

专题 38 最值模型之瓜豆模型（原理）曲线

动点轨迹问题是中考和各类模拟考试的重要题型，学生受解析几何知识的局限和思维能力的束缚，该压轴点往往成为学生在中考中的一个坎，致使该压轴点成为学生在中考中失分的集中点。掌握该压轴题型的基本图形，构建问题解决的一般思路，是中考专题复习的一个重要途径。本专题就最值模型中的瓜豆原理（动点轨迹为圆弧型）进行梳理及对应试题分析，方便掌握。

目录导航

模型 1.瓜豆模型（圆弧轨迹类）	1
------------------	---

习题练模型

	12
--	----

模型 1.瓜豆模型（圆弧轨迹类）

模型解读

“主从联动”模型也叫“瓜豆”模型，出自成语“种瓜得瓜，种豆得豆”。这类动点问题中，一个动点随另一个动点的运动而运动，我们把它们分别叫作从动点和主动点，从动点和主动点的轨迹是一致的，即所谓“种”线得线，“种”圆得圆（而当主动点轨迹是其他图形时，从动点轨迹必然也是）。解决这一类问题通常用到旋转、全等和相似。

模型 1、运动轨迹为圆弧

模型 1-1. 如图， P 是圆 O 上一个动点， A 为定点，连接 AP ， Q 为 AP 中点， Q 点轨迹是？

分析：如图，连接 AO ，取 AO 中点 M ，任意时刻，均有 $\triangle AMQ \sim \triangle AOP$ ， $QM: PO=AQ: AP=1: 2$ 。

则动点 Q 是以 M 为圆心， MQ 为半径的圆。



模型 1-2. 如图， P 是圆 O 上一个动点， A 为定点，连接 AP ，作 $AQ \perp AP$ 且 $AQ=AP$ ，当点 P 在圆 O 上运动时， Q 点轨迹是？

分析：如图，连结 AO ，作 $AM \perp AO$ ， $AO=AM$ ；任意时刻均有 $\triangle APO \cong \triangle AQM$ ，且 $MQ=PO$ 。

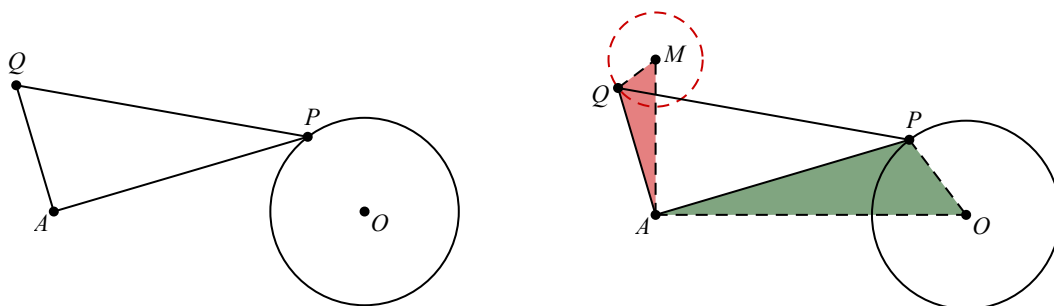
则动点 Q 是以 M 为圆心， MQ 为半径的圆。



模型 1-3. 如图， $\triangle APQ$ 是直角三角形， $\angle PAQ=90^\circ$ 且 $AP=k \cdot AQ$ ，当 P 在圆 O 运动时， Q 点轨迹是？

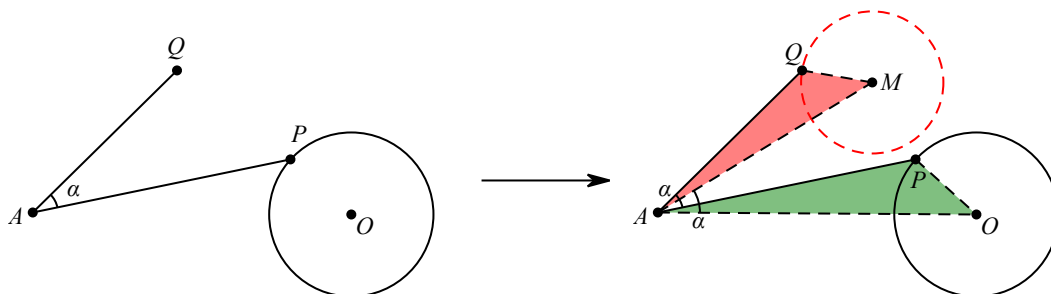
分析： 如图，连结 AO ，作 $AM \perp AO$ ， $AO:AM=k:1$ ；任意时刻均有 $\triangle APO \sim \triangle AQM$ ，且相似比为 k 。

则动点 Q 是以 M 为圆心， MQ 为半径的圆。



模型 1-4. 为了便于区分动点 P 、 Q ，可称 P 为“主动点”， Q 为“从动点”。

此类问题的两个必要条件：①主动点、从动点与定点连线的夹角是定量（ $\angle PAQ$ 是定值）；②主动点、从动点到定点的距离之比是定量（ $AP: AQ$ 是定值）。

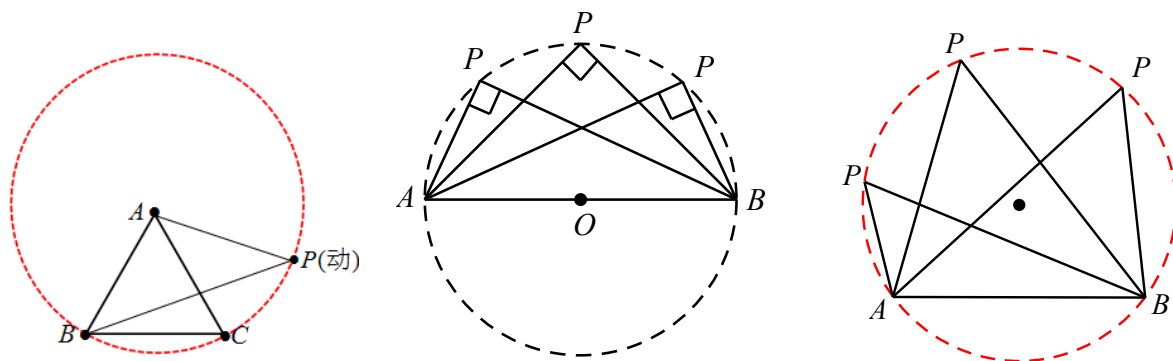


分析： 如图，连结 AO ，作 $\angle OAM=\angle PAQ$ ， $AO:AM=AP: AQ$ ；任意时刻均有 $\triangle APO \sim \triangle AQM$ 。

则动点 Q 是以 M 为圆心， MQ 为半径的圆。

特别注意： 很多题目中主动点的运动轨迹并未直接给出，这就需要我们掌握一些常见隐圆的轨迹求法。

（1）定义型： 若动点到平面内某定点的距离始终为定值，则其轨迹是圆或圆弧。（常见于动态翻折中）
如图，若 P 为动点，但 $AB=AC=AP$ ，则 B 、 C 、 P 三点共圆，则动点 P 是以 A 为圆心， AB 为半径的圆或圆弧。



(2) 定边对定角（或直角）模型

1) 一条定边所对的角始终为直角，则直角顶点轨迹是以定边为直径的圆或圆弧。

如图，若 P 为动点， AB 为定值， $\angle APB=90^\circ$ ，则动点 P 是以 AB 为直径的圆或圆弧。

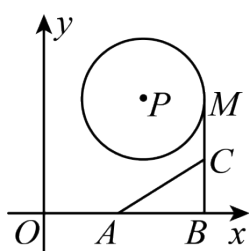
2) 一条定边所对的角始终为定角，则定角顶点轨迹是圆弧。

如图，若 P 为动点， AB 为定值， $\angle APB$ 为定值，则动点 P 的轨迹为圆弧。

模型运用

例 1. (2024·河南南阳·三模) 如图，点 $P(3,4)$ ， $\odot P$ 半径为 2， $A(2.8,0)$ ， $B(5.6,0)$ ，点 M 是 $\odot P$ 上的动点，

点 C 是 MB 的中点，则 AC 的最小值为 ()



A. 1.5

B. 2

C. 2.5

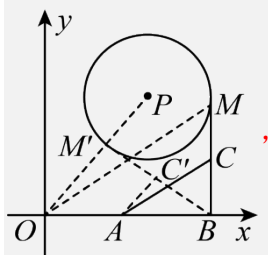
D. 3

【答案】A

【分析】本题考查了坐标与图形、三角形中位线定理、勾股定理，连接 OP 交 $\odot P$ 于 M' ，连接 OM ，由题意得出 AC 是 $\triangle OBM$ 的中位线，则 $AC = \frac{1}{2}OM$ ，从而得到当 OM 最小值， AC 最小，即当 M 运动到 M' 时， OM 最小，此时 AC 也为最小，求出 OM' 的长即可得出答案。

【详解】解：如图，连接 OP 交 $\odot P$ 于 M' ，连接 OM ，

$\because A(2.8,0)$ ， $B(5.6,0)$ ， $\therefore OA=2.8$ ， $AB=2.8$ ， $\therefore OA=AB$ ，

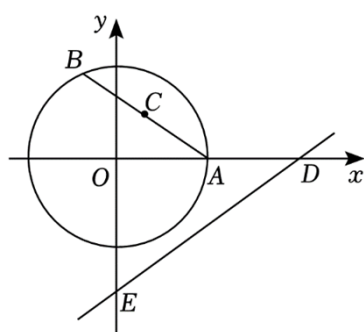


∵ 点 C 是 MB 的中点, $\therefore BC = CM$, $\therefore AC$ 是 $\triangle OBM$ 的中位线, $\therefore AC = \frac{1}{2}OM$,

$\therefore$ 当 OM 最小值, AC 最小, $\therefore$ 当 M 运动到 M' 时, OM 最小, 此时 AC 也为最小,

$\therefore OM' = OP - PM' = \sqrt{3^2 + 4^2} - 2 = 5 - 2 = 3$, $\therefore AC$ 的最小值为 $\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$, 故选: A.

例 2. (2023·黑龙江大庆·一模) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 半径为 2 的 $\odot O$ 与 x 轴的正半轴交于点 A , 点 B 是 $\odot O$ 上一动点, 点 C 为弦 AB 的中点, 直线 $y = \frac{3}{4}x - 3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 D 、 E , 则点 C 到直线 DE 的最小距离为 ()

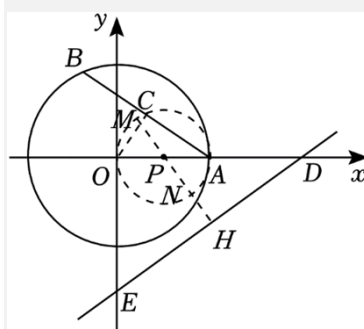


- A. 1 B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{3}{4}$

【答案】C

【分析】 先确定 C 点的轨迹是 $\odot P$, 则 C 到直线 DE 的最小距离为 NH , 根据相似得到边长的数量关系, 列方程直接求解即可.

【详解】 解: 连接 OC , 如图,



$\therefore$ 点 C 为弦 AB 的中点, $\therefore OC \perp AB$, $\therefore \angle ACO = 90^\circ$, $\therefore$ 点 C 在以 OA 为直径的圆上 (点 O 、 A 除外),

以 OA 为直径作 $\odot P$ ，过 P 点作直线 $PH \perp DE$ 于 H ，交 $\odot P$ 于 M 、 N ，

当 $x=0$ 时， $y=\frac{3}{4}x-3=-3$ ，则 $E(0,-3)$ ，当 $y=0$ 时， $\frac{3}{4}x-3=0$ ，解得 $x=4$ ，则 $D(4,0)$ ，

$\therefore OD=4$ ， $\therefore DE=\sqrt{3^2+4^2}=5$ ， $\because \odot O$ 的半径为 2， $\therefore A(2,0)$ ， $\therefore P(1,0)$ ， $\therefore OP=1$ ， $\therefore PD=OD-OP=3$ ，

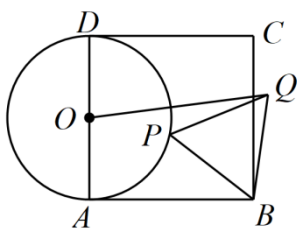
$\because \angle PDH = \angle EDO$ ， $\angle PHD = \angle EOD = 90^\circ$ ， $\therefore \triangle PDH \sim \triangle EDO$ ， $\therefore PH:OE = DP:DE$ ，

即 $PH:3=3:5$ ，解得 $PH=\frac{9}{5}$ ， $\therefore MH=PH+1=\frac{14}{5}$ ， $NH=PH-1=\frac{4}{5}$ 。

$\therefore$ 点 C 到直线 DE 的最小距离为 $\frac{4}{5}$ 。故选：C。

【点睛】此题考查圆与三角形的综合，解题关键是先确定 C 点的轨迹是圆，则 C 到直线 DE 的最小距离为 NH ，根据相似列方程直接求解即可。

例 3. (2023 春·湖北黄石·九年级校考阶段练习) 如图，四边形 $ABCD$ 为正方形， P 是以边 AD 为直径的 $\odot O$ 上一动点，连接 BP ，以 BP 为边作等边三角形 BPQ ，连接 OQ ，若 $AB=2$ ，则线段 OQ 的最大值为_____。



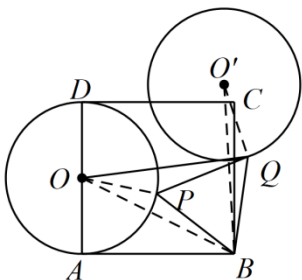
【答案】 $\sqrt{5}+1$

【分析】连接 OB 、 OP ，将 OB 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到 $O'B$ ，连接 $O'Q$ ，通过证明

$\triangle OBP \cong \triangle O'BQ$ (SAS)，得出 $OP = O'Q = 1$ ，从而得出点 Q 在以点 O' 为圆心， $O'Q$ 为半径的圆上运动；则当

点 O ， O' ， P 三点在一直线上时， OQ 取最大值，易证 $\triangle OBO'$ 为等边三角形，求出 $OO' = OB = \sqrt{5}$ ，即可求出 $OQ = OO' + O'Q = \sqrt{5} + 1$ 。

【详解】解：连接 OB 、 OP ，将 OB 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到 $O'B$ ，连接 $O'Q$ ，



$\because OB$ 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到 $O'B$, $\therefore OB = O'B$, $\angle OBO' = 60^\circ$,

$\because \triangle BPQ$ 为等边三角形, $\therefore PB = QB$, $\angle PBQ = 60^\circ$,

$\therefore \angle OBO' - \angle PBO' = \angle PBQ - \angle PBO'$, 即 $\angle OBP = \angle O'BQ$,

在 $\triangle OBP$ 和 $\triangle O'BQ$ 中,
$$\begin{cases} OB = O'B \\ \angle OBP = \angle O'BQ \\ PB = QB \end{cases} \therefore \triangle OBP \cong \triangle O'BQ (\text{SAS}),$$

$\because AB = 2$, 四边形 $ABCD$ 为正方形, $\therefore AD = AB = 2$, 则 $OA = OP = 1$,

$\therefore OP = O'Q = 1$, $\therefore$ 点 Q 在以点 O' 为圆心, $O'Q$ 为半径的圆上运动;

$\therefore$ 当点 O, O', P 三点在同一直线上时, OQ 取最大值,

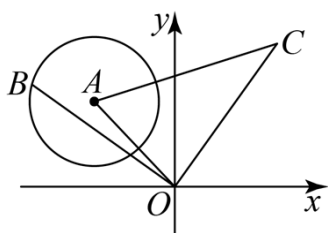
在 $\text{Rt}\triangle OAB$ 中, 根据勾股定理可得: $OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} = \sqrt{5}$,

$\because OB = O'B$, $\angle OBO' = 60^\circ$, $\therefore \triangle OBO'$ 为等边三角形, $\therefore OO' = OB = \sqrt{5}$,

$\therefore OQ = OO' + O'Q = \sqrt{5} + 1$, 故答案为: $\sqrt{5} + 1$.

【点睛】 本题主要考查瓜豆模型——圆生圆模型, 解题的关键是确定从动点 Q 的运动轨迹, 以及熟练掌握全等三角形的判定和性质, 等边三角形的判定和性质.

例 4. (23-24 九年级上·江苏南京·阶段练习) 如图, 平面直角坐标系 xOy 中, 点 A 的坐标是 $(-3, 4)$, 点 B 是 $\odot A$ 上一点, $\odot A$ 的半径为 2, 将 OB 绕 O 点顺时针方向旋转 90° 得 OC , 连接 AC , 则线段 AC 的最小值为 ()



A. $5\sqrt{2} - 2$

B. $3\sqrt{2} - 1$

C. 5

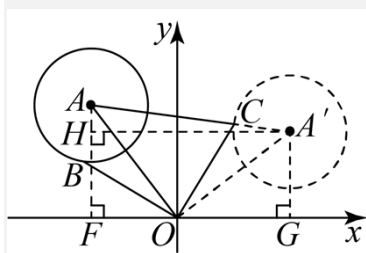
D. 6

【答案】A

【分析】 把 OA 绕 O 点顺时针方向旋转 90° 得 OA' , 过点 A 作 $AF \perp x$ 轴于点 F , 过点 A' 作 $A'G \perp x$ 轴于点 G , 以点 A' 为圆心作 $\odot A'$, 使 $\odot A'$ 的半径为 2, 点 B 是 $\odot A$ 上一点, 则点 C 是 $\odot A'$ 上一点, 当点 A, O, A' 三点共线, 即点 C 在 AA' 上时, AC 最小.

【详解】 解: 如图, 把 OA 绕 O 点顺时针方向旋转 90° 得 OA' , 过点 A 作 $AF \perp x$ 轴于点 F , 过点 A' 作 $A'G \perp x$

轴于点 G ，以点 A' 为圆心作 $\odot A'$ ，使 $\odot A'$ 的半径为 2，



$$\therefore OA = OA', \angle AOA' = 90^\circ, \angle AFO = \angle OGA' = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOF + \angle A'OG = 180^\circ - \angle AOA' = 90^\circ, \angle AOF + \angle OAF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAF = \angle A'OG, \therefore \triangle AFO \cong \triangle OGA' (\text{AAS}), \therefore AF = OG = 4, OF = A'G = 3, \therefore A'(4, 3),$$

过 A' 作 $A'H \perp AF$ 于点 H ， $A'H = 4 - (-3) = 7$ ， $AH = 4 - 3 = 1$ ，

$$\text{在 Rt}\triangle AHA' \text{ 中， } AA' = \sqrt{(AH)^2 + (A'H)^2} = \sqrt{1^2 + 7^2} = 5\sqrt{2},$$

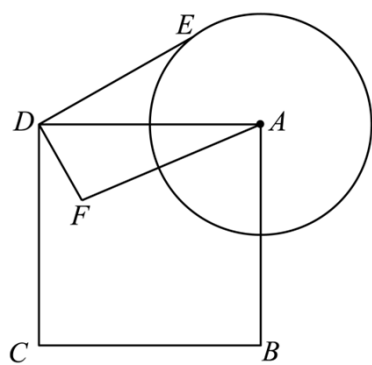
点 B 是 $\odot A$ 上一点，则点 C 是 $\odot A'$ 上一点， $A'C = 2$ ，

当点 A, O, A' 三点共线，即点 C 在 AA' 上时， AC 最小，

$$\therefore AC = AA' - CA' = 5\sqrt{2} - 2, \text{ 故线段 } AC \text{ 的最小值为 } 5\sqrt{2} - 2. \text{ 故选：A.}$$

【点睛】本题考查了圆的基本概念，动点问题，勾股定理，全等三角形的判定和性质，本题的关键是作出正确的辅助线，运用数形结合的思想方法。

例 5. (2024·江苏南通·校考模拟预测) 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2，以点 A 为圆心，1 为半径作圆， E 是 $\odot A$ 上的任意一点，将线段 DE 绕点 D 顺时针方向旋转 90° 并缩短到原来的一半，得到线段 DF ，连结 AF ，则 AF 的最小值是_____.



【答案】 $\sqrt{5} - \frac{1}{2}$

【分析】通过证 $\triangle GDF \sim \triangle ADE$ 可得 $GF = \frac{1}{2}$ ，由勾股定理可得 $AG = \sqrt{AD^2 + DG^2} = \sqrt{5}$ ，根据三角形三边关系求 AF 的最小值即可；

【详解】解：如图，取 CD 中点 G ，连接 AE 、 GF 、 AG ，

$\because ED \perp DF, \therefore \angle EDF = 90^\circ, \because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形, $\therefore \angle GDA = 90^\circ,$

$\therefore \angle GDF + \angle FDA = 90^\circ, \angle FDA + \angle ADE = 90^\circ, \therefore \angle GDF = \angle ADE,$

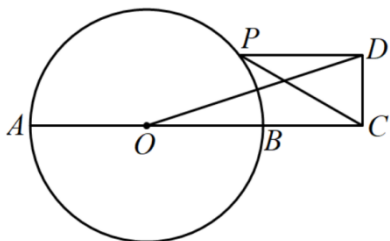
$$\therefore \frac{DG}{DA} = \frac{DF}{DE} = \frac{1}{2}, \therefore \triangle GDF \sim \triangle ADE, \therefore \frac{GF}{AE} = \frac{1}{2},$$

又 $AE = 1$, 解得 $GF = \frac{1}{2}$, 由勾股定理可得, $AG = \sqrt{AD^2 + DG^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$

由三边的关系可得, AF 的最小值为: $AG - GF = \sqrt{5} - \frac{1}{2}$; 故答案为: $\sqrt{5} - \frac{1}{2}.$

【点睛】本题主要考查了相似三角形的判定与性质, 勾股定理, 三角形三边关系, 掌握相似三角形的判定与性质, 勾股定理, 三角形三边关系是解题的关键.

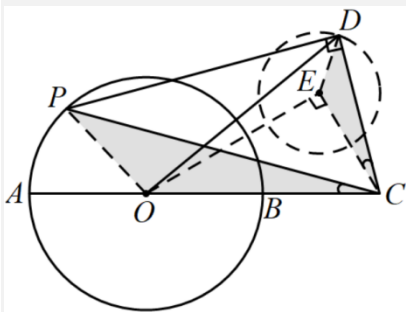
例 6. (2023·四川广元·统考一模) 如图, 线段 AB 为 $\odot O$ 的直径, 点 C 在 AB 的延长线上, $AB = 4$, $BC = 2$, 点 P 是 $\odot O$ 上一动点, 连接 CP , 以 CP 为斜边在 PC 的上方作 $Rt\triangle PCD$, 且使 $\angle DCP = 60^\circ$, 连接 OD , 则 OD 长的最大值为__.



【答案】 $2\sqrt{3} + 1$

【分析】作 $\triangle COE$, 使得 $\angle CEO = 90^\circ, \angle ECO = 60^\circ$, 则 $CO = 2CE, OE = 2\sqrt{3}, \angle OCP = \angle ECD$, 由 $\triangle COP \sim \triangle CED$, 推出 $\frac{OP}{ED} = \frac{CP}{CD} = 2$, 即 $ED = \frac{1}{2}OP = 1$ (定长), 由点 E 是定点, DE 是定长, 点 D 在半径为 1 的 $\odot E$ 上, 由此即可解决问题.

【详解】解: 如图, 作 $\triangle COE$, 使得 $\angle CEO = 90^\circ, \angle ECO = 60^\circ$, 则 $CO = 2CE, OE = 2\sqrt{3}, \angle OCP = \angle ECD$,



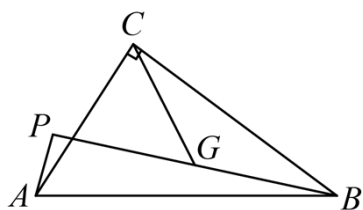
$$\because \angle CDP = 90^\circ, \angle DCP = 60^\circ, \therefore CP = 2CD, \therefore \frac{CO}{CE} = \frac{CP}{CD} = 2, \therefore \triangle COP \sim \triangle CED,$$

$\therefore \frac{OP}{ED} = \frac{CP}{CD} = 2$ ，即 $ED = \frac{1}{2}OP = 1$ （定长），Q 点 E 是定点，DE 是定长， $\therefore$ 点 D 在半径为 1 的 $\odot E$ 上，

$QOD \leq OE + DE = 2\sqrt{3} + 1$ ， $\therefore OD$ 的最大值为 $2\sqrt{3} + 1$ ，故答案为： $2\sqrt{3} + 1$ 。

【点睛】本题考查了相似三角形的判定和性质、两圆的位置关系、轨迹等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造相似三角形解决问题，属于中考压轴题。

例 7. （23-24 九年级上·安徽合肥·期末）如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，平面上有一点 P， $AP = 1$ ，连接 AP，BP，取 BP 的中点 G. 连接 CG，在 AP 绕点 A 的旋转过程中，则 CG 的最大值是（ ）



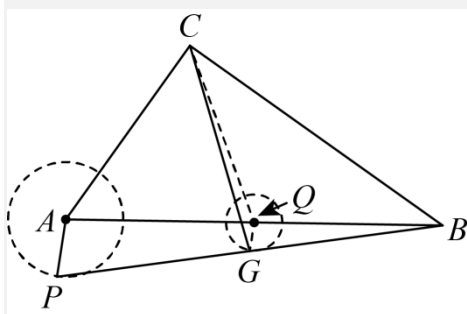
- A. 3 B. 4 C. $3\sqrt{2}$ D. 5

【答案】A

【分析】本题考查的是三角形的中位线的性质，直角三角形斜边上的中线的性质，勾股定理的应用，圆的确定，作出合适的辅助线是解本题的关键；如图，取 AB 的中点 Q，连接 GQ，CQ，证明 G 在以 Q 为圆心， $\frac{1}{2}$ 为半径的圆上，即可得到答案。

【详解】解：如图，取 AB 的中点 Q，连接 GQ，CQ，

$\because G$ 为 BP 的中点， $AP = 1$ ， $\therefore QG = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}$ ， $\therefore G$ 在以 Q 为圆心， $\frac{1}{2}$ 为半径的圆上，



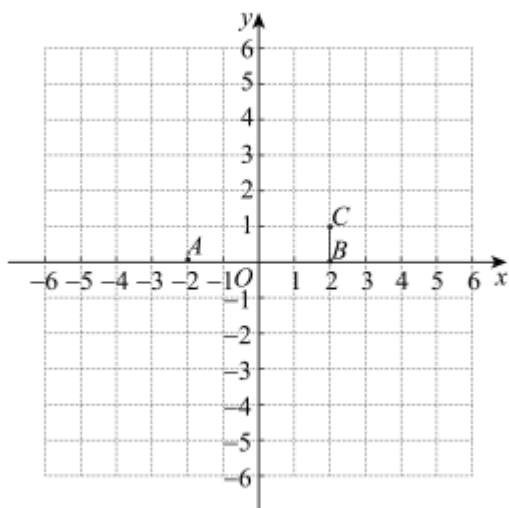
当 C，Q，G 三点共线时，CG 最大， $CG = CQ + QG$ ，

$\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ， $\therefore AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ， $\therefore CQ = \frac{5}{2}$ ，

$\therefore CG = CQ + QG = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$ ，即 CG 的最大值为 3. 故选 A

例 8. （2024·北京海淀·一模）在平面直角坐标系 xOy 中，对于图形 M 与图形 N 给出如下定义：P 为图形 N 上任意一点，将图形 M 绕点 P 顺时针旋转 90° 得到 M' ，将所有 M' 组成的图形记作 M' ，称 M' 是图形 M

关于图形 N 的“关联图形”. (1) 已知 $A(-2,0)$, $B(2,0)$, $C(2,t)$, 其中 $t \neq 0$. ① 若 $t=1$, 请在图中画出点 A 关于线段 BC 的“关联图形”; ② 若点 A 关于线段 BC 的“关联图形”与坐标轴有公共点, 直接写出 t 的取值范围;
(2) 对于平面上一条长度为 a 的线段和一个半径为 r 的圆, 点 S 在线段关于圆的“关联图形”上, 记点 S 的纵坐标的最大值和最小值的差为 d , 当这条线段和圆的位置变化时, 直接写出 d 的取值范围 (用含 a 和 r 的式子表示).

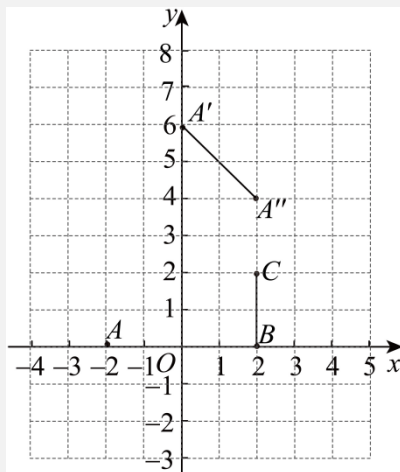
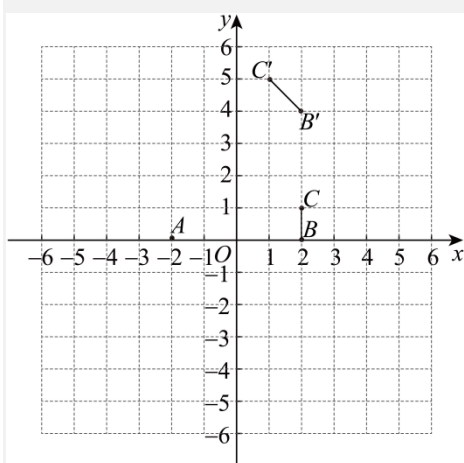


【答案】(1)①见详解; ② $t \leq -4$ 或 $t \geq 2$ (2) $2\sqrt{2}r \leq d \leq 2\sqrt{2}r + a$

【分析】(1) ① 根据新定义找出关键点 B 、 C 的旋转 90° 后连接 $B'C'$ 即可; ② 同上理分情况讨论即可;

(2) 画出分析图, 如图所示, 线段 AB 的长度为 a , 圆 N 的半径为 r , 易得 $\triangle BNP \sim \triangle BNQ$ 且相似比为 $1:\sqrt{2}$, 再移动图形即可求出 d ; 本题考查了旋转的性质, 圆的有关性质, 相似三角形的判定与性质, 熟练掌握以上知识的应用是解题的关键.

【详解】(1) 解: ① 如图所示: 线段 $B'C'$ 即为所求;



② 如图: 当 $t=2$ 时, 点 A 关于线段 BC 的“关联图形”与 y 轴恰有公共点,

$\therefore t \geq 2$ 时, 点 A 关于线段 BC 的“关联图形”与 y 轴有公共点;

当 $t = -4$ 时，点 A 关于线段 BC 的“关联图形”与 x 轴恰有公共点，

$\therefore t \leq -4$ 时，点 A 关于线段 BC 的“关联图形”与 x 轴有公共点；

综上所述： $t \leq -4$ 或 $t \geq 2$ ；

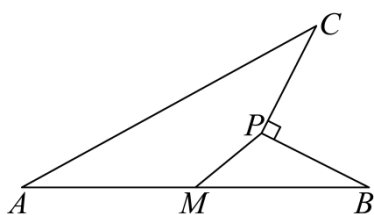
(2) 如图，画出分析图，如图所示，线段 AB 的长度为 a ，圆 N 的半径为 r ，

点 A、B 分别绕点 N 顺时针旋转 90° 得到 N_1, N_2 ，分析可知 $\triangle BNP \sim \triangle BN_1Q$ 且相似比为 $1:\sqrt{2}$ ，

可得圆 N_1, N_2 的半径均为 $\sqrt{2}r$ ，随意转动图，可得 $2\sqrt{2}r \leq d \leq 2\sqrt{2}r + a$ 。

习题练模型

1. (2024·安徽淮北·三模) 如图，线段 $AB = 4$ ，点 M 为 AB 的中点，动点 P 到点 M 的距离是 1，连接 PB，线段 PB 绕点 P 逆时针旋转 90° 得到线段 PC，连接 AC，则线段 AC 长度的最大值是 ()

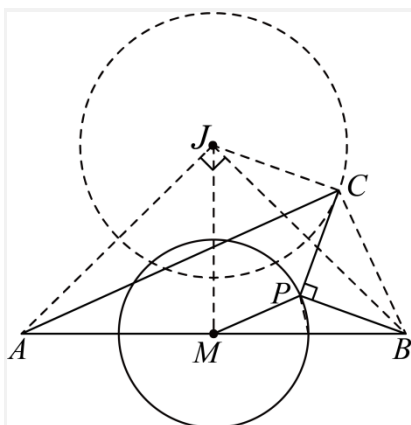


- A. 3 B. 4 C. $2\sqrt{2}$ D. $3\sqrt{2}$

【答案】D

【分析】以 AB 为斜边向上作等腰直角 $\triangle AJB$ ，连接 CJ，BC。利用相似三角形的性质证明 $JC = \sqrt{2}$ ，推出点 C 的运动轨迹是以 J 为圆心， $\sqrt{2}$ 为半径的圆，根据 $AC \leq AJ + JC = 3\sqrt{2}$ ，可得结论。

【详解】解：以 AB 为斜边向上作等腰直角 $\triangle AJB$ ，连接 CJ，BC。



Q $AM = BM$, $\therefore JM = AM = MB$, $\therefore \triangle JMB$ 是等腰直角三角形, $\triangle PBC$ 是等腰直角三角形,

$\therefore \angle MBJ = \angle PBC = 45^\circ \therefore BJ = \frac{BM}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}BM$, 同理 $BC = \sqrt{2}PB$, $\therefore \angle MBP = \angle JBC$, $\frac{JB}{MB} = \frac{BC}{BP}$,

$\therefore \triangle JBC \sim \triangle MBP$, $\therefore \frac{JC}{PM} = \frac{JB}{BM} = \sqrt{2}$, Q $PM = 1$, $\therefore JC = \sqrt{2}$,

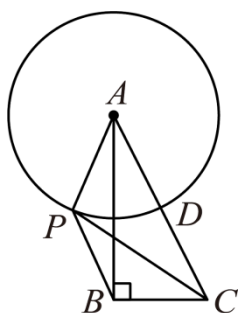
$\therefore$ 点 C 的运动轨迹是以 J 为圆心, $\sqrt{2}$ 为半径的圆,

Q $AJ = \frac{\sqrt{2}}{2}AB = 2\sqrt{2}$, $\therefore AC \leq AJ + JC = 3\sqrt{2}$, 故线段 AC 长度的最大值为 $3\sqrt{2}$. 故选: D.

【点睛】本题主要考查的是旋转的性质、相似三角形的性质和判定, 解直角三角形, 点与圆的位置关系, 三角形三边关系, 解题的关键是学会添加常用辅助线, 构造相似三角形解决问题, 属于中考选择题中的压轴题.

2. (2023·浙江宁波·模拟预测) 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $\tan \angle BAC = \frac{1}{2}$, 点 D 是 AB 的中点, P 是以

A 为圆心, 以 AD 为半径的圆上的动点, 连接 PB 、 PC , 则 $\frac{PB}{PC}$ 的最大值为 ()



A. $\frac{\sqrt{10}}{3}$

B. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

C. $\frac{\sqrt{13}-1}{4}$

D. $\frac{\sqrt{13}+1}{4}$

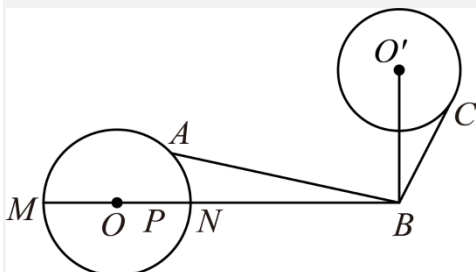
【答案】D

【分析】此题考查了解直角三角形, 根据阿氏圆的定义, 分别固定 BP , 分别确定 A 点的运动轨迹为阿氏圆 O , C 点的运动轨迹为阿氏圆 O' , , 由此可知, 当 PC 最小时, $\frac{PB}{PC}$ 的值最大, 进行求解即可.

【详解】解：固定 BP ，则 $\frac{BA}{AP}=2$ ， $\therefore A$ 点的运动轨迹为阿氏圆 O ，

设 $OP=a$ ，则 $AO=2a$ ， $BO=4a$ ，则 $PB=BO-OP=3a$ ，

$\because \angle ABC=90^\circ$ ， $\frac{AB}{BC}=2$ ， $\therefore C$ 点的运动轨迹为阿氏圆 O' ， $\therefore \angle OBO'=90^\circ$ ，

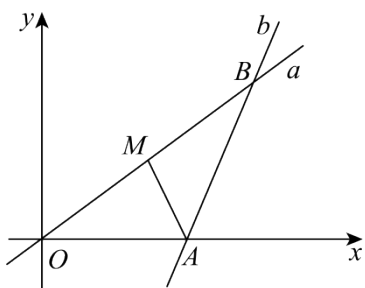


$\therefore O'B=2a$ ， $O'C=a$ ， $\therefore$ 当 PC 最小时， $\frac{PB}{PC}$ 的值最大，

$PO'=\sqrt{PB^2+OB^2}=\sqrt{(3a)^2+(2a)^2}=\sqrt{13}a$ ， $\therefore \frac{PB}{PC}=\frac{PB}{PO'-O'C}=\frac{3a}{\sqrt{13}a-a}=\frac{\sqrt{13}+1}{4}$ ，故选：D.

3. (2024·安徽合肥·模拟预测) 如图，分别经过原点 O 和点 $A(8,0)$ 的动直线 a ， b ，其夹角 $\angle OBA=30^\circ$ ，

点 M 是 OB 中点，连接 AM ，则 AM 的最小值是 ()



A. 4

B. $2\sqrt{3}+2$

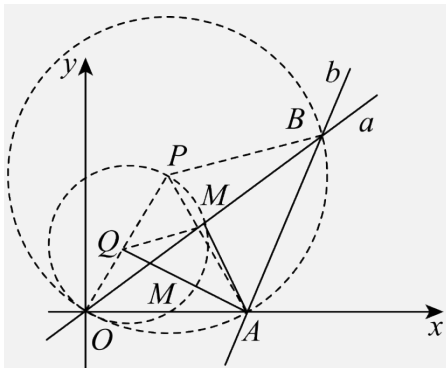
C. $4\sqrt{3}-4$

D. $4\sqrt{3}+4$

【答案】C

【分析】作 $\triangle AOB$ 的外接圆 $\odot P$ ，连接 OP ， PA ， PB ，取 OP 的中点 Q ，连接 QM ，证明 $\triangle OAP$ 是等边三角形，求出 $QM=\frac{1}{2}OB=4$ ，得到点 M 在以 Q 为圆心，4 为半径的圆上运动，画出 $\odot Q$ ，当 M 在 $\odot Q$ 与 QA 的交点时，连接 QA 交 $\odot Q$ 于 M ，此时 AM 有最小值，根据等边三角形的性质及勾股定理即可求解.

【详解】解：作 $\triangle AOB$ 的外接圆 $\odot P$ ，连接 OP ， PA ， PB ，取 OP 的中点 Q ，连接 QM ，



$\because \angle APO = 2\angle ABO = 60^\circ$, $PO = PA$, $\therefore \triangle OAP$ 是等边三角形, $\because A(8,0)$, $\therefore PO = PA = PB = 8$,

$\because OQ = QP$, $OM = MB$, $\therefore QM = \frac{1}{2}PB = 4$, $\therefore$ 点 M 在以 Q 为圆心, 4 为半径的圆上运动, 画出 $\odot Q$,

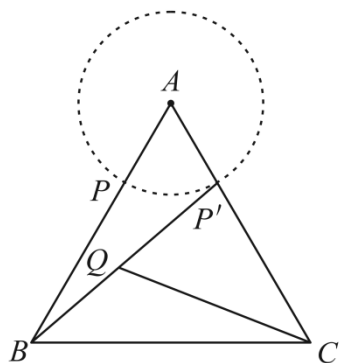
当 M 在 $\odot Q$ 与 QA 的交点时, 连接 QA 交 $\odot Q$ 于 M , 此时 AM 有最小值,

$\because \triangle OPA$ 是等边三角形, $OQ = PQ$, $\therefore AQ \perp OP$,

$\because OA = 8$, $OQ = 4$, $\therefore AQ = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$. $\therefore AM$ 的最小值是 $4\sqrt{3} - 4$, 故选: C.

【点睛】本题考查坐标与图形, 点到圆上的距离, 等边三角形的判定与性质, 勾股定理, 直角三角形的性质, 正确作出辅助线构造三角形外接圆是解题的关键.

4. (23-24 九年级上·江苏连云港·阶段练习) 等边 $\triangle ABC$ 的边长为 6, P 是 AB 上一点, $AP = 2$, 把 AP 绕点 A 旋转一周, P 点的对应点为 P' , 连接 BP' , BP' 的中点为 Q , 连接 CQ . 则 CQ 长度的最小值是 ()



A. $3\sqrt{3} - 1$

B. $3\sqrt{3} - 2$

C. $3\sqrt{3} + 1$

D. $3\sqrt{3} + 2$

【答案】A

【分析】本题考查了等边三角形的性质, 旋转的性质, 勾股定理, 三角形中位线的性质及三边关系, 取 AB 中点 D , 连接 DQ , CD , AP' , 利用等边三角形的性质和勾股定理求出 $CD = 3\sqrt{3}$, 根据三角形中位线定理得到 $DQ = 1$, 再利用三角形三边关系 $CQ \geq DC - DQ$ 即可求解, 正确作出辅助线是解题的关键.

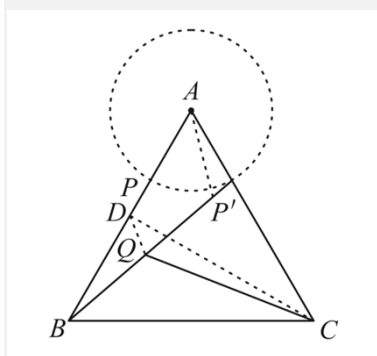
【详解】解: $\because AP = 2$, 把 AP 绕点 A 旋转一周, $\therefore AP' = 2$,

等边 $\triangle ABC$ 的边长为6，点 D 是 AB 中点， $\therefore BD = AD = 3$ ， $CD \perp AB$ ， $\therefore$

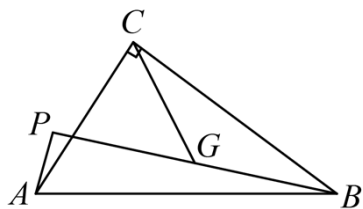
$$CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}，$$

$\because$ 点 Q 是 BP' 的中点， $\therefore BQ = QP'$ ，又 $\because AD = BD$ ， $\therefore DQ = \frac{1}{2}AP' = 1$ ，

在 $\triangle CDQ$ 中， $CQ \geq DC - DQ = 3\sqrt{3} - 1$ ， $\therefore CQ$ 的最小值为 $3\sqrt{3} - 1$ ，故选：A．



5. (23-24 九年级上·安徽合肥·期末) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，平面上有一点 P ， $AP = 1$ ，连接 AP ， BP ，取 BP 的中点 G ，连接 CG ，在 AP 绕点 A 的旋转过程中，则 CG 的最大值是 ()



A. 3

B. 4

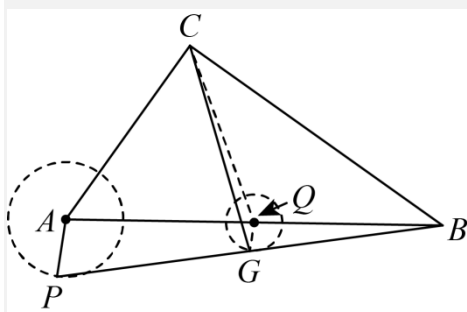
C. $3\sqrt{2}$

D. 5

【答案】A

【分析】 本题考查的是三角形的中位线的性质，直角三角形斜边上的中线的性质，勾股定理的应用，圆的确定，作出合适的辅助线是解本题的关键；如图，取 AB 的中点 Q ，连接 GQ ， CQ ，证明 G 在以 Q 为圆心， $\frac{1}{2}$ 为半径的圆上，即可得到答案．

【详解】 解：如图，取 AB 的中点 Q ，连接 GQ ， CQ ，



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/457112002133010046>