河南省郑州市中牟县中牟县第一高级中学2023-2024学年高一下学期模拟预测数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．若$\frac{z+2}{1-\mathrm{i}}=\mathrm{i}$，则$\overline{z}$的虚部为（　　）

A．-1　　B．1　　C．3　　D．-3

2．总体由编号为01，02，…，30的30个个体组成.利用所给的随机数表选取6个个体，选取的方法是从随机数表第1行的第3列开始，由左到右一次选取两个数字，则选出来的第5个个体的编号为（　）

（第一行）1712　1340　3320　3826　1389　5103　7417　7637

（第二行）1304　0774　2119　3056　6218　3735　9683　5087

A．20　　B．26　　C．17　　D．03

3．某型号新能源汽车参加碰撞测试和续航测试，该型号新能源汽车参加这两项测试的结果相互不受影响．若该型号新能源汽车在碰撞测试中结果为优秀的概率为$\frac{3}{4}$，在续航测试中结果为优秀的概率为$\frac{2}{3}$，则该型号新能源汽车在这两项测试中仅有一项测试结果为优秀的概率为（　）

A．$\frac{7}{12}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{5}{12}$　　D．$\frac{1}{3}$

4．设α、β是两个平面，m、n是两条直线，且$\alpha\cap\beta=m$.下列四个命题：

①若$m//n$，则$n//\alpha$或$n//\beta$　　②若$m\perp n$，则$n\perp\alpha$，$n\perp\beta$

③若$n//\alpha$，且$n//\beta$，则$m//n$　　④若n与α和β所成的角相等，则$m\perp n$

其中所有真命题的编号是（　）

A．①③　　B．②④　　C．①②③　　D．①③④

5．分别掷两枚质地均匀的硬币，“第一枚为正面”记为事件A，“第二枚为正面”记为事件B，“两枚结果相同”记为事件C，那么事件A与B，A与C间的关系是（　）

A．A与B，A与C均相互独立

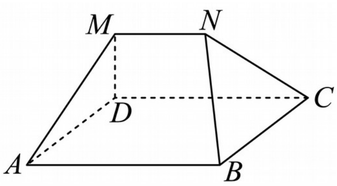
B．A与B相互独立，A与C互斥

C．A与B，A与C均互斥

D．A与B互斥，A与C相互独立

6．庑殿顶是中国古代传统建筑中的一种屋顶形式，宋代称为“五脊殿”、“吴殿”，清代称为“四阿殿”，如图（1）所示.现有如图（2）所示的庑殿顶式几何体$ABCDMN$，其中正方形$ABCD$边长为3，$MN//AB,MN=\frac{3}{2}$，且MN到平面$ABCD$的距离为2，则几何体$ABCDMN$的体积为（　）

图(1)



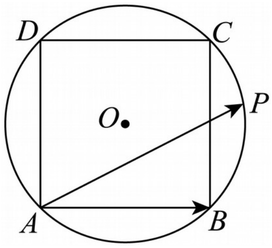
图(2)

A．$\frac{27}{4}$　　B．$\frac{9}{4}$　　C．$\frac{5}{2}$　　D．$\frac{15}{2}$

7．设$\vec{a},\vec{b}$是非零向量，则$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$是$\vec{a}=2\vec{b}$成立的（　）

A．充要条件　　B．充分不必要条件　　C．必要不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

8．如图，圆O内接边长为1的正方形$ABCD,P$是弧BC（包括端点）上一点，则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$的取值范围是（　）



A．$\left[1,\frac{4+\sqrt{2}}{4}\right]$　　B．$\left[1,\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right]$　　C．$\left[1,\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$　　D．$\left[\frac{\sqrt{2}}{4},1\right]$

二、多选题

9．已知复数z_1，z_2，z_3，则下列说法中正确的有（　）

A．若$z_1z_2=z_1z_3$，则$z_1=0$或$z_2=z_3$

B．若$z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，则$z_1^{2024}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

C．若$z_1^2+z_2^2=0$，则$z_1=z_2=0$

D．若$z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2}$，则$|z_1|=|z_2|$

10．国家统计局统计了2024年1月全国多个大中城市二手住宅销售价格的分类指数，其中北方和南方各4个城市的90m²及以下二手住宅销售价格的环比数据如下：

北方城市	环比（单位：%，上月=100）	南方城市	环比（单位：%，上月=100）
北京	99.5	上海	99.5
天津	99.6	南京	99.5
石家庄	99.6	南昌	99.6
沈阳	99.7	福州	99.8

则（　）

A．4个北方城市的环比数据的极差小于4个南方城市的环比数据的极差

B．4个北方城市的环比数据的均值小于4个南方城市的环比数据的均值

C．4个北方城市的环比数据的方差大于4个南方城市的环比数据的方差

D．4个北方城市的环比数据的中位数大于4个南方城市的环比数据的中位数

11．已知$\triangle ABC$内角A，B，C的对边分别为a，b，c，O为$\triangle ABC$的重心，$\cos A=\frac{1}{5}$，$AO=2$，则（　）

A．$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　B．$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\le 3$

C．$\triangle ABC$的面积的最大值为$3\sqrt{6}$　　D．a的最小值为$2\sqrt{5}$

三、填空题

12．从某中学抽取12名同学，他们的数学成绩如下：87，85，92，90，83，92，87，98，96，84，99，78（单位：分），则这12名同学数学成绩的第75百分位数为____.

13．已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$满足$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=\sqrt{2}$，且$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，则$\cos\left\langle \vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}\right\rangle=$__.

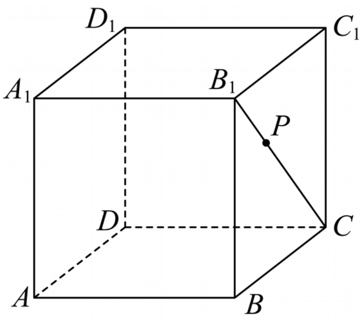
14．如图，在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点P在线段B_1C上运动，则下列结论正确的是__________.

①平面$BD_1P\perp$平面ACB_1

②三棱锥A_1-DPC_1的体积为定值

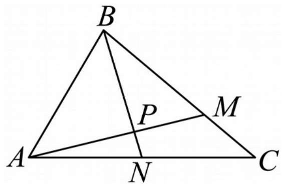
③在B_1C上存在点P，使得$A_1P//$面ACD_1

④A_1P+PC_1的最小值为2



四、解答题

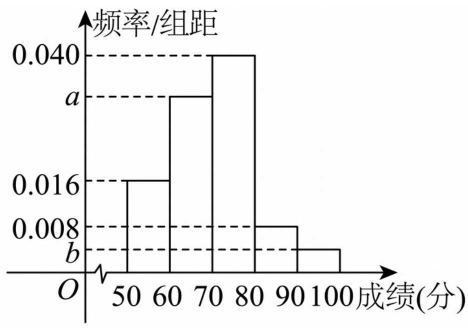
15．如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=6$， $AC=9$， $\angle BAC=60°$， $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MC}$，点 N 为 AC 边的中点， AM， BN 相交于点 P．



(1)求 $|\overrightarrow{BN}|$；

(2)求 $\cos\angle MPN$．

16．2024年5月22日至5月28日是第二届全国城市生活垃圾分类宣传周，本次宣传周的主题为“践行新时尚分类志愿行”.阜阳三中高一年级举行了一次“垃圾分类知识竞赛”，为了了解本次竞赛成绩情况，从中抽取了部分学生的成绩 x（单位：分，得分取正整数，满分为100分）作为样本进行统计将成绩进行整理后，分为五组（$50\le x<60$，$60\le x<70$，$70\le x<80$，$80\le x<90$，$90\le x\le 100$），其中第1组频数的平方等于第2组、第4组频数之积，请根据下面尚未完成的频率分布直方图（如图所示）解决下列问题：



(1)求 a，b 的值；

(2)若根据这次成绩，学校准备淘汰80%的同学，仅留20%的同学进入下一轮竞赛请问晋级分数线划为多少合理？

(3)某老师在此次竞赛成绩中抽取了10名学生的分数：x_1，x_2，x_3，…，x_{10}，已知这10个分数的平均数 $\overline{x}=90$，标准差 $s=6$，若剔除其中的95和85这两个分数，求剩余8个分数的平均数与方差.

17．已知在 $\triangle ABC$ 中，$a\cos B+b\cos A=2c\cos A$.

(1)求 A 的大小；

(2)若 $c=4$，在下列三个条件中选择一个作为已知，使 $\triangle ABC$ 存在且唯一，求 $\triangle ABC$ 的周长.

①$\triangle ABC$ 的面积为 $5\sqrt{3}$；②$a=\sqrt{13}$；③AB 边上的高线 CD 长为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

18．已知 A，B，C，D 四名选手参加某项比赛，其中 A，B 为种子选手，C，D 为非种子选手，种子选手对非种子选手种子选手获胜的概率为 $\dfrac{3}{4}$，种子选手之间的获胜的概率为 $\dfrac{1}{2}$，非种子选手之间获胜的概率为 $\dfrac{1}{2}$．比赛规则：第一轮两两对战，胜者进入第二轮，负者淘汰；第二轮的胜者为冠军.

(1)若你是主办方，则第一轮选手的对战安排一共有多少不同的方案？

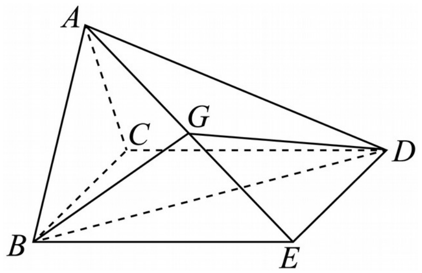
(2)选手A与选手D相遇的概率为多少？

(3)以下两种方案，哪一种种子选手夺冠的概率更大？

方案一：第一轮比赛种子选手与非种子选手比赛；

方案二：第一轮比赛种子选手与种子选手比赛．

19．如图，四棱锥$A-BCDE$中，平面$ABC\perp$平面$BCDE$，$\triangle ABC$是边长为2的等边三角形，底面$BCDE$是矩形，且$BE=\sqrt{2}$．



(1)若点G是AE的中点，

（i）求证：$AC//$平面BDG；

（ii）求直线DG与平面ABC所成角的正弦值；

(2)在线段AB上是否存在一点F，使二面角$B-CE-F$的大小为$\frac{\pi}{4}$.若存在，求$\frac{AF}{AB}$的值；若不存在，请说明理由.

参考答案：

1．A

【分析】先根据复数的四则运算化简复数，然后利用共轭复数的概念及虚部的概念求解即可.

【详解】因为$\frac{z+2}{1-\mathrm{i}}=\mathrm{i}$，所以$z=\mathrm{i}(1-\mathrm{i})-2=-1+\mathrm{i}$，所以$\bar{z}=-1-\mathrm{i}$的虚部为$-1$.

故选：A

2．D

【分析】先把编号按要求在随机数表中选出来，再剔除掉总体编号以外的编号，以及重复的编号，即可得到选出的个体编号.

【详解】从随机数表第1行的第3列开始，由左到右一次选取两个数字，

选出的编号依次为：12，13，40，33，20，38，26，13，89，51，03，…，

剔除掉总体编号以外的编号，以及重复的编号，

则选出来的个体的编号依次为：12，13，20，26，03，…，

所以选出来的第5个个体的编号为03.

故选：D.

3．C

【分析】根据独立事件的概率公式与互斥事件的概率加法公式可求概率.

【详解】根据题意可得该型号新能源汽车在这两项测试中仅有一项测试结果为优秀的概率为$\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$.

故选：C.

4．A

【分析】根据线面平行的判定定理即可判断①；举反例即可判断②④；根据线面平行的性质即可判断③.

【详解】对①，当$n\subset\alpha$，因为$m//n$，$m\subset\beta$，则$n//\beta$，当$n\subset\beta$，因为$m//n$，$m\subset\alpha$，则$n//\alpha$，当n既不在α也不在β内，因为$m//n$，$m\subset\alpha,m\subset\beta$，则$n//\alpha$且$n//\beta$，故①

正确；

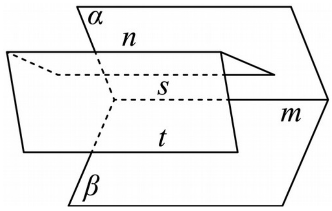
对②，若$m \perp n$，则n与α, β不一定垂直，故②错误；

对③，过直线n分别作两平面与α, β分别相交于直线s和直线t，

因为$n // \alpha$，过直线n的平面与平面α的交线为直线s，则根据线面平行的性质定理知$n // s$，

同理可得$n // t$，则$s // t$，因为$s \not\subset$平面β，$t \subset$平面β，则$s //$平面β，

因为$s \subset$平面α，$\alpha \cap \beta = m$，则$s // m$，又因为$n // s$，则$m // n$，故③正确；



对④，若n与α和β所成的角相等，如果$n // \alpha, n // \beta$，则$m // n$，故④错误；

综上只有①③正确，

故选：A.

5．A

【分析】结合相互独立事件的概念直接判断即可

【详解】因为事件A是否发生对事件B、C是否发生不产生影响，所以A与B，A与C均相互独立.

故选：A

6．D

【分析】取AB, CD的中点分别为F, E，把可得几何体$ABCDMN$分割为一个三棱柱$ADM - FEN$和一个四棱锥$N - FBCE$，结合柱体和锥体的体积公式，即可求解.

【详解】取AB, CD的中点分别为F, E，连接NE, EF, NF，

可得几何体$ABCDMN$分割为一个三棱柱$ADM - FEN$和一个四棱锥$N - FBCE$，

将三棱柱$ADM-FEN$补成一个上底面与矩形$ADEF$全等的矩形的平行六面体，

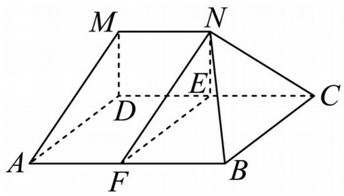
可得该三棱柱的体积为平行六面体的一半，

则三棱柱$ADM-FEN$的体积为$V_1=\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{2}\times3^2=\frac{9}{2}$，

四棱锥$N-FBCE$的体积为$V_2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times9\times2=3$，

所以该几何体$ABCDMN$的体积为$3+\frac{9}{2}=\frac{15}{2}$.

故选：D.



7．C

【分析】结合共线向量，单位向量，以及充分，必要条件的概念判断即可.

【详解】对于非零向量$\vec{a},\vec{b}$，

由$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$可知向量$\vec{a},\vec{b}$共线，但不一定是$\vec{a}=2\vec{b}$，所以充分性不成立；

由$\vec{a}=2\vec{b}$，可知向量$\vec{a},\vec{b}$共线同向，则$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$，所以必要性成立，

所以设$\vec{a},\vec{b}$是非零向量，则$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$是$\vec{a}=2\vec{b}$成立的必要不充分条件，

故选：C.

8．C

【分析】法一：以 A 为坐标原点，AB, AD 所在直线分别为 x 轴、y 轴，建立平面直角坐标系，应用向量的坐标运算即可求解；法二：连接 AC, CP，设 $\angle PAB=\theta, 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$，则 $\angle PAC=\frac{\pi}{4}-\theta$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\angle PAC$，即可求解.

【详解】方法一：如图 1，以 A 为坐标原点，AB, AD 所在直线分别为 x 轴、y 轴，建立平面直角坐标系，则 $A(0,0), B(1,0)$）.

设 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{AP}=(x,y)$. 因为 $\overrightarrow{AB}=(1,0)$，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=x$.

由题意知，圆 O 的半径 $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为点 P 在弧 BC（包括端点）上，

所以 $1\le x\le\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 $\left[1,\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$.

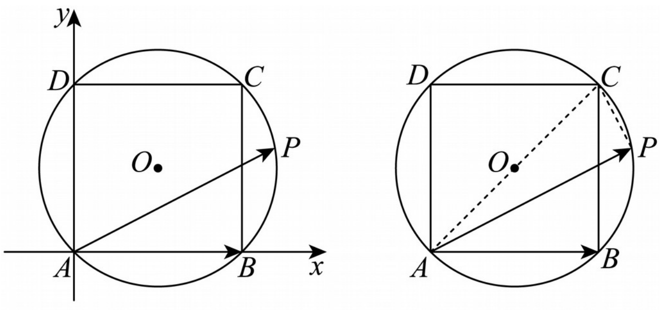


图1　　图2

方法二：如图 2，连接 AC, CP. 易知 $\angle BAC=\frac{\pi}{4}$，

设 $\angle PAB=\theta, 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$，则 $\angle PAC=\frac{\pi}{4}-\theta$.

由已知可得$|\overrightarrow{AB}|=1,|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2},\angle APC=\frac{\pi}{2}$，所以$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{AC}|\cos\angle PAC=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$，

所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi 2}{4}-\theta\right)\cos\theta\overset{2}{=}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{}}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{}}{2}\sin\theta\right)\cos\theta$

$=\left(\cos\theta+\sin\theta\right)\cos\theta=\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\sin\left(2\theta+\frac{}{4}\right)$.

因为$0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$，所以$\frac{\pi\pi 3\pi}{4}\le 2\theta+\frac{}{4}\le\frac{}{4}$，所以$\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\le\sin\left(2\theta+\frac{}{4}\right)\le 1$，

所以$1\le\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}\pi 1}{2}\sin\left(\overset{2}{2\theta}+\frac{}{4}\right)\le\frac{+\sqrt{}}{2}$，即$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$的取值范围是$\left[1,\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$.

故选：C.

9．ABD

【分析】根据复数的运算法则可判断A；先计算$z_1^3=1$，再求z_1^{2024}，判断B；用特例验证C；利用$z\cdot\overline{z}=|z|^2$说明D正确.

【详解】对于A，$z_1z_2=z_1z_3\Leftrightarrow z_1(z_2-z_3)=0\Leftrightarrow z_1=0$或$z_2=z_3$，故A正确.

对于B，方法：$z_1^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$z_1^3=1$，$z_1^4=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，所以$z_1^n$以3为周期，所以

$z_1^{2024}=z_1^{3\times 674+2}=z_1^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，故B正确.

方法二（复数的三角表示）：$z_1=\cos\frac{2\pi 2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{}{3}$，所以$z_1$的模为1，辐角为$\frac{2\pi}{3}$，则$z_1^{2024}$

的模为1，辐角为$\frac{2\pi 4\pi}{3}\times 2024=2\pi\times 674\quad+\frac{}{3}$，

所以$z_1^{2024}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$．故B正确．

对于C，取$z_1=1$，$z_2=i$，则$z_1^2+z_2^2=0$，此时$z_1\neq z_2$，故C错误．

对于D，$z_1\overline{z_1}=|z_1|^2$，$z_2\overline{z_2}=|z_2|^2$，所以$z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2}\Leftrightarrow|z_1|=|z_2|$，故D正确．

故选：ABD

10．AD

【分析】根据极差的定义判断A，根据平均数的定义判断B，根据方差的定义判断C，根据中位数的定义判D．

【详解】对于A，4个北方城市的环比数据的极差为$99.7-99.5=0.2$，4个南方城市的环比数据的极差为$99.8-99.5=0.3$，

所以4个北方城市的环比数据的极差小于4个南方城市的环比数据的极差，故A正确；

对于B，4个北方城市的环比数据的均值为$\frac{99.5+99.6+99.6+99.7}{4}=99.6$，4个南方城市的环比数据的均值为$\frac{99.5+99.5+99.6+99.8}{4}=99.6$，

所以4个北方城市的环比数据的均值与4个南方城市的环比数据的均值相等，故B错误；

对于C，4个北方城市的环比数据的方差为

$$\frac{1}{4}\times[(99.5-99.6)^2+(99.6-99.6)^2+(99.6-99.6)^2+(99.7-99.6)^2]=0.005,$$

4个南方城市的环比数据的方差为

$$\frac{1}{4}\times[(99.5-99.6)^2+(99.5-99.6)^2+(99.6-99.6)^2+(99.8-99.6)^2]=0.015,$$

所以4个北方城市的环比数据的方差小于4个南方城市的环比数据的方差，故C错误；

对于D，4个北方城市的环比数据的中位数为99.6，4个南方城市的环比数据的中位数为

$\frac{99.5+99.6}{2}=99.55$，

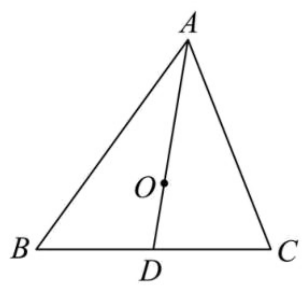
所以4个北方城市的环比数据的中位数大于4个南方城市的环比数据的中位数，故D正确.

故选：AD.

11．ABC

【分析】延长AO交BC于点D，根据平面向量的线性运算可得出$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，可判断选项A；结合$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，利用平面向量的数量积定义、数量积运算法则及基本不等式可判断选项B；由$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\le 3$和平面向量数量积的定义可得出$|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\le 15$，由$\cos A=\frac{1}{5}$求出$\sin A=\frac{2\sqrt{6}}{5}$，再根据三角形面积公式可判断选项C；结合选项B得出$|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2=36-\frac{2}{5}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|$，再利用余弦定理即可判断选项D.

【详解】



延长AO交BC于点D.