

专题 01 集合、常用逻辑用语、不等式（选填压轴题）

一、集合的新定义题

1. (2022·上海市进才中学高三期中) 设 S 是整数集 $\mathbf{Z}$ 的非空子集, 如果任意的 $a, b \in S$, 有 $ab \in S$, 则称 S 关于数的乘法是封闭的. 若 T, V 是 $\mathbf{Z}$ 的两个没有公共元素的非空子集, $T \cup V = \mathbf{Z}$. 若任意的 $a, b, c \in T$, 有 $abc \in T$, 同时, 任意的 $x, y, z \in V$, 有 $xyz \in V$, 则下列结论恒成立的是()

- A. T, V 中至少有一个关于乘法是封闭的
- B. T, V 中至多有一个关于乘法是封闭的
- C. T, V 中有且只有一个关于乘法是封闭的
- D. T, V 中每一个关于乘法都是封闭的

【答案】A

若 T 为奇数集, V 为偶数集, 满足题意, 此时 T 与 V 关于乘法都是封闭的, 排除 B、C;

若 T 为负整数集, V 为非负整数集, 也满足题意, 此时只有 V 关于乘法是封闭的, 排除 D;

从而可得 T, V 中至少有一个关于乘法是封闭的, A 正确.

故选: A.

2. (2022·全国·高三专题练习) 非空集合 $A \subseteq \mathbf{R}$, 且满足如下性质: 性质一: 若 $a, b \in A$, 则 $a+b \in A$; 性质二: 若 $a \in A$, 则 $-a \in A$. 则称集合 A 为一个“群”. 以下叙述正确的个数为()

- ①若 A 为一个“群”, 则 A 必为无限集;
- ②若 A 为一个“群”, 且 $a, b \in A$, 则 $a-b \in A$;
- ③若 A, B 都是“群”, 则 $A \cap B$ 必定是“群”;
- ④若 A, B 都是“群”, 且 $A \cup B \neq A, A \cup B \neq B$, 则 $A \cup B$ 必定不是“群”;

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】C

【详解】

①: 设集合 $A = \{-1, 0, 1\}$, 显然 $-1+1=0, -1+0=-1, 1+0=1$, 符合性质一, 同时也符合性质二, 因此集合 $A = \{-1, 0, 1\}$ 是一个群, 但是它是有限集, 故本叙述不正确;

②: 根据群的性质, 由 $b \in A$ 可得: $-b \in A$, 因此可得 $a-b \in A$, 故本叙述是正确;

③: 设 $A \cap B = C$,

若 $c \in C$, 一定有 $c \in A, c \in B$, 因为 A, B 都是“群”,

所以 $-c \in A, -c \in B$, 因此 $-c \in C$, 若 $d \in C$, 所以 $d \in A, d \in B$,

$c+d \in C$, 故本叙述正确;

④: 因为 $A \cup B \neq A, A \cup B \neq B$, 一定存在 $a \in A$ 且 $a \notin B$, $b \notin A$ 且 $b \in B$,

因此 $a+b \notin A$ 且 $a+b \notin B$ ，所以 $a+b \notin (A \cup B)$ ，因此本叙述正确，

故选：C

3. (2022·全国·高三专题练习) “群”是代数学中一个重要的概念，它的定义是：设 G 为某种元素组成的一个非空集合，若在 G 内定义一个运算 “ $*$ ”，满足以下条件：

① $\forall a, b \in G$ ，有 $a*b \in G$

② 如 $\forall a, b, c \in G$ ，有 $(a*b)*c = a*(b*c)$ ；

③ 在 G 中有一个元素 e ，对 $\forall a \in G$ ，都有 $a*e = e*a = a$ ，称 e 为 G 的单位元；

④ $\forall a \in G$ ，在 G 中存在唯一确定的 b ，使 $a*b = b*a = e$ ，称 b 为 a 的逆元。此时称 $(G, *)$ 为一个群。

例如实数集 R 和实数集上的加法运算 “ $+$ ” 就构成一个群 $(R, +)$ ，其单位元是 0 ，每一个数的逆元是其相反数，那么下列说法中，错误的是 ()

A. $G = Q$ ，则 $(G, +)$ 为一个群

B. $G = R$ ，则 $(G, \times)$ 为一个群

C. $G = \{-1, 1\}$ ，则 $(G, \times)$ 为一个群

D. $G = \{\text{平面向量}\}$ ，则 $(G, +)$ 为一个群

【答案】B

A. $G = Q$ ，两个有理数的和是有理数，有理数加法运算满足结合律， 0 为 G 的单位元，逆元为它的相反数，满足群的定义，则 $(G, +)$ 为一个群，所以该选项正确；

B. $G = R$ ， 1 为 G 的单位元，但是 $a \times b = b \times a = 1$ ，当 $a = 0$ 时，不存在唯一确定的 b ，所以不满足④，则 $(G, \times)$ 不为一个群，所以该选项错误；

C. $G = \{-1, 1\}$ ，满足①②， 1 为 G 的单位元满足③， -1 是 -1 的逆元， 1 是 1 的逆元，满足④，则 $(G, \times)$ 为一个群，所以该选项正确；

D. $G = \{\text{平面向量}\}$ ，满足①②， $\vec{0}$ 为 G 的单位元，逆元为其相反向量，则 $(G, +)$ 为一个群，所以该选项正确。

故选：B

4. (2022·全国·高三专题练习) 设 U 是一个非空集合， F 是 U 的子集构成的集合，如果 F 同时满足：① $\emptyset \in F$ ，② 若 $A, B \in F$ ，则 $A \cap (\complement_U B) \in F$ 且 $A \cup B \in F$ ，那么称 F 是 U 的一个环，下列说法错误的是 ()

A. 若 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，则 $F = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, U\}$ 是 U 的一个环

B. 若 $U = \{a, b, c\}$ ，则存在 U 的一个环 F ， F 含有 8 个元素

C. 若 $U = Z$ ，则存在 U 的一个环 F ， F 含有 4 个元素且 $\{2\}, \{3, 5\} \in F$

D. 若 $U = \mathbf{R}$, 则存在 U 的一个环 F , F 含有 7 个元素且 $[0,3], [2,4] \in F$

【答案】D

对 A, 由题意可得 $F = \{\emptyset, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}, U\}$ 满足环的两个要求, 故 F 是 U 的一个环, 故 A 正确, 不符合题意;

对 B, 若 $U = \{a, b, c\}$, 则 U 的子集有 8 个, 则 U 的所有子集构成的集合 F 满足环的定义, 且有 8 个元素, 故 B 正确, 不符合题意;

对 C, 如 $F = \{\emptyset, \{2\}, \{3,5\}, \{2,3,5\}\}$ 满足环的要求, 且含有 4 个元素, $\{2\}, \{3,5\} \in F$, 故 C 正确, 不符合题意.

对 D, $\mathbf{Q} [0,3], [2,4] \in F$, $\therefore [0,3] \cap \complement_U [2,4] = [0,2) \in F$, $[2,4] \cap \complement_U [0,3] = (3,4] \in F$,
 $[0,3] \cup [2,4] = [0,4] \in F$,

$\therefore [0,3] \cap \complement_U [0,2) = [2,3] \in F$, $[0,4] \cap \complement_U [2,3] = [0,1) \cup (3,4] \in F$,

再加上 $\emptyset$, F 中至少 8 个元素, 故 D 错误, 符合题意.

故选: D.

5. (2022 · 全国 · 高三专题练习) 用 $C(A)$ 表示非空集合 A 中元素的个数, 定义

$$A * B = \begin{cases} C(A) - C(B), C(A) \geq C(B) \\ C(B) - C(A), C(A) < C(B) \end{cases}, \text{ 已知集合 } A = \{x | x^2 + x = 0\},$$

$B = \{x | (x^2 + ax)(x^2 + ax + 1) = 0\}$, 且 $A * B = 1$, 设实数 a 的所有可能取值构成集合 S , 则

$C(S) = ($

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】D

由 $A = \{x | x^2 + x = 0\}$, 可得 $A = \{-1, 0\}$

因为 $(x^2 + ax)(x^2 + ax + 1) = 0$ 等价于 $x^2 + ax = 0$ 或 $x^2 + ax + 1 = 0$,

且 $A = \{-1, 0\}$, $A * B = 1$, 所以集合 B 要么是单元素集, 要么是三元素集.

(1) 若 B 是单元素集, 则方程 $x^2 + ax = 0$ 有两个相等实数根, 方程 $x^2 + ax + 1 = 0$ 无实数根, 故 $a = 0$;

(2) 若 B 是三元素集, 则方程 $x^2 + ax = 0$ 有两个不相等实数根, 方程 $x^2 + ax + 1 = 0$ 有两个相等且异于方程 $x^2 + ax = 0$ 的实数根, 即 $a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = \pm 2$ 且 $a \neq 0$.

综上所述 $a = 0$ 或 $a = \pm 2$, 即 $S = \{0, -2, 2\}$, 故 $C(S) = 3$,

故选: D.

6. (2022 · 上海 · 高三专题练习) 对于集合 A , 定义了一种运算 “ $\oplus$ ”, 使得集合 A 中的元素间满足条件: 如果存在元素 $e \in A$, 使得对任意 $a \in A$, 都有 $e \oplus a = a \oplus e = a$, 则称元素 e 是集合 A 对运算 “ $\oplus$ ” 的单位元素. 例如: $A = \mathbf{R}$, 运算 “ $\oplus$ ” 为普通乘法; 存在 $1 \in \mathbf{R}$, 使

得对任意 $a \in R$ ，都有 $1 \times a = a \times 1 = a$ ，所以元素 1 是集合 R 对普通乘法的单位元素. 下面给出三个集合及相应的运算 “ $\oplus$ ”：

① $A = R$ ，运算 “ $\oplus$ ” 为普通减法；

② $A = \{A_{m \times n} \mid A_{m \times n} \text{ 表示 } m \times n \text{ 阶矩阵}, m \in N^*, n \in N^*\}$ ，运算 “ $\oplus$ ” 为矩阵加法；

③ $A = \{X \mid X \subseteq M\}$ （其中 M 是任意非空集合），运算 “ $\oplus$ ” 为求两个集合的交集.

其中对运算 “ $\oplus$ ” 有单位元素的集合序号为（ ）

- A. ①② B. ①③ C. ①②③ D. ②③

【答案】D

试题分析：①若 $A = R$ ，运算 “ $\oplus$ ” 为普通减法，而普通减法不满足交换律，故没有单位元素；

② $A = \{A_{m \times n} \mid A_{m \times n} \text{ 表示 } m \times n \text{ 阶矩阵}, m \in N^*, n \in N^*\}$ ，运算 “ $\oplus$ ” 为矩阵加法，其单位元素为全为 0 的矩阵；③ $A = \{X \mid X \subseteq M\}$ （其中 M 是任意非空集合），运算 “ $\oplus$ ” 为两个集合的交集，其单位元素为集合 M ，故答案为 D.

7. （2022·全国·高三专题练习）设集合 $S = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ ，在集合 S 上定义运算 “ $\oplus$ ”：

$A_i \oplus A_j = A_k$ ，其中， k 为 $i+j$ 被 4 除的余数， $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$. 则满足关系 $(x \oplus x) \oplus A_2 = A_0$

的 $x(x \in S)$ 的个数为（ ）

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】B

解：当 $x = A_0$ 时， $(x \oplus x) \oplus A_2 = (A_0 \oplus A_0) \oplus A_2 = A_0 \oplus A_2 = A_2$

当 $x = A_1$ 时， $(x \oplus x) \oplus A_2 = (A_1 \oplus A_1) \oplus A_2 = A_2 \oplus A_2 = A_0$

当 $x = A_2$ 时， $(x \oplus x) \oplus A_2 = (A_2 \oplus A_2) \oplus A_2 = A_0 \oplus A_2 = A_2$

当 $x = A_3$ 时， $(x \oplus x) \oplus A_2 = (A_3 \oplus A_3) \oplus A_2 = A_2 \oplus A_2 = A_0$

则满足关系式 $(x \oplus x) \oplus A_2 = A_0$ 的 $x(x \in S)$ 的个数为：2 个.

故选 B.

8. （多选）（2022·贵州·遵义市南白中学高一期末）群论是代数学的分支学科，在抽象代数中具有重要地位，且群论的研究方法也对抽象代数的其他分支有重要影响，例如一元五次及以上的方程没有根式解就可以用群论知识证明. 群的概念则是群论中最基本的概念之一，其定义如下：设 G 是一个非空集合，“ $\cdot$ ”是 G 上的一个代数运算，即对所有的 $a, b \in G$ ，有 $a \cdot b \in G$ ，如果 G 的运算还满足：① $\forall a, b, c \in G$ ，有 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ；② $\exists e \in G$ ，使得 $\forall a \in G$ ，有 $e \cdot a = a \cdot e = a$ ，③ $\forall a \in G$ ， $\exists b \in G$ ，使 $a \cdot b = b \cdot a = e$ ，则称 G 关于 “ $\cdot$ ” 构成一个群. 则下列说法正确的有（ ）

- A. $G = \{-1, 0, 1\}$ 关于数的乘法构成群

B. $G = \{x \mid x = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0\} \cup \{x \mid x = m, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$ 关于数的乘法构成群

C. 实数集关于数的加法构成群

D. $G = \{m + \sqrt{2}n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ 关于数的加法构成群

【答案】CD

对于 A: 若 $G = \{-1, 0, 1\}$, 对所有的 $a, b \in G$, 有 $a \cdot b \in \{1, 0, -1\} = G$,

满足乘法结合律, 即①成立, 满足②的 e 为 1,

但当 $a = 0$ 时, 不存在 $b \in G$, 使得 $ab = ba = e = 1$, 即③不成立,

即选项 A 错误;

对于 B: 因为 $a = \frac{1}{2} \in G$, 且 $b = 3 \in G$, 但 $a \cdot b = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2} \notin G$,

所以选项 B 错误;

对于 C: 若 $G = \mathbb{R}$, 对所有的 $a, b \in \mathbb{R}$, 有 $a + b \in \mathbb{R}$,

满足加法结合律, 即①成立, 满足②的 e 为 0,

$\forall a \in \mathbb{R}, \exists b = -a \in \mathbb{R}$, 使 $a + b = b + a = 0$, 即③成立;

即选项 C 正确;

对于 D: 若 $G = \{m + \sqrt{2}n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$, 所有的 $a = m_1 + \sqrt{2}n_1, b = m_2 + \sqrt{2}n_2 \in G$,

有 $a + b = (m_1 + m_2) + \sqrt{2}(n_1 + n_2) \in G, \forall a, b, c \in G, (a + b) + c = a + (b + c)$ 成立,

即①成立; 当 $a = b = 0$ 时, $a + \sqrt{2}b = 0$, 满足的 $e = 0$, 即②成立;

$\forall a = m + \sqrt{2}n \in G, \exists b = -m - \sqrt{2}n \in G$, 使 $a + b = b + a = 0$, 即③成立;

即选项 D 正确.

故选: CD.

9. (多选) (2022 · 黑龙江绥化 · 高一期末) 由无理数引发的数学危机一直延续到 19 世纪 · 直到 1872 年, 德国数学家戴德金从连续性的要求出发, 用有理数的“分割”来定义无理数 (史称戴德金分割), 并把实数理论建立在严格的科学基础上, 才结束了无理数被认为“无理”的时代, 也结束了持续 2000 多年的数学史上的第一次大危机 · 所谓戴德金分割, 是指将有理数集 $\mathbb{Q}$ 划分为两个非空的子集 M 与 N , 且满足 $M \cup N = \mathbb{Q}, M \cap N = \emptyset$, M 中的每一个元素都小于 N 中的每一个元素, 则称 (M, N) 为戴德金分割 · 试判断, 对于任一戴德金分割 (M, N) , 下列选项中, 可能成立的是 ()

A. M 没有最大元素, N 有一个最小元素

B. M 没有最大元素, N 也没有最小元素

C. M 有一个最大元素, N 有一个最小元素

D. M 有一个最大元素, N 没有最小元素

【答案】ABD

令 $M = \{x | x < 10, x \in Q\}$, $N = \{x | x \geq 10, x \in Q\}$, 显然集合 M 中没有最大元素, 集合 N 中有一个最小元素, 即选项 A 可能;

令 $M = \{x | x < \sqrt{2}, x \in Q\}$, $N = \{x | x \geq \sqrt{2}, x \in Q\}$, 显然集合 M 中没有最大元素, 集合 N 中也没有最小元素, 即选项 B 可能;

假设答案 C 可能, 即集合 M 、 N 中存在两个相邻的有理数, 显然这是不可能的;

令 $M = \{x | x \leq 10, x \in Q\}$, $N = \{x | x > 10, x \in Q\}$, 显然集合 M 中有一个最大元素, 集合 N 中没有最小元素, 即选项 D 可能.

故选: ABD.

10. (多选) (2022 · 福建三明 · 高一期末) 整数集 Z 中, 被 5 除所得余数为 k 的所有整数组成一个“类”, 记为 $[k]$, 即 $[k] = \{5n + k | n \in Z\}$, 其中 $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. 以下判断正确的是 ()

A. $2021 \in [1]$

B. $-2 \in [2]$

C. $Z = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4]$

D. 若 $a - b \in [0]$, 则整数 a, b 属同一类

【答案】ACD

对 A, $2021 = 404 \times 5 + 1$, 即余数为 1, 正确;

对 B, $-2 = -1 \times 5 + 3$, 即余数为 3, 错误;

对 C, 易知, 全体整数被 5 除的余数只能是 0, 1, 2, 3, 4, 正确;

对 D, 由题意 $a - b$ 能被 5 整除, 则 a, b 分别被 5 整除的余数相同, 正确.

故选: ACD.

11. (多选) (2022 · 全国 · 高一期末) 在整数集 Z 中被 5 除所得余数为 k 的所有整数组成一个“类”, 记为 $[k]$, 即 $[k] = \{5n + k | n \in Z\}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$. 则下列结论正确的是 ()

A. $2021 \in [1]$

B. $-3 \in [3]$

C. $Z = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4]$

D. “整数 a, b 属于同一类”的充要条件是 “ $a - b \in [0]$ ”

【答案】ACD

解: 对于 A 选项, $[1] = \{5n + 1 | n \in Z\}$, $2021 = 5 \times 404 + 1$, $2021 \in [1]$, 故 A 正确;

对于 B 选项, $[3] = \{5n + 3 | n \in Z\}$, $-3 = \{5n + 2 | n \in Z\}$, $-3 \in [2]$, 故 B 不正确;

对于 C 选项, 整数集 Z 中的数, 被 5 除所得余数只能为 0, 1, 2, 3, 4,

所以 $Z = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4]$, 故 C 正确;

对于 D 选项, 若整数 a, b 属于同一类, 则 $a - b = 5n, n \in Z$, 所以 $a - b \in [0]$,

反之, 若 $a - b \in [0]$, 则 $a - b = 5n, n \in Z$, 整数 a, b 属于同一类, 故 D 正确,

故选：ACD.

12. (多选) (2022·全国·高三专题练习) 定义 $A-B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \notin B\}$,

$A*B = (A-B) \cup (B-A)$ 叫做集合的对称差, 若集合 $A = \{y | y = x+2, -1 \leq x \leq 3\}$,

$B = \left\{y \left| y = \frac{2}{x}, \frac{1}{5} \leq x \leq 1 \right.\right\}$, 则以下说法正确的是 ()

A. $B = [2, 10]$

B. $A-B = [1, 2)$

C. $A*B = (1, 2] \cup (5, 10]$

D. $A*B = B*A$

【答案】ABD

$\because A = \{y | y = x+2, -1 \leq x \leq 3\} = [1, 5]$, $B = \left\{y \left| y = \frac{2}{x}, \frac{1}{5} \leq x \leq 1 \right.\right\} = [2, 10]$, 故 A 正确;

$\because$ 定义 $A-B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$,

$\therefore A-B = [1, 2)$, $B-A = (5, 10]$, 故 B 正确;

$A*B = (A-B) \cup (B-A) = [1, 2) \cup (5, 10]$, 故 C 错误;

$B*A = (B-A) \cup (A-B) = [1, 2) \cup (5, 10]$, 所以 $A*B = B*A$, 故 D 正确.

故选：ABD.

13. (2022·黑龙江·大庆实验中学高一期末) 设集合 $U = \{2, 3, 4\}$, 对其子集引进“势”的概念; ①空集的“势”最小; ②非空子集的元素越多, 其“势”越大; ③若两个子集的元素个数相同, 则子集中最大的元素越大, 子集的“势”就越大. 最大的元素相同, 则第二大的元素越大, 子集的“势”就越大, 以此类推. 若将全部的子集按“势”从小到大顺序排列, 则排在第6位的子集是_____.

【答案】 $\{2, 4\}$

根据题意, 将全部的子集按“势”从小到大顺序排列为:

$\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}$.

故排在第6位的子集为 $\{2, 4\}$.

故答案为: $\{2, 4\}$

14. (2022·全国·高三专题练习) 在整数集中, 被4除所得余数为 k 的所有整数组成一个“类”, 记为 $[k]$, 即 $[k] = \{4n+k | n \in \mathbb{Z}\}, k=0, 1, 2, 3$. 给出下列四个结论.

① $2021 \in [1]$; ② $-1 \in [1]$; ③ $\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3]$; ④ “整数 a, b 属于同一“类””的充要条件是 “ $a-b \in [0]$ ”.

其中正确的结论是_____ (填所有正确的结论的序号).

【答案】①③④

对于①, $Q 2021 = 4 \times 505 + 1$, 则 $2021 \in [1]$, ①正确;

对于②, $Q -1 = 4 \times (-1) + 3$, 则 $-1 \in [3]$, ②不正确;

对于③, Q 任意整数除以 4, 余数可以且只可以是 0, 1, 2, 3 四类,

则 $Z = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3]$, ③正确;

对于④, 若整数 a, b 属于同一“类”,

则整数 a, b 被 4 除的余数相同, 可设 $a = 4n_1 + k$, $b = 4n_2 + k$, 其中 $n_1, n_2 \in Z$,

$k \in \{0, 1, 2, 3\}$,

则 $a - b = 4(n_1 - n_2)$, 故 $a - b \in [0]$,

若 $a - b \in [0]$, 不妨令 $a = 4n_1 + k_1, b = 4n_2 + k_2$ ($n_1, n_2 \in Z, k_1, k_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$),

则 $a - b = 4(n_1 - n_2) + (k_1 - k_2)$,

显然 $n_1 - n_2 \in Z, |k_1 - k_2| \in \{0, 1, 2, 3\}$, 于是得 $|k_1 - k_2| = 0$, $\therefore k_1 = k_2$, 即整数 a, b 属于同一“类”,

$\therefore$ “整数 a, b 属于同一“类””的充要条件是 “ $a - b \in [0]$ ”, ④正确.

$\therefore$ 正确的结论是①③④.

故答案为: ①③④.

15. (2022 · 上海 · 高三专题练习) 已知有限集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} (n \geq 2, n \in N^*)$, 如果 A 中元素 $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 满足: $a_1 \times 2a_2 \times \dots \times na_n = a_1 + 2a_2 + \dots + na_n$, 就称 A 为 n 元“均衡集”. 若 $\{a_1, a_2\}$ 是二元“均衡集”, 则 $2a_1 + a_2$ 的取值范围是__.

【答案】 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{9}{2}, +\infty\right)$

由题意知 $\{a_1, a_2\}$ 是二元“均衡集”, 所以 $a_1 \times 2a_2 = a_1 + 2a_2$, 即 $2a_2(a_1 - 1) = a_1$,

当 $a_1 = 1$ 时, 显然不成立, 所以 $a_2 = \frac{a_1}{2(a_1 - 1)}$,

所以 $2a_1 + a_2 = 2a_1 + \frac{a_1}{2(a_1 - 1)} = 2a_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2(a_1 - 1)}$,

设 $2(a_1 - 1) = x (x \neq 0)$, 所以 $2a_1 + a_2 = 2a_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2(a_1 - 1)} = x + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x} + \frac{5}{2}$,

当 $x > 0$ 时, $y = x + \frac{1}{x} + \frac{5}{2} \geq 2\sqrt{x \times \frac{1}{x}} + \frac{5}{2} = 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$, 当且仅当 $x = 1$ 时等号成立,

当 $x < 0$ 时, $y = x + \frac{1}{x} + \frac{5}{2} = -(-x + \frac{1}{-x}) \leq -2\sqrt{(-x) \times \frac{1}{-x}} + \frac{5}{2} = -2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$,

当且仅当 $x = -1$ 时等号成立,

所以 $2a_1 + a_2$ 的取值范围 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{9}{2}, +\infty\right)$.

故答案为: $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{9}{2}, +\infty\right)$.

16. (2022 · 上海 · 高三专题练习) 若实数 a, b, c 满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}$, 则 a, b, c 是调和的, 设含有三个元素的集合 P 是集合 $M = \{x | x \leq 2020, x \in \mathbb{Z}\}$ 的子集, 当集合 P 中的元素 a, b, c 既是等差的又是调和的时候, 称集合 P 为“好集”, 则三元子集中“好集”的概率是_____.

【答案】 $\frac{3}{32643198}$

因为 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}$, 且 $a + c = 2b$, 所以 $(a - b)(a + 2b) = 0$, 所以 $a = b$ (舍去) 或 $a = -2b$,

所以 $c = 4b$, 所以 $P = \{-2b, b, 4b\}$,

又 $|4b| \leq 2020$, 解得 $-505 \leq b \leq 505$, 且 $b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$, 所以三元子集中“好集” P 共 1010 个,

所求的概率为 $\frac{1010}{C_{4041}^3} = \frac{3}{32643198}$,

故答案为: $\frac{3}{32643198}$.

二、逻辑推理

1. (2022 · 全国 · 高三专题练习 (文)) 祖暅原理: “幂势既同, 则积不容异”意思是说两个同高的几何体, 若在等高处的截面积恒相等, 则体积相等. 设 A, B 为两个同高的几何体, $p: A, B$ 在等高处的截面积不恒相等, $q: A, B$ 的体积不相等, 根据祖暅原理可知, p 是 q 的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】 B

“两个同高的几何体, 等高处的截面积恒相等, 则体积相等”的等价命题是“两个同高的几何体, 体积不相等, 则等高处的截面积不恒相等”, 所以 $q \Rightarrow p$;

反之“两个同高的几何体, 体积相等, 则等高处的截面积恒相等”不成立, 即由 p 推不出 q ,

所以 p 是 q 的必要不充分条件.

故选: B.

2. (2022 · 重庆南开中学高一期中) 两个体积分别为 V_1, V_2

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。
如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/457022043115006106>