

中考数学一轮复习专题归纳训练—整式与因式分解【十大题型】（含解析）

【知识点 整式与因式分解】

1.定义

(1)代数式：用运算符号把数或表示数的字母连接而成的式子叫做代数式。单独的一个数或一个字母也是代数式。

(2)单项式：用数或字母的乘积表示的式子叫做单项式。单独的一个数或一个字母也是单项式。

单项式中的数字因数叫做这个单项式的系数。一个单项式中，所有字母的指数的和叫做这个单项式的次数。

注意：单项式是由系数、字母、字母的指数构成的，其中系数不能用带分数表示；一个单项式中，所有字母的指数的和叫做这个单项式的次数。

(3)多项式：几个单项式的和叫做多项式。其中，每个单项式叫做多项式的项，不含字母的项叫做常数项。多项式里，次数最高项的次数，叫做这个多项式的次数。

单项式与多项式统称整式。

(4)同类项：所含字母相同，并且相同字母的指数也相同的项叫做同类项。

(5)合并同类项：把多项式中的同类项合并成一项，叫做合并同类项。

合并同类项后，所得项的系数是合并前各同类项的系数的和，且字母连同它的指数不变。

2.整式的运算

(1)整式的加减：几个整式相加减，如有括号就先去括号，然后再合并同类项。

去括号法则：同号得正，异号得负。即括号外的因数的符号决定了括号内的符号是否改变：

如果括号外的因数是正数，去括号后原括号内各项的符号与原来的符号相同；

如果括号外的因数是负数，去括号后原括号内各项的符号与原来的符号相反。

(2)整式的乘除运算

①同底数幂的乘法： $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 。同底数幂相乘，底数不变，指数相加。

②幂的乘方： $(a^m)^n = a^{mn}$ 。幂的乘方，底数不变，指数相乘。

③积的乘方： $(ab)^n = a^n b^n$ 。积的乘方，等于把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘。

④单项式与单项式的乘法：单项式与单项式相乘，把它们的系数、同底数幂分别相乘，对于只在一个单项式里含有的字母，则连同它的指数作为积的一个因式。

⑤单项式与多项式的乘法： $p(a+b+c) = pa+pb+pc$ 。单项式与多项式相乘，就是用单项式去乘多项式的每一项，再把所得的积相加。

⑥多项式与多项式的乘法： $(a+b)(p+q) = ap+aq+bp+bq$ 。多项式与多项式相乘，先用一个多项式的每一项乘另一个多项式的每一项，再把所得的积相加。

平方差公式： $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 。两个数的和与这两个数的差的积，等于这两个数的平方差。这个公式叫做平方差公式。

完全平方公式： $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ， $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 。两个数的和(或差)的平方，等于它们的平方和，加上(或减去)它们积的 2 倍。这两个公式叫做完全平方公式。

⑦同底数幂的除法： $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 。同底数幂相除，底数不变，指数相减。

任何不等于 0 的数的 0 次幂都等于 1。

⑧单项式与单项式的除法：单项式相除，把系数与同底数幂分别相除作为商的因式，对于只在被除式里含有的字母，则连同它的指数作为商的一个因式。

⑨多项式除以单项式：多项式除以单项式，先把这个多项式的每一项除以这个单项式，再把所得的商相加。

注：以上公式及法则在分式和二次根式的运算中同样适用。

(3)添括号法则

同号得正，异号得负。即括号前的符号决定了括号内各项的符号是否改变：

如果括号前面是正号，括到括号里的各项都不变符号；

如果括号前面是负号，括到括号里的各项都改变符号。

3.因式分解

定义：把一个多项式化成了几个整式的积的形式，这样的式子变形叫做这个多项式的因式分解，也叫做把这个多项式分解因式。

以上公式都可以用来对多项式进行因式分解，因式分解的常用方法：

①提公因式法： $pa+pb+pc=p(a+b+c)$ ；

②公式法： $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ ； $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ ； $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ 。

③分组分解法： $ac+ad+bc+cd=a(c+d)+b(c+d)=(a+b)(c+d)$

④十字相乘法： $a^2+(p+q)a+pq=(a+p)(a+q)$

因式分解的一般步骤：

(1) 如果多项式的各项有公因式，那么先提取公因式。

(2) 在各项提出公因式以后或各项没有公因式的情况下，观察多项式的项数：2项式可以尝试运用公式法分解因式；3项式可以尝试运用公式法、十字相乘法分解因式；4项式及4项式以上的可以尝试分组分解法分解因式

(3) 分解因式必须分解到每一个因式都不能再分解为止。

【题型1 实际问题中的代数式】

【例1】（2023·湖南长沙·统考中考真题）为落实“双减”政策，某校利用课后服务开展了主题为“书香满校园”的读书活动。现需购买甲，乙两种读本共100本供学生阅读，其中甲种读本的单价为10元/本，乙种读本的单价为8元/本，设购买甲种读本 x 本，则购买乙种读本的费用为（ ）

- A. $8x$ 元 B. $10(100-x)$ 元 C. $8(100-x)$ 元 D. $(100-8x)$ 元

【答案】C

【分析】根据题意求得购买乙种读本 $(100 - x)$ 本，根据单价乘以数量即可求解.

【详解】解：设购买甲种读本 x 本，则购买乙种读本 $(100 - x)$ 本，乙种读本的单价为 8 元/本，则购买乙种读本的费用为 $8(100 - x)$ 元

故选 C

【点睛】本题考查了列代数式，理解题意是解题的关键.

【变式 1-1】（2023·吉林长春·统考中考真题）2023 长春马拉松于 5 月 21 日在南岭体育场鸣枪开跑，某同学参加了 7.5 公里健康跑项目，他从起点开始以平均每分钟 x 公里的速度跑了 10 分钟，此时他离健康跑终点的路程为_____公里。（用含 x 的代数式表示）

【答案】 $(7.5 - 10x)$

【分析】根据题意列出代数式即可.

【详解】根据题意可得，

他离健康跑终点的路程为 $(7.5 - 10x)$.

故答案为： $(7.5 - 10x)$.

【点睛】此题考查了列代数式，解题的关键是读懂题意.

【变式 1-2】（2023·四川德阳·统考中考真题）在初中数学文化节游园活动中，被称为“数学小王子”的王小明参加了“智取九宫格”游戏比赛，活动规则是：在九宫格中，除了已经填写的三个数之外的每一个方格中，填入一个数，使每一横行、每一竖列以及两条对角线上的 3 个数之和分别相等，且均为 m . 王小明抽取到的题目如图所示，他运用初中所学的数学知识，很快就完成了这个游戏，则 $m =$ _____.

16		
		7

4		
---	--	--

【答案】39

【分析】设第一列中间的数为 x ，则三个数之和为 $16 + 4 + x = 20 + x$ ，再一次把表格的每一个数据填好，从而可得答案。

【详解】解：如图，设第一列中间的数为 x ，则三个数之和为 $16 + 4 + x = 20 + x$ ，可得：

16	1	3 $+ x$
x	13	7
4	6 $+ x$	10

$$\therefore m = 16 + 13 + 10 = 39,$$

故答案为：39

【点睛】本题考查的是列代数式，整式的加减运算的应用，理解题意，设出合适的未知数是解本题的关键。

【变式 1-3】（2023·湖北宜昌·统考中考真题）从前，古希腊一位庄园主把一块边长为 a 米（ $a > 6$ ）的正方形土地租给租户张老汉。第二年，他对张老汉说：“我把这块地的一边增加 6 米，相邻的另一边减少 6 米，变成矩形土地继续租给你，租金不变，你也没有吃亏，你看如何？”如果这样，你觉得张老汉的租地面积会（ ）

- A. 没有变化 B. 变大了 C. 变小了 D. 无法确定

【答案】C

【分析】分别求出 2 次的面积，比较大小即可。

【详解】原来的土地面积为 a^2 平方米，第二年的面积为 $(a + 6)(a - 6) = a^2 - 36$

$$\therefore (a^2 - 36) - a^2 = -36 < 0$$

\therefore 所以面积变小了，

故选 C.

【点睛】 本题考查了列代数式，整式的运算，平方差公式，代数式大小的比较，正确理解题意列出代数式并计算是解题的关键.

【题型 2 求代数式的值】

【规律方法】

求代数式的一般方法：

(1) 已知字母或代数式的值，直接代入代数式求解。

(2) 已知几个字母之间的关系，将代数式配凑成关于那几个字母之间的关系的式子，再整体代换。

(3) 当字母的取值不明确时，需将字母的值化简或求解出来，再代入代数式解题。

【例 2】 (2023·江苏南通·统考中考真题) 若 $a^2 - 4a - 12 = 0$ ，则 $2a^2 - 8a - 8$ 的值为 ()

A. 24

B. 20

C. 18

D. 16

【答案】 D

【分析】 根据 $a^2 - 4a - 12 = 0$ 得到 $a^2 - 4a = 12$ ，再将整体代入 $2a^2 - 8a - 8$ 中求值.

【详解】 解： $a^2 - 4a - 12 = 0$ ，

得 $a^2 - 4a = 12$ ，

$2a^2 - 8a - 8$ 变形为 $2(a^2 - 4a) - 8$ ，

原式 = $2 \times 12 - 8 = 16$ 。

故选：D.

【点睛】 本题考查代数式求值，将 $2a^2 - 8a - 8$ 变形为 $2(a^2 - 4a) - 8$ 是解题的关键.

【变式 2-1】 (2023·四川乐山·统考中考真题) 若 m 、 n 满足 $3m - n - 4 = 0$ ，则 $8^m \div 2^n =$ _____.

【答案】16

【分析】先将已知 $3m - n - 4 = 0$ 变形为 $3m - n = 4$ ，再将 $8^m \div 2^n$ 变形为 2^{3m-n} ，然后整体代入即可。

【详解】解： $\because 3m - n - 4 = 0$

$$\therefore 3m - n = 4$$

$$\therefore 8^m \div 2^n = (2^3)^m \div 2^n = 2^{3m} \div 2^n = 2^{3m-n} = 2^4 = 16$$

故答案为：16.

【点睛】本题考查代数式值，幂的乘方和同底数幂除法，熟练掌握幂的乘方和同底数幂除法法则是解题的关键.

【变式 2-2】(2023·广东深圳·统考中考真题)已知实数 a, b ，满足 $a + b = 6, ab = 7$ ，则 $a^2b + ab^2$ 的值为_____.

【答案】42

【分析】首先提取公因式，将已知整体代入求出即可.

【详解】 $a^2b + ab^2$

$$= ab(a + b)$$

$$= 7 \times 6$$

$$= 42.$$

故答案为：42.

【点睛】此题考查了求代数式的值，提公因式法因式分解，整体思想的应用，解题的关键是掌握以上知识点.

【变式 2-3】(2023·山东·统考中考真题)已知实数 m 满足 $m^2 - m - 1 = 0$ ，则 $2m^3 - 3m^2 - m + 9 =$ _____.

【答案】8

【分析】由题意易得 $m^2 - m = 1$ ，然后整体代入求值即可.

【详解】解： $\because m^2 - m - 1 = 0$,

$$\therefore m^2 - m = 1,$$

$$\begin{aligned}
& \therefore 2m^3 - 3m^2 - m + 9 \\
& = 2m(m^2 - m) - m^2 - m + 9 \\
& = 2m - m^2 - m + 9 \\
& = m - m^2 + 9 \\
& = -(m^2 - m) + 9 \\
& = -1 + 9 \\
& = 8;
\end{aligned}$$

故答案为 8.

【点睛】 本题主要考查因式分解及整体思想，熟练掌握利用整体思维及因式分解求解整式的值.

【题型 3 整式的加减与幂的运算】

【例 3】 (2023·湖北襄阳·统考中考真题) 下列各式中，计算结果等于 a^2 的是 ()

- A. $a^2 \cdot a^3$ B. $a^5 \div a^3$ C. $a^2 + a^3$ D. $a^5 - a^0$

【答案】 B

【分析】 分别利用合并同类项法则以及同底数幂的乘法运算法则和幂的乘方运算法则分别计算即可.

【详解】 解： $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，故选项 A 不符合题意；

$a^5 \div a^3 = a^2$ ，故选项 B 符合题意；

$a^2 + a^3$ 无法合并同类项，故选项 C 不符合题意；

$a^5 - a^0 = a^5 - 1$ ，故选项 D 不符合题意.

故选 B.

【点睛】 本题主要考查合并同类项法则以及同底数幂的乘法运算法则和幂的乘方运算法则，熟练掌握运算法则是解题的关键.

【变式 3-1】 (2023·湖南永州·统考中考真题) 若 x, y 均为实数， $43^x = 2021$ ， $47^y = 2021$ ，则 $43^{xy} \cdot 47^{xy} =$

$$x+y; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 2021 1

【分析】 根据同底数幂乘法、积的乘方、幂的乘方等计算法则进行等量代换即可.

【详解】 解: $\because 43^x = 2021, 47^y = 2021$

$$\therefore (43^x)^y = 2021^y, (47^y)^x = 2021^x,$$

$$43^{xy} \cdot 47^{xy} = (43^x)^y \times (47^y)^x = 2021^y \times 2021^x = 2021^{x+y},$$

故答案为: 2021;

$$\therefore 43^{xy} \cdot 47^{xy} = (43 \times 47)^{xy} = 2021^{xy},$$

$$\text{即 } 2021^{xy} = 2021^{x+y},$$

$$\therefore xy = x + y,$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = 1,$$

故答案为: 1.

【点睛】 本题主要考查同底数幂乘法、积的乘方、幂的乘方等知识点, 熟练掌握以上知识点的运算法则是解决本题的关键.

【变式 3-2】 (2023·内蒙古包头·中考真题) 若一个多项式加上 $3xy + 2y^2 - 8$, 结果得 $2xy + 3y^2 - 5$, 则这个多项式为_____.

【答案】 $y^2 - xy + 3$

【分析】 设这个多项式为 A, 由题意得: $A + (3xy + 2y^2 - 8) = 2xy + 3y^2 - 5$, 求解即可.

【详解】 设这个多项式为 A, 由题意得: $A + (3xy + 2y^2 - 8) = 2xy + 3y^2 - 5$,

$$\therefore A = (2xy + 3y^2 - 5) - (3xy + 2y^2 - 8) = 2xy + 3y^2 - 5 - 3xy - 2y^2 + 8 = y^2 - xy + 3,$$

故答案为: $y^2 - xy + 3$.

【点睛】 本题考查了整式的加减, 准确理解题意, 列出方程是解题的关键.

【变式 3-3】（2023·辽宁沈阳·统考中考真题）当 $a + b = 3$ 时，代数式 $2(a + 2b) - (3a + 5b) + 5$ 的值为_____。

【答案】 2

【分析】 先将原式去括号，然后合并同类项可得 $-a - b + 5$ ，再把前两项提取 -1 ，然后把 $a + b = 3$ 的值代入可得结果。

【详解】 解： $2(a + 2b) - (3a + 5b) + 5$

$$= 2a + 4b - 3a - 5b + 5$$

$$= -a - b + 5$$

$$= -(a + b) + 5$$

当 $a + b = 3$ 时，原式 $= -3 + 5 = 2$ ，

故答案为：2。

【点睛】 此题主要是考查了整式的化简求值，能够熟练运用去括号法则，合并同类项法则化简是解题的关键。

【题型 4 整式的乘除】

【例 4】（2023·台湾·统考中考真题）计算 $(2x - 3)(3x + 4)$ 的结果，与下列哪一个式子相同？（ ）

A. $-7x + 4$

B. $-7x - 12$

C. $6x^2 - 12$

D. $6x^2 - x - 12$

【答案】 D

【分析】 由多项式乘法运算法则：两多项式相乘时，用一个多项式的各项去乘另一个多项式的每一项，再把所得的积相加，合并同类项后所得的式子就是它们的积。

【详解】 解：由多项式乘法运算法则得

$$(2x - 3)(3x + 4) = 6x^2 + 8x - 9x - 12 = 6x^2 - x - 12.$$

故选 D。

【点睛】 本题考查多项式乘法运算法则，牢记法则，不要漏项是解答本题的关键。

【变式 4-1】（2023·江苏·统考中考真题）计算 $(x+y)(x^2-xy+y^2)$ 。

【答案】 x^3+y^3

【分析】根据多项式乘以多项式的法则，可表示为 $(a+b)(m+n)=am+an+bm+bn$ ，计算即可。

【详解】解： $(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$$=x^3-x^2y+xy^2+x^2y-xy^2+y^3$$

$$=x^3+y^3.$$

【点睛】本题主要考查多项式乘以多项式的法则。注意不要漏项，漏字母，有同类项的合并同类项。

【变式 4-2】（2023·海南省直辖县级单位·统考一模）已知长方形的面积为 $18x^3y^4+9xy^2-27x^2y^2$ ，长为 $9xy$ ，

则宽为()

A. $2x^2y^3+y+3xy$

B. $2x^2y^2-2y+3xy$

C. $2x^2y^3+2y-3xy$

D. $2x^2y^3+y-3xy$

【答案】D

【分析】根据长方形的宽=长方形的面积÷长方形的长，结合多项式除以单项式法则计算即可。

【详解】由题意得：长方形的宽= $(18x^3y^4+9xy^2-27x^2y^2)÷9xy$

$$=9xy(2x^2y^3+y-3xy)÷9xy$$

$$=2x^2y^3+y-3xy$$

故选 D。

【点睛】本题考查多项式除以单项式的实际应用。掌握多项式除以单项式法则是解题关键。

【变式 4-3】（2023·江苏·统考中考真题）若 $(x+4)(x-2)=x^2+px+q$ ，则 p 、 q 的值是()

A. 2, -8

B. -2, -8

C. -2, 8

D. 2, 8

【答案】A

【分析】首先把 $(x+4)(x-2)$ 根据多项式乘法法则展开，然后根据多项式的各项系数即可确定 p 、 q 的值。

【详解】解：∵ $(x+4)(x-2) = x^2 + 2x - 8$,

而 $(x+4)(x-2) = x^2 + px + q$,

∴ $p = 2, q = -8$.

故选：A.

【点睛】此题主要考查了多项式的乘法法则和多项式各项系数的定义，解题关键就是利用它们确定 p 、 q 的值.

【题型5 乘法公式的应用】

【例5】(2023·四川泸州·统考中考真题)若一个菱形的两条对角线长分别是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 10x + m = 0$ 的两个实数根，且其面积为11，则该菱形的边长为()

A. $\sqrt{3}$

B. $2\sqrt{3}$

C. $\sqrt{14}$

D. $2\sqrt{14}$

【答案】C

【分析】根据一元二次方程根与系数的关系，得到 $a + b = 10$ ，根据菱形的面积得到 $ab = 22$ ，利用勾股定理以及完全平方公式计算可得答案.

【详解】解：设方程 $x^2 - 10x + m = 0$ 的两根分别为 a, b ,

∴ $a + b = 10$,

∵ a, b 分别是一个菱形的两条对角线长，已知菱形的面积为11，

∴ $\frac{1}{2}ab = 11$ ，即 $ab = 22$,

∵菱形对角线垂直且互相平分，

∴该菱形的边长为 $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2 - 2ab}$
 $= \frac{1}{2}\sqrt{10^2 - 2 \times 22} = \sqrt{14}$ ，故C正确.

故选：C.

【点睛】本题考查了根与系数的关系以及菱形的性质，完全平方公式，利用根与系数的关系得出 $a + b = 10$

是解题的关键.

【变式 5-1】(2023·湖南·统考中考真题) 已知 $y^2 - my + 1$ 是完全平方式, 则 m 的值是_____.

【答案】 ± 2

【分析】根据 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, 计算求解即可.

【详解】解: $\because y^2 - my + 1$ 是完全平方式,

$$\therefore -m = \pm 2,$$

解得 $m = \pm 2$,

故答案为: ± 2 .

【点睛】本题考查了完全平方公式, 解题的关键在于熟练掌握: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

【变式 5-2】(2023·江苏宿迁·统考中考真题) 若实数 m 满足 $(m - 2023)^2 + (2024 - m)^2 = 2025$, 则 $(m - 2023)(2024 - m) =$ _____.

【答案】 -1012

【分析】根据完全平方公式得 $2(m - 2023)(2024 - m) = [(m - 2023) + (2024 - m)]^2 - [(m - 2023)^2 + (2024 - m)^2]$, 再代值计算即可.

【详解】解: $\because (m - 2023)^2 + (2024 - m)^2 = 2025$

$$\therefore 2(m - 2023)(2024 - m) = [(m - 2023) + (2024 - m)]^2 - [(m - 2023)^2 + (2024 - m)^2]$$

$$= 1 - 2025$$

$$= -2024$$

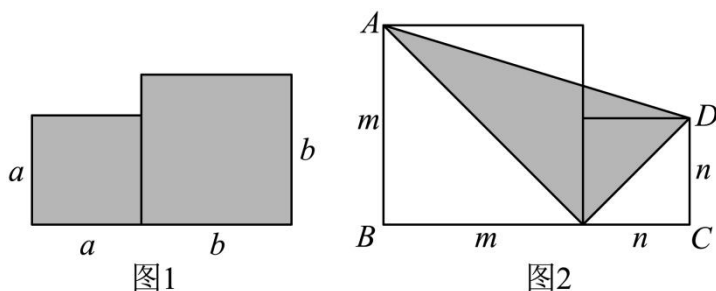
$$\therefore (m - 2023)(2024 - m) = -1012$$

故答案为: -1012 .

【点睛】本题考查完全平方公式的应用, 求代数式值, 掌握完全平方公式 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ 及其变式是解题本题的关键.

【变式 5-3】（2023·浙江·统考中考真题）如图，分别以 a, b, m, n 为边长作正方形，已知 $m > n$ 且满足

$$am - bn = 2, \quad an + bm = 4.$$



(1) 若 $a = 3, b = 4$ ，则图 1 阴影部分的面积是_____；

(2) 若图 1 阴影部分的面积为 3，图 2 四边形 $ABCD$ 的面积为 5，则图 2 阴影部分的面积是_____.

【答案】 25 $\frac{5}{3}$

【分析】 (1) 根据正方形的面积公式进行计算即可求解；

(2) 根据题意，解方程组得出 $\begin{cases} m = \frac{2a+4b}{3} \\ n = \frac{4a-2b}{3} \end{cases}$ ，根据题意得出 $m + n = \sqrt{10}$ ，进而得出 $\begin{cases} a = \frac{9\sqrt{10}-\sqrt{30}}{20} \\ b = \frac{3\sqrt{10}+3\sqrt{30}}{20} \end{cases}$ ，根据图

2 阴影部分的面积为 mn ，代入进行计算即可求解.

【详解】解： (1) $a = 3, b = 4$ ，图 1 阴影部分的面积是 $a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ ，

故答案为：25.

(2) \because 图 1 阴影部分的面积为 3，图 2 四边形 $ABCD$ 的面积为 5，

$$\therefore a^2 + b^2 = 3, \quad \frac{1}{2}(m+n)(m+n) = 5, \quad \text{即 } (m+n)^2 = 10$$

$$\therefore m+n = \sqrt{10} \quad (\text{负值舍去})$$

$$\therefore am - bn = 2, \quad an + bm = 4.$$

$$\text{解得：} \begin{cases} m = \frac{2a+4b}{3} \\ n = \frac{4a-2b}{3} \end{cases}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 3 \text{ ①}$$

$$\therefore \begin{cases} m = \frac{2a+4b}{3} \\ n = \frac{4a-2b}{3} \end{cases}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/457113125014006166>