得所求事件的概率。

【详解】

不超过15的素数有：2、3、5、7、11、13，

在不超过15的素数中，随机选取2个不同的素数，所有的基本事件有： $(2,3)$ 、 $(2,5)$ 、 $(2,7)$ 、 $f(x_1)-f(x_2)$ 、 $(2,13)$ 、 $(3,5)$ 、 $(3,7)$ 、 $(3,11)$ 、 $(3,13)$ 、 $(5,7)$ 、 $(5,11)$ 、 $(5,13)$ 、 $(7,11)$ 、 $(7,13)$ 、 $(11,13)$ ，共15种情况，

其中，事件“在不超过15的素数中，随机选取2个不同的素数 a 、 b ，且 $|a-b|<3$ ”包含的基本事件有： $(2,3)$ 、 $(3,5)$ 、 $(5,7)$ 、 $(11,13)$ ，共4种情况，

因此，所求事件的概率为 $P=\frac{4}{15}$ 。

故选：B.

【点睛】

本题考查古典概型概率的计算，一般利用列举法列举出基本事件，考查计算能力，属于基础题.

9、D

【解析】

根据抛物线的定义求得 $|AF|=6$ ，由此求得 $|BF|$ 的长.

【详解】

过 B 作 $BC\perp l$ ，垂足为 C ，设 l 与 x 轴的交点为 D .根据抛物线的定义可知 $|BF|=|BC|$.由于 $\overline{FA}=3\overline{FB}$ ，所以 $|AB|=2|BC|$ ，所以 $\angle CAB=\frac{\pi}{6}$ ，所以 $|AF|=2|FD|=6$ ，所以 $|BF|=\frac{1}{3}|AF|=2$.

故选：D

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/456231225221011042>