【压轴必刷】2022中考数学压轴大题之经典模型培优案

专题21 旋转模型综合问题

经典例题

【例1】. 如图（1），P为$\triangle ABC$所在平面上一点，且$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$，则点$P$叫做$\triangle ABC$的费马点．

（1）如果点P为锐角$\triangle ABC$的费马点，且$\angle ABC=60°$．

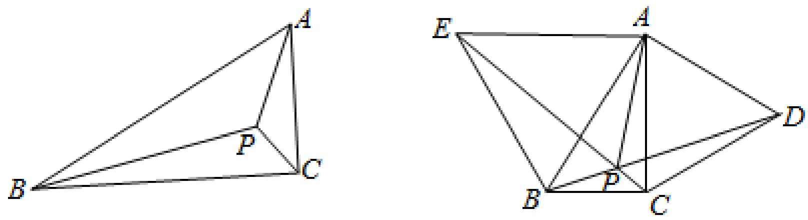
①求证：$\triangle ABP\backsim\triangle BCP$；

②若$PA=3$，$PC=4$，则$PB=$__$2\sqrt{3}$__．

（2）已知锐角$\triangle ABC$，分别以AB、AC为边向外作正$\triangle ABE$和正$\triangle ACD$，CE和BD相交于P点．如图（2）

①求$\angle CPD$的度数；

②求证：P点为$\triangle ABC$的费马点．



(1)　　　　　　(2)

【分析】（1）①根据题意，利用内角和定理及等式性质得到一对角相等，利用两角相等的三角形相似即可得证；

②由三角形ABP与三角形BCP相似，得比例，将PA与PC的长代入求出PB的长即可；

（2）①根据三角形ABE与三角形ACD为等边三角形，利用等边三角形的性质得到两对边相等，两个角为60°，利用等式的性质得到夹角相等，利用SAS得到三角形ACE与三角形ABD全等，利用全等三角形的对应角相等得到$\angle 1=\angle 2$，再由对顶角相等，得到$\angle 5=\angle 6$，即可求出所求角度数；

②由三角形ADF与三角形CPF相似，得到比例式，变形得到积的恒等式，再由对顶角相等，利用两边成比例，且夹角相等的三角形相似得到三角形AFP与三角形CFD相似，利用相似三角形对应角相等得到$\angle APF$为60°，由$\angle APD+\angle DPC$，求出$\angle APC$为120°，进而确定出$\angle APB$与$\angle BPC$都为120°，即可得证．

【解答】（1）证明：①$\because\angle PAB+\angle PBA=180°-\angle APB=60°$，$\angle PBC+\angle PBA=\angle ABC=60°$，

$\therefore \angle PAB = \angle PBC$，

又$\because \angle APB = \angle BPC = 120°$，

$\therefore \triangle ABP \backsim \triangle BCP$，

②解：$\because \triangle ABP \backsim \triangle BCP$，

$\therefore \frac{PA}{PB} = \frac{PB}{PC}$，

$\therefore PB^2 = PA \cdot PC = 12$，

$\therefore PB = 2\sqrt{3}$;

故答案为：$2\sqrt{3}$;

（2）解：①$\because \triangle ABE$与$\triangle ACD$都为等边三角形，

$\therefore \angle BAE = \angle CAD = 60°$，$AE = AB$，$AC = AD$，

$\therefore \angle BAE + \angle BAC = \angle CAD + \angle BAC$，即$\angle EAC = \angle BAD$，

在$\triangle ACE$和$\triangle ABD$中，

$$\begin{cases} AC=AD \\ \angle EAC=\angle BAD, \\ EA=AB \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle ABD$（$SAS$），

$\therefore \angle 1 = \angle 2$，

$\because \angle 3 = \angle 4$，

$\therefore \angle CPD = \angle 6 = \angle 5 = 60°$；

②证明：方法一：$\because \triangle ADF \backsim \triangle CFP$，

$\therefore \frac{AF}{CP} = \frac{DF}{PF}$，

$\therefore AF \cdot PF = DF \cdot CP$，

$\because \angle AFP = \angle CFD$，

$\therefore \triangle AFP \backsim \triangle CDF$.

$\therefore \angle APF = \angle ACD = 60°$，

$\therefore \angle APC = \angle CPD + \angle APF = 120°$，

$\therefore \angle BPC = 120°$，

$\therefore \angle APB = 360° - \angle BPC - \angle APC = 120°$，

$\therefore P$点为$\triangle ABC$的费马点．

方法二：由①知：$\angle CPD=60°$，

$\therefore \angle BPC=180°-\angle CPD=120°$，

由①知：$\angle 1=\angle 2$，

$\therefore A$，P，C，D 共圆，

$\therefore \angle APC+\angle ADC=180°$，

$\therefore \angle APC=180°-\angle ADC=120°$，

$\therefore \angle APB=360°-\angle BPC-\angle APC=120°$，

$\therefore P$ 点为$\triangle ABC$ 的费马点．

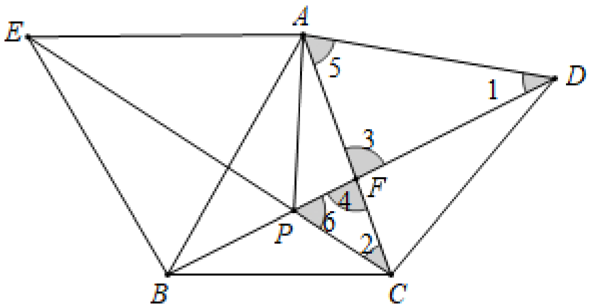


图2

【例 2】．如图①，点 M 为锐角三角形 ABC 内任意一点，连接 AM、BM、CM．以 AB 为一边向外作等边三角形$\triangle ABE$，将 BM 绕点 B 逆时针旋转 $60°$ 得到 BN，连接 EN．

（1）求证：$\triangle AMB\cong\triangle ENB$；

（2）若 $AM+BM+CM$ 的值最小，则称点 M 为$\triangle ABC$ 的费马点．若点 M 为$\triangle ABC$ 的费马点，试求此时$\angle AMB$、$\angle BMC$、$\angle CMA$ 的度数；

（3）小翔受以上启发，得到一个作锐角三角形费马点的简便方法：如图②，分别以$\triangle ABC$ 的 AB、AC 为一边向外作等边$\triangle ABE$ 和等边$\triangle ACF$，连接 CE、BF，设交点为 M，则点 M 即为$\triangle ABC$ 的费马点．试说明这种作法的依据．

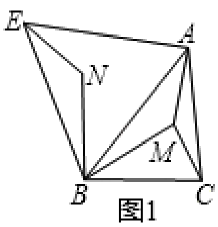


图1

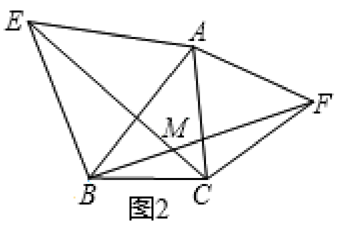


图2

【分析】（1）结合等边三角形的性质，根据 SAS 可证$\triangle AMB\cong\triangle ENB$；

（2）连接 MN，由（1）的结论证明$\triangle BMN$ 为等边三角形，所以 $BM=MN$，即 $AM+BM+CM=$

$EN+MN+CM$，所以当 E、N、M、C 四点共线时，$AM+BM+CM$ 的值最小，从而可求此时$\angle AMB$、$\angle BMC$、$\angle CMA$ 的度数；

（3）根据（2）中费马点的定义，又$\triangle ABC$ 的费马点在线段 EC 上，同理也在线段 BF 上．因此线段 EC 与 BF 的交点即为$\triangle ABC$ 的费马点．

【解析】（1）证明：∵$\triangle ABE$ 为等边三角形，

∴$AB=BE$，$\angle ABE=60°$．

而$\angle MBN=60°$，

∴$\angle ABM=\angle EBN$．

在$\triangle AMB$ 与$\triangle ENB$ 中，

∵$\begin{cases} AB=BE \\ \angle ABM=\angle EBN, \\ BM=BN \end{cases}$

∴$\triangle AMB\cong\triangle ENB$（$SAS$）．

（2）连接 MN．由（1）知，$AM=EN$．

∵$\angle MBN=60°$，$BM=BN$，

∴$\triangle BMN$ 为等边三角形．

∴$BM=MN$．

∴$AM+BM+CM=EN+MN+CM$．

∴当 E、N、M、C 四点共线时，$AM+BM+CM$ 的值最小．

此时，$\angle BMC=180°-\angle NMB=120°$；

$\angle AMB=\angle ENB=180°-\angle BNM=120°$；

$\angle AMC=360°-\angle BMC-\angle AMB=120°$．

（3）由（2）知，$\triangle ABC$ 的费马点在线段 EC 上，同理也在线段 BF 上．

因此线段 EC 与 BF 的交点即为$\triangle ABC$ 的费马点．

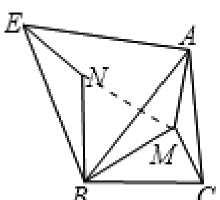


图1

【例3】．如图（1），P 为$\triangle ABC$所在平面上一点，且$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$，则点 P 叫做$\triangle ABC$的费马点．

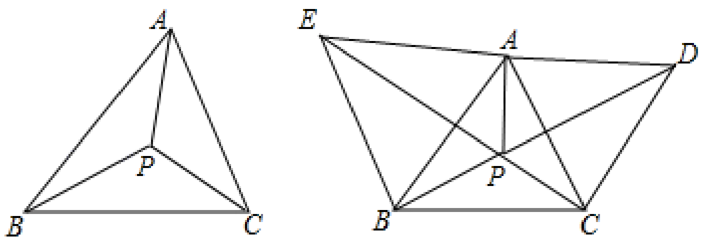
（1）若点 P 是等边三角形三条中线的交点，点 P__是__（填是或不是）该三角形的费马点．

（2）如果点 P 为锐角$\triangle ABC$的费马点，且$\angle ABC=60°$．求证：$\triangle ABP\backsim\triangle BCP$；

（3）已知锐角$\triangle ABC$，分别以 AB、AC 为边向外作正$\triangle ABE$和正$\triangle ACD$，CE 和 BD 相交于 P 点．如图（2）

①求$\angle CPD$的度数；

②求证：P 点为$\triangle ABC$的费马点．



图（1）　　图（2）

【分析】（1）依据等腰三角形三线合一的性质可知：MB 平分$\angle ABC$，则$\angle ABP=30°$，同理$\angle BAP=30°$，则$\angle APB=120°$，同理可求得$\angle APC$，$\angle BPC$的度数，然后可作出判断；

（2）由费马点的定义可知$\angle PAB=\angle PBC$，然后再证明$\angle PAB=\angle PBC$即可；

（3）如图2所示：①首先证明$\triangle ACE\cong\triangle ABD$，则$\angle 1=\angle 2$，由$\angle 3=\angle 4$可得到$\angle CPD=\angle 5$；②由$\angle CPD=60°$可证明$\angle BPC=120°$，然后证明$\triangle ADF\backsim\triangle CFP$，由相似三角形的性质和判定定理再证明$\triangle AFP\backsim\triangle CDF$，故此可得到$\angle APF=\angle ACD=60°$，然后可求得$\angle APC=120°$，接下来可求得$\angle APB=120°$．

【解析】（1）如图1所示：

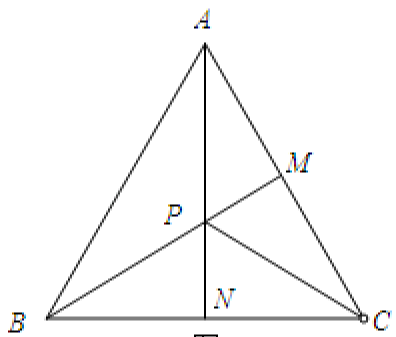


图1

∵$AB=BC$，BM 是 AC 的中线，

∴MB 平分$\angle ABC$．

同理：AN 平分 $\angle BAC$，PC 平分 $\angle BCA$．

$\because \triangle ABC$ 为等边三角形，

$\therefore \angle ABP=30^\circ$，$\angle BAP=30^\circ$．

$\therefore \angle APB=120^\circ$．

同理：$\angle APC=120^\circ$，$\angle BPC=120^\circ$．

$\therefore P$ 是 $\triangle ABC$ 的费马点．

故答案为：是．

（2）$\because \angle PAB+\angle PBA=180^\circ-\angle APB=60^\circ$，$\angle PBC+\angle PBA=\angle ABC=60^\circ$，

$\therefore \angle PAB=\angle PBC$，

又 $\because \angle APB=\angle BPC=120^\circ$，

$\therefore \triangle ABP\backsim\triangle BCP$．

（3）如图 2 所示：

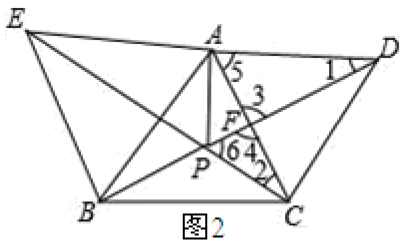


图2

①$\because \triangle ABE$ 与 $\triangle ACD$ 都为等边三角形，

$\therefore \angle BAE=\angle CAD=60^\circ$，$AE=AB$，$AC=AD$，

$\therefore \angle BAE+\angle BAC=\angle CAD+\angle BAC$，即 $\angle EAC=\angle BAD$，

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle ABD$ 中，$\begin{cases} AC=AD \\ \angle EAC=\angle BAD \\ EA=AB \end{cases}$

$\therefore \triangle ACE\cong\triangle ABD$（$SAS$），

$\therefore \angle 1=\angle 2$，

$\because \angle 3=\angle 4$，

$\therefore \angle CPD=\angle 6=\angle 5=60^\circ$；

②证明：$\because \triangle ADF\backsim\triangle CFP$，

$\therefore AF\cdot CF=DF\cdot PF$，

∵ $\angle AFP=\angle CFD$，

∴$\triangle AFP\backsim\triangle CDF$．

∴$\angle APF=\angle ACD=60°$，

∴$\angle APC=\angle CPD+\angle APF=120°$，

∴$\angle BPC=120°$，

∴$\angle APB=360°-\angle BPC-\angle APC=120°$，

∴P 点为$\triangle ABC$ 的费马点．

【例 4】．【方法呈现】:

（1）已知，点 P 是正方形 $ABCD$ 内的一点，连 PA、PB、PC．将$\triangle PAB$ 绕点 B 顺时针旋转 90°到$\triangle P'CB$ 的位置（如图 1），设 AB 的长为 a，PB 的长为 b（$b<a$），求$\triangle PAB$ 旋转到$\triangle P'CB$ 的过程中边 PA 所扫过区域（图 1 中阴影部分）的面积；

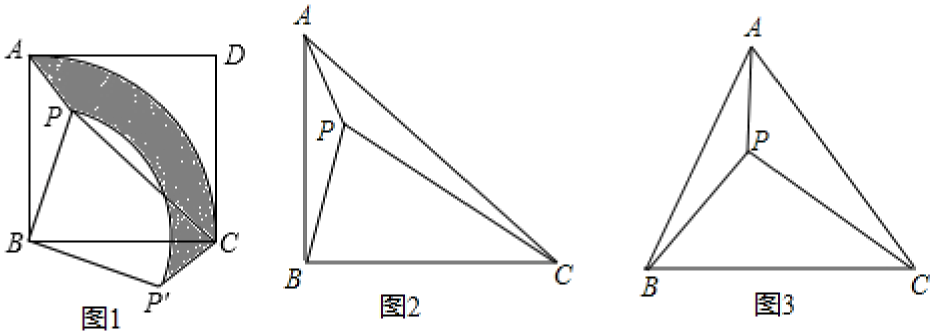


图1　图2　图3

【实际运用】:

（2）如图 2，点 P 是等腰 Rt$\triangle ABC$ 内一点，$AB=BC$，连接 PA，PB，PC．若 $PA=2$，$PB=4$，$PC=6$，求$\angle APB$ 的大小；

【拓展延伸】:

（3）如图 3，点 P 是等边$\triangle ABC$ 内一点，$PA=3$，$PB=4$，$PC=5$，则$\triangle APC$ 的面积是__$\frac{9\sqrt{3}}{4}+3$__（直接填答案）

【分析】（1）依题意，将$\triangle P'CB$ 逆时针旋转 90°可与$\triangle PAB$ 重合，此时阴影部分面积＝扇形 BAC 的面积﹣扇形 BPP'的面积，根据旋转的性质可知，两个扇形的中心角都是 90°，可据此求出阴影部分的面积．

（2）连接 PP'，求出$\triangle PBP'$ 是等腰直角三角形，根据等腰直角三角形的性质可得 $PP'=4\sqrt{3}$，$\angle BP'P=45°$，再利用勾股定理逆定理求出$\angle CP'P=90°$，然后计算即可得解；

（3）根据全等三角形的面积相等求出$\triangle APB$ 与$\triangle APC$ 的面积之和等于四边形 $APCP_1$ 的面积，然后根据

等边三角形的面积与直角三角形的面积列式计算即可得解，同理求出△ABP 和△BPC 的面积的和，△APC 和△BPC 的面积的和，从而求出△ABC 的面积，然后根据△BPC 的面积＝△ABC 的面积﹣△APB 与△APC 的面积的和计算即可得解.

【解析】(1)∵将△PAB 绕点 B 顺时针旋转 90°到△$P'CB$ 的位置，

∴△PAB≌△$P'CB$，

∴$S_{\triangle PAB}=S_{\triangle P'CB}$，

$S_{阴影}=S_{扇形BAC}-S_{扇形BPP'}=\frac{\pi}{4}(a^2-b^2)$；

(2)如图 2，连接 PP'.

∵将△PAB 绕 B 点顺时针旋转 90°，与△$P'CB$ 重合，

∴△PAB≌△$P'CB$，$\angle PBP'=90°$，

∴$BP=BP'$，$\angle APB=\angle CP'B$，$AP=CP'=2$，

∴△PBP' 是等腰直角三角形，

∴$PP'=\sqrt{2}PB=4\sqrt{2}$，$\angle BP'P=45°$.

在△CPP' 中，∵$PP'=4\sqrt{2}$，$CP'=2$，$PC=6$，

∴$PP'^2+CP'^2=PC^2$，

∴△$CP'P$ 是直角三角形，$\angle CP'P=90°$，

∴$\angle CP'B=\angle BP'P+\angle CP'P=45°+90°=135°$；

(3)如图 3①，将△PAB 绕 A 点逆时针旋转 60°得到△P_1AC，连接 PP_1，

∴△APB≌△AP_1C，

∴$AP=AP_1$，$\angle PAP_1=60°$，$CP_1=BP=4$，

∴△PAP_1 是等边三角形，

∴$PP_1=AP=3$，

∵$CP=5$，$CP_1=4$，$PP_1=3$，

∴$PP_1^2+CP_1^2=CP^2$，

∴△CP_1P 是直角三角形，$\angle CP_1P=90°$，

∴$S_{\triangle APP1}=\frac{1}{2}\times3\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$，$S_{\triangle PP1C}=\frac{1}{2}\times3\times4=6$，

$\therefore S_{\text{四边形}APCP1}=S_{\triangle APP1}+S_{\triangle PP1C}=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}+6$;

$\because \triangle APB\cong\triangle AP_1C$,

$\therefore S_{\triangle ABP}+S_{\triangle APC}=S_{\text{四边形}APCP1}=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}+6$;

如图 3②，同理可求：$\triangle ABP$ 和$\triangle BPC$ 的面积的和$=\dfrac{1}{2}\times4\times\dfrac{4\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\times3\times4=4\sqrt{3}+6$，

$\triangle APC$ 和$\triangle BPC$ 的面积的和$=\dfrac{1}{2}\times5\times\dfrac{5\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\times3\times4=\dfrac{25\sqrt{3}}{4}+6$，

$\therefore\triangle ABC$ 的面积$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{9\sqrt{3}}{4}+6+4\sqrt{3}+6+\dfrac{25\sqrt{3}}{4}+6\right)=\dfrac{25\sqrt{3}}{4}+9$，

$\therefore\triangle APC$ 的面积$=\triangle ABC$ 的面积 - $\triangle APB$ 与$\triangle BPC$ 的面积的和$=\left(\dfrac{25\sqrt{3}}{4}+9\right)-\left(4\sqrt{3}+6\right)=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}+3$．

故答案为$\dfrac{9\sqrt{3}}{4}+3$．

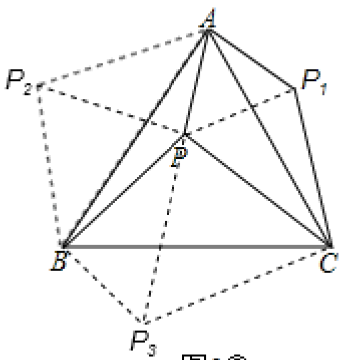


图3②

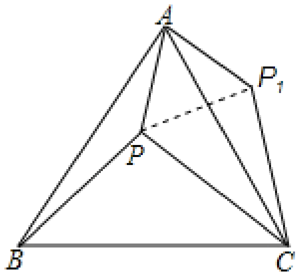


图3①

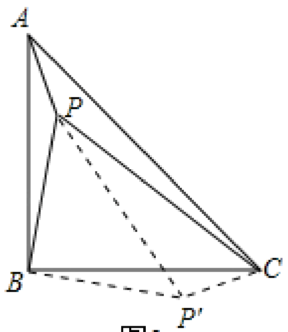


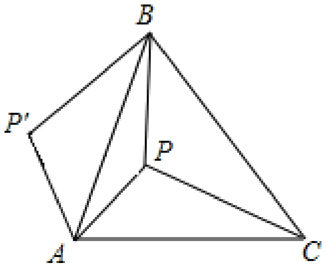
图2

培优训练

1．如图，P 是正三角形 ABC 内的一点，且 $PA=6$，$PB=8$，$PC=10$．若将△PAC 绕点 A 逆时针旋转后，得到△$P'AB$．

（1）求点 P 与点 P' 之间的距离；

（2）求∠APB 的度数．



【分析】（1）由已知△PAC 绕点 A 逆时针旋转后，得到△$P'AB$，可得△PAC≌△$P'AB$，$PA=P'A$，旋转角∠$P'AP$=∠$BAC=60°$，所以△APP' 为等边三角形，即可求得 PP'；

（2）由△APP' 为等边三角形，得∠$APP'=60°$，在△$PP'B$ 中，已知三边，用勾股定理逆定理证出直角三角形，得出∠$P'PB=90°$，可求∠APB 的度数．

【解析】（1）连接 PP'，由题意可知 $BP'=PC=10$，$AP'=AP$，

∠PAC=∠$P'AB$，而∠PAC+∠$BAP=60°$，

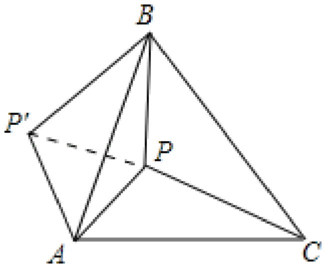
所以∠$PAP'=60$ 度．故△APP' 为等边三角形，

所以 $PP'=AP=AP'=6$；

（2）利用勾股定理的逆定理可知：

$PP'^2+BP^2=BP'^2$，所以△BPP' 为直角三角形，且∠$BPP'=90°$

可求∠$APB=90°+60°=150°$．



2．（原题初探）（1）小明在数学作业本中看到有这样一道作业题：如图 1，P 是正方形 $ABCD$ 内一点，连结

PA，PB，PC 现将△PAB 绕点 B 顺时针旋转 90°得到的△$P'CB$，连接 PP'．若 $PA=\sqrt{2}$，$PB=3$，∠$APB=135°$，则 PC 的长为 __$2\sqrt{5}$__，正方形 $ABCD$ 的边长为 __$\sqrt{17}$__．

（变式猜想）（2）如图 2，若点 P 是等边△ABC 内的一点，且 $PA=3$，$PB=4$，$PC=5$，请猜想∠APB 的度数，并说明理由．

（拓展应用）（3）聪明的小明经过上述两小题的训练后，善于反思的他又提出了如下的问题：

如图 3，在四边形 $ABCD$ 中，$AD=3$，$CD=2$，∠ABC＝∠ACB＝∠$ADC=45°$，则 BD 的长度为 $\sqrt{22}$__．

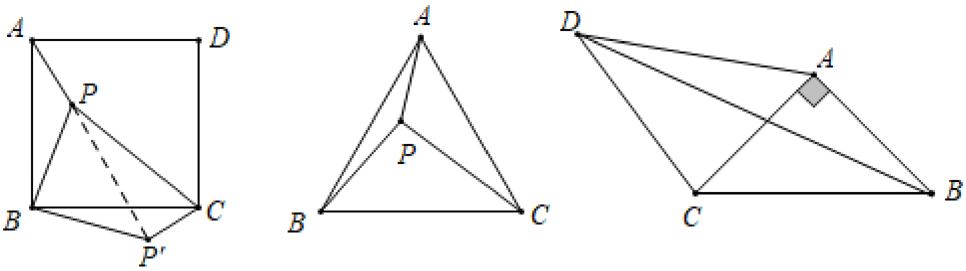


图1　　图2　　图3

【分析】(1) 由旋转的性质得 $BP=BP'=3$，$P'C=PA=\sqrt{2}$，∠$PBP'=90°$，∠$BP'C$＝∠$APB=135°$，则△BPP' 为等腰直角三角形，再由勾股定理得 $PC=2\sqrt{5}$，过点 A 作 $AE\perp BP$ 交 BP 的延长线于 E，则△AEP 是等腰直角三角形，得 $AE=PE=1$，得 $BE=4$，然后由勾股定理即可求解；

（2）由旋转的性质得△BPP' 是等边三角形，则 $PP'=BP=4$，∠$BPP'=60°$，$AP=3$，$AP'=PC=5$，再由勾股定理得逆定理得△APP' 为直角三角形，即可求解；

（3）由旋转的性质得 $AK=AD=3$，$CK=BD$，∠$KAD=90°$，则△DAK 是等腰直角三角形，得 $DK=3\sqrt{2}$，∠$ADK=45°$，再证∠$CDK=90°$，即可解决问题．

【解析】(1) ∵△PAB 绕点 B 顺时针旋转 90°得到的△$P'CB$，

∴$BP=BP'=3$，$P'C=PA=\sqrt{2}$，∠$PBP'=90°$，∠$BP'C$＝∠$APB=135°$，

∴△BPP' 为等腰直角三角形，

∴∠$BP'P=45°$，$PP'=\sqrt{2}PB=3\sqrt{2}$，

∴∠$PP'C=135°-45°=90°$，

在 Rt△$PP'C$ 中，由勾股定理得：$PC=\sqrt{PP'^2+P'C^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{5}$，

过点 A 作 $AE\perp BP$ 交 BP 的延长线于 E，如图 1 所示：

∵∠$APB=135°$，

∴∠$APE=180°-135°=45°$，

∴△AEP 是等腰直角三角形，

∴$AE=PE=\frac{\sqrt{2}}{2}PA=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}=1$，

∴$BE=PB+PE=3+1=4$，

在 Rt△AEB 中，由勾股定理得：$AB=\sqrt{AE^2+BE^2}=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$，

故答案为：$2\sqrt{5}$，$\sqrt{17}$；

（2）$\angle APB$ 的度数为 150°，理由如下：

∵△ABC 是等边三角形，

∴$AB=BC$，$\angle ABC=60°$，

将△BPC 绕点 B 逆时针旋转 60°，得到△$BP'A$，连接 PP'，如图 2 所示：

则△BPP' 是等边三角形，

∴$PP'=BP=4$，$\angle BPP'=60°$，

∵$AP=3$，$AP'=PC=5$，

∴$P'P^2+AP^2=AP'^2$，

∴△APP' 为直角三角形，

∴$\angle APP'=90°$，

∴$\angle APB=\angle APP'+\angle BPP'=90°+60°=150°$；

（3）∵$\angle ABC=\angle ACB=\angle ADC=45°$，

∴△BAC 是等腰直角三角形，

∴$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，

将△ABD 绕点 A 顺时针旋转 90°，得到△ACK，连接 DK，如图 3 所示：

由旋转的性质得：$AK=AD=3$，$CK=BD$，$\angle KAD=90°$，

∴△DAK 是等腰直角三角形，

∴$DK=\sqrt{2}AD=3\sqrt{2}$，$\angle ADK=45°$，

∴$\angle CDK=\angle ADC+\angle ADK=45°+45°=90°$，

∴△CDK 是直角三角形，

∴$CK=\sqrt{DK^2+CD^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{22}$，

∴$BD=\sqrt{22}$，

故答案为：$\sqrt{22}$.

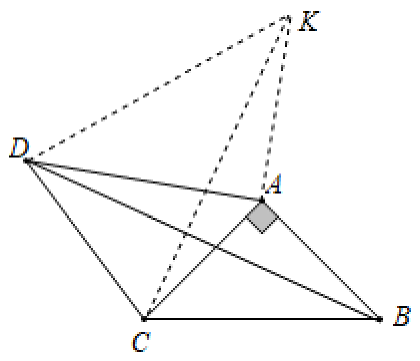


图3

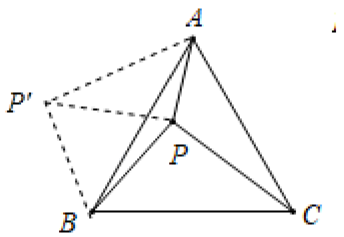


图 2

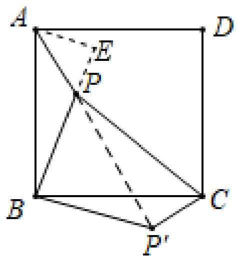


图1

3．问题：如图 1，在等边△*ABC* 内部有一点 *P*，已知 *PA*＝3，*PB*＝4，*PC*＝5，求∠*APB* 的度数？

（1）请写出常见四组勾股数：3，4，5、5，12，13、7，24，25、6，8，10．

（2）解决方法：通过观察发现 *PA*，*PB*，*PC* 的长度符合勾股数，但由于 *PA*，*PB*，*PC* 不在一个三角形中，想法将这些条件集中在一个三角形，于是可将△*ABP* 绕 *A* 逆时针旋转 60°到△*AP*′ *C*，此时△*ABP*≌△*ACP*'，这样利用等边三角形和全等三角形知识，便可求出∠*APB*＝150°．请写出解题过程．

（3）应用：请你利用（2）题的思路，解答下面的问题：

如图 2，在△*ABC* 中，∠*CAB*＝90°，*AB*＝*AC*，*E*，*F* 为 *BC* 的点，且∠*EAF*＝45°，若 *BE*＝*m*，*FC*＝*n*，请求出线段 *EF* 的长度（用 *m*、*n* 的代数式表示）．

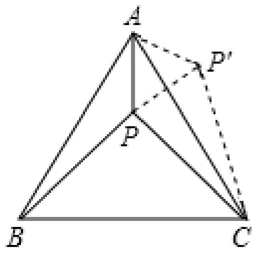


图1

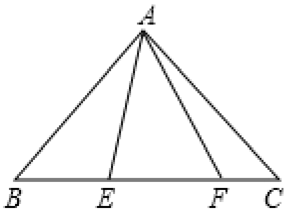


图2

【分析】(1）根据勾股数的定义解决问题即可.

（2）根据等边三角形的性质得出 $AB=AC$，$\angle BAC=60^\circ$，根据旋转得出$\triangle ACP'\cong\triangle ABP$，求出 $PA=P'A=3$，$PB=P'C=4$，$\angle BAP=\angle CAP'$，求出$\angle P'AP=\angle BAC=60^\circ$，推出$\triangle PAP'$是等边三角形，求出 $PP'=P'A=3$，根据勾股定理的逆定理求出$\angle PP'C=90^\circ$，即可得出答案；

（3）根据旋转得出$\triangle ACE'\cong\triangle ABE$，根据全等得出 $AE=AE'$，$BE=CE'$，$\angle E'AC='BAE$，求出$\angle FAE'=\angle EAF$，根据全等三角形的判定推出$\triangle AEF\cong\triangle AE'F$，推出 $FE=FE'$，根据勾股定理求出 $E'F$ 即可.

【解析】(1）勾股数：3，4，5；5，12，13，7，24，25；6，8，10；

故答案为：3，4，5；5，12，13，7，24，25；6，8，10；

（2）如图 1，将$\triangle ABP$ 绕顶点 A 逆时针旋转 60° 到$\triangle ACP'$处，则$\triangle ACP'\cong\triangle ABP$，

∵三角形 ABC 是等边三角形，

∴$AB=AC$，$\angle BAC=60^\circ$，

∴$PA=P'A=3$，$PB=P'C=4$，$\angle BAP=\angle CAP'$，

∴$\angle P'AP=\angle PAC+\angle CAP'=\angle PAC+\angle BAP=\angle BAC=60^\circ$，

∴$\triangle PAP'$是等边三角形，

∴$PP'=P'A=3$，

在$\triangle PP'C$中，$PP'^2+P'C^2=9+16=25=PC^2$，

∴$\triangle PP'C$是直角三角形，

∴$\angle PP'C=90^\circ$，

∴$\angle APB=\angle AP'C=60^\circ+90^\circ=150^\circ$.

故答案为 150°.

（3）如图 2 中，将$\triangle ABE$ 绕顶点 A 逆时针旋转 90° 到$\triangle ACE'$处，则$\triangle ACE'\cong\triangle ABE$，

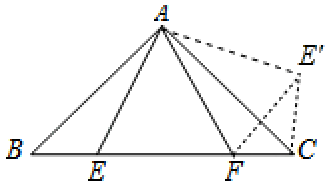


图2

∴$AE=AE'$，$BE=CE'$，$\angle E'AC=\angle BAE$，

∵$\angle BAC=90°$，$\angle EAF=45°$，

∴$\angle BAE+\angle CAF=45°$，

$\angle FAE'=\angle E'AC+\angle FAC=\angle BAE+\angle FAC=45°=\angle EAF$，

在$\triangle AEF$和$\triangle AE'F$中，

$$\begin{cases} AE=AE' \\ \angle EAF=\angle E'AF \\ AF=AF \end{cases}，$$

∴$\triangle AEF\cong\triangle AE'F$（$SAS$），

∴$FE=FE'$，

∵$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，

∴$\angle B=\angle ACB=45°$，

∴$\angle E'CA=\angle B=45°$，

∴$\angle E'CF=45°+45°=90°$，

在 $Rt\triangle E'FC$ 中，$E'C^2+FC^2=E'F^2$，

∴$EF^2=BE^2+CF^2=m^2+n^2$，

∴$EF=\sqrt{m^2+n^2}$.

4.（1）如图 1，点 P 是等边$\triangle ABC$ 内一点，已知 $PA=3$，$PB=4$，$PC=5$，求$\angle APB$ 的度数.

分析：要直接求$\angle APB$ 的度数显然很困难，注意到条件中的三边长恰好是一组勾股数，因此考虑借助旋转把这三边集中到一个三角形内.

解：如图 2，作$\angle PAD=60°$ 使 $AD=AP$，连接 PD，CD，则$\triangle PAD$ 是等边三角形.

∴$\underline{\quad PD\quad}=AD=AP=3$，$\angle ADP=\angle PAD=60°$

∵$\triangle ABC$ 是等边三角形

∴$AC=AB$，$\angle BAC=60°$ ∴$\angle BAP=\underline{\quad \angle CAD\quad}$

∴$\triangle ABP\cong\triangle ACD$

∴$BP=CD=4$，$\underline{\quad \angle APB\quad}=\angle ADC$

∵在△PCD中，$PD=3$，$PC=5$，$CD=4$，$PD^2+CD^2=PC^2$

∴∠PDC=__90__°

∴∠APB=∠ADC=∠ADP+∠PDC=60°+90°=150°

（2）如图3，在△ABC中，$AB=BC$，∠ABC=90°，点P是△ABC内一点，$PA=1$，$PB=2$，$PC=3$，求∠APB的度数．

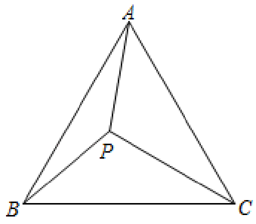


图1

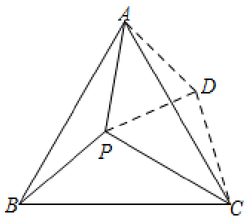


图2

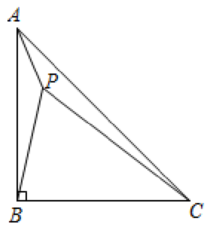


图3

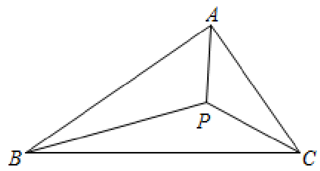


图4

（3）拓展应用．如图（4），△ABC中，∠ABC=30°，$AB=4$，$BC=5$，P是△ABC内部的任意一点，连接PA，PB，PC，则$PA+PB+PC$的最小值为__$\sqrt{41}$__．

【分析】（1）根据全等三角形的判定和性质解决问题即可．

（2）如图3中，把△PBC绕B点逆时针旋转90°得到△DBA，利用勾股定理的逆定理证明∠APD=90°即可解决问题．

（3）如图4中，先由旋转的性质得出△ABP≌△DBE，则∠ABP=∠DBE，$BD=AB=4$，∠PBE=60°，$BE=PE$，$AP=DE$，再证明∠DBC=90°，然后在Rt△BCD中，由勾股定理求出CD的长度，即为$PA+PB+PC$的最小值；

【解析】（1）如图2，作∠PAD=60°使$AD=AP$，连接PD，CD，则△PAD是等边三角形．

∴$PD=AD=AP=3$，∠ADP=∠PAD=60°

∵△ABC是等边三角形

∴$AC=AB$，∠BAC=60°，

∴∠BAP=∠CAD，

∴△ABP≌△ACD（SAS）

∴$BP=CD=4$，∠APB=∠ADC

∵在△PCD中，$PD=3$，$PC=5$，$CD=4$，$PD^2+CD^2=PC^2$

∴∠PDC=90°

∴∠APB=∠ADC=∠ADP+∠PDC=60°+90°=150°

故答案为：PD，∠CAD，∠APB，90．

（2）解：∵$\angle ABC=90°$，$BC=AB$，

∴把$\triangle PBC$绕B点逆时针旋转$90°$得到$\triangle DBA$，如图，

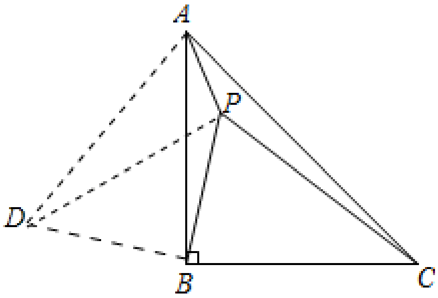


图3

∴$AD=PC=3$，$BD=BP=2$，

∵$\angle PBD=90°$

∴$DP=\sqrt{2}PB=2\sqrt{2}$，$\angle DPB=45°$，

在$\triangle APD$中，$AD=3$，$PD=2\sqrt{2}$，$PA=1$，

∵$1^2+（2\sqrt{2}）^2=3^2$，

∴$AP^2+PD^2=BD^2$，

∴$\triangle APD$为直角三角形，

∴$\angle APD=90°$，

∴$\angle APB=\angle APD+\angle DPB=90°+45°=135°$．

（3）解：如图4中，将$\triangle ABP$绕着点B逆时针旋转$60°$，得到$\triangle DBE$，连接EP，CD，

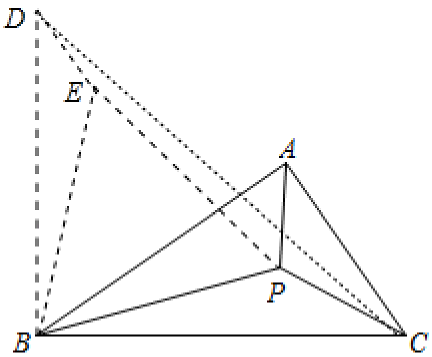


图4

∴$\triangle ABP\cong\triangle DBE$

∴$\angle ABP=\angle DBE$，$BD=AB=4$，$\angle PBE=60°$，$BE=PE$，$AP=DE$，

∴$\triangle BPE$是等边三角形

∴$EP=BP$

∴$AP+BP+PC=PC+EP+DE$

∴当点 D，点 E，点 P，点 C 共线时，$PA+PB+PC$ 有最小值 CD

∵$\angle ABC=30°=\angle ABP+\angle PBC$

∴$\angle DBE+\angle PBC=30°$

∴$\angle DBC=90°$

∴$CD=\sqrt{BD^2+BC^2}=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$，

故答案为$\sqrt{41}$.

5．如图 1，D、E、F 是等边三角形 ABC 中不共线三点，连接 AD、BE、CF，三条线段两两分别相交于 D、E、F．已知 $AF=BD$，$\angle EDF=60°$．

（1）证明：$EF=DF$；

（2）如图 2，点 M 是 ED 上一点，连接 CM，以 CM 为边向右作△CMG，连接 EG．若 $EG=EC+EM$，$CM=GM$，$\angle GMC=\angle GEC$，证明：$CG=CM$．

（3）如图 3，在（2）的条件下，当点 M 与点 D 重合时，若 $CD\perp AD$，$GD=4$，请问在△ACD 内部是否存在点 P 使得 P 到△ACD 三个顶点距离之和最小，若存在请直接写出距离之和的最小值；若不存在，试说明理由．

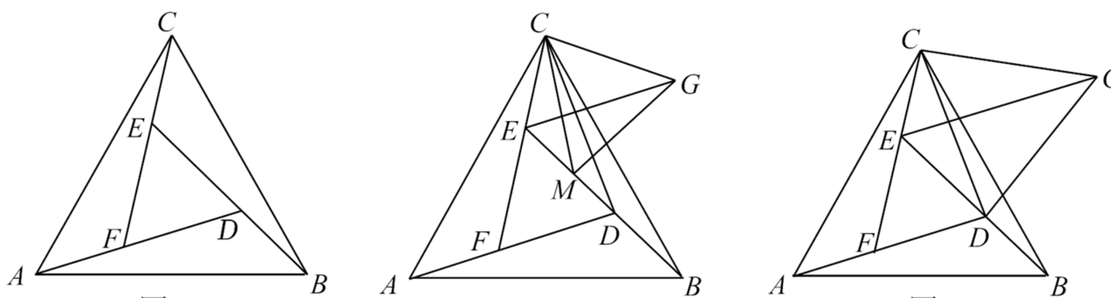


图1　　图2　　图3

【分析】（1）可先推出$\angle CAF=\angle ABD$，再证△ACF≌△BAD，即可得出结论；

（2）在 EF 上截取 $EN=EM$，连接 MN，可推出△EMN 是等边三角形，可证△NCM≌△EGM，然后推出△CMG 是等边三角形，从而问题得证；

（3）先求得 $AD=\frac{8\sqrt{3}}{3}$，将△DPC 绕点 D 顺时针旋转 60°至△DQG，连接 AG，可得△PDQ 是等边三角形，于是 $AP+PD+CP=AP+PQ+QG$，故当 A、P、Q、G 共线时，$AP+PD+CP$ 最小$=AG$，最后解斜三角形 ADG，从而求得．

【解答】（1）证明：如图 1，

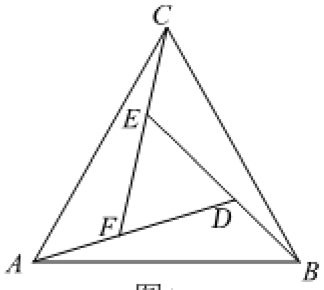


图1

∵△ABC 是等边三角形，

∴$AC=AB$，

$\angle ACB=60°$，

∴$\angle CAF+\angle DAB=60°$，

∵$\angle EDF=60°$，

∴$\angle DAB+\angle ABD=60°$，

∴$\angle CAF=\angle ABD$，

∵$AF=BD$，

∴△ACF≌△BAD（SAS），

∴$EF=DF$；

（2）证明：如图 2，

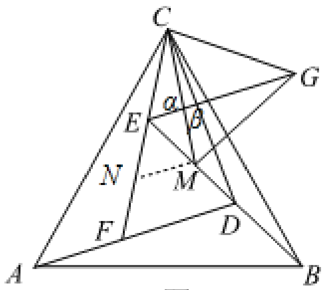


图2

由（1）知，

$EF=DF$，$\angle EDF=60°$，

∴△DEF 是等边三角形，

∴$\angle DEF=60°$，

在 EF 上截取 $EN=EM$，连接 MN，

∴$CN=CE+EN=CE+EM=EG$，

∴△EMN 是等边三角形，

∴∠CNM＝60°，

∵∠GMC＝∠GEC，∠α＝∠β，

∴∠NCM＝∠EGM，

∵CM＝GM，

∴△NCM≌△EGM（SAS），

∴∠MEG＝∠CNM＝60°，

∴∠CEG＝180°－∠MEG－∠FED＝60°，

∴∠GME＝∠GEC＝60°，

∵CM＝GM，

∴△CMG 是等边三角形，

∴CG＝CM；

（3）解：如图 3，

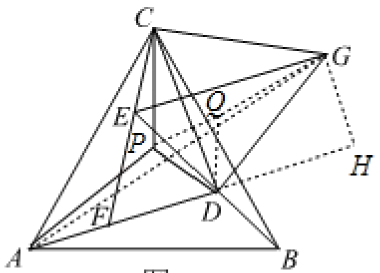


图3

由（1）（2）知，

△DEF 和△CDG 是等边三角形，

∴∠CFD＝60°，CD＝GD＝4，

∵CD⊥AD，

∴∠CDF＝90°，

∴$AD=CF=\dfrac{CD}{\sin60^\circ}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$，

将△DPC 绕点 D 顺时针旋转 60°至△DQG，连接 AG，

∴AD＝DQ，CP＝QG，

∴△PDQ 是等边三角形，

∴PD＝PQ，

∴AP+PD+CP＝AP+PQ+QG，