



高等数学



学习内容

第五讲

高阶导数定义

高阶导数求导法则

拓展应用题

小结

问题: 变速直线运动的加速度如何求.

设 $s = s(t)$, 则瞬时速度为 $v(t) = s'(t)$,

而加速度是速度 $v(t)$ 对时间 t 的导数,

$$\text{即 } a(t) = v'(t) = [s'(t)]'$$

$$\text{或 } a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right)$$

$$\text{即 } a(t) = v'(t) = [s'(t)]' = s''(t)$$

$$\text{或 } a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

这种导数的导数 $\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)$ 或 $[s'(t)]'$

叫作 s 对 t 的二阶导数, 记作: $\frac{d^2 s}{dt^2}$ 或 $s''(t)$

定义

若函数 $y = f(x)$ 的导数 $y' = f'(x)$ 仍然可导，则称 $y' = f'(x)$ 的导数为函数 $y = f(x)$ 的二阶导数，记作

$$f''(x), \quad y'', \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2},$$

称为 $f(x)$ 在点 x 的 **二阶导数**.

即

$$y'' = (y')', \quad f''(x) = [f'(x)]'.$$

或

$$(f'(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

二阶导数的导数,称为**三阶导数**, 记作:

$$f'''(x) \quad y''' \quad \frac{d^3 y}{dx^3} \quad \frac{d^3 f(x)}{dx^3}$$

三阶导数的导数,称为**四阶导数**, 记作:

$$f^{(4)}(x) \quad y^{(4)} \quad \frac{d^4 y}{dx^4} \quad \frac{d^4 f(x)}{dx^4}$$

n 阶导数:

记作:

$$f^{(n)}(x) \quad y^{(n)} \quad \frac{d^n y}{dx^n} \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

二阶和二阶以上的导数称为**高阶导数**.

	y 型		$f(x)$ 型		$\frac{dy}{dx}$ 型	
	导函数	x_0 点导数	导函数	x_0 点导数	导函数	x_0 点导数
一阶	y'	$y' _{x=x_0}$	$f'(x)$	$f'(x_0)$	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{dy}{dx} \Big _{x=x_0}$
二阶	y''	$y'' _{x=x_0}$	$f''(x)$	$f''(x_0)$	$\frac{d^2 y}{dx^2}$	$\frac{d^2 y}{dx^2} \Big _{x=x_0}$
三阶	y'''	$y''' _{x=x_0}$	$f'''(x)$	$f'''(x_0)$	$\frac{d^3 y}{dx^3}$	$\frac{d^3 y}{dx^3} \Big _{x=x_0}$
...	...	...	...	...	...	...
n 阶	$y^{(n)}$	$y^{(n)} \Big _{x=x_0}$	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$	$\frac{d^n y}{dx^n}$	$\frac{d^n y}{dx^n} \Big _{x=x_0}$

1. 直接法

按求导法则和基本公式一阶阶的算下去,

例

$$s = \sin \omega t, \text{ 求 } s''.$$

解

$$s' = \omega \cos \omega t, \quad s'' = -\omega^2 \sin \omega t.$$

例

求 $y = e^{ax}$ 、 $y = a^x$ 的 n 阶导数 .

解

$$y = e^{ax}, \quad y' = ae^{ax}, \quad y'' = a^2 e^{ax}, \quad \dots, \quad y^{(n)} = a^n e^{ax}.$$

$$y = a^x, \quad y' = a^x \ln a, \quad y'' = a^x (\ln a)^2, \quad \dots, \quad y^{(n)} = a^x (\ln a)^n.$$



1. $y = 2x^2 + \ln x$, 求 y''

$$y'' = 4 - \frac{1}{x^2}$$

2. $y = (2x + 5)^6$, 求 $y'''(-2)$

$$y''' = 2^3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4(2x + 5)^3, \therefore y'''(-2) = 960$$

2. 归纳法

几个初等函数的 n 阶导数

例

设 $y = x^\alpha$ ($\alpha \in R$), 求 $y^{(n)}$.

解

$$y' = \alpha x^{\alpha-1},$$

$$y'' = (\alpha x^{\alpha-1})' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},$$

$$y''' = (\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2})' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3},$$

... ..

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} \quad (n \geq 1)$$

若 α 为自然数 n ,

$$y^{(n)} = (x^n)^{(n)} = n!, \quad y^{(n+1)} = (n!)' = 0.$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/457060136104006126>