

2023-2024 学年人教版八年级数学下学期期末模拟试卷 01

满分：120 分 测试范围：八下全部内容

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 若二次根式 $\sqrt{x-3}$ 有意义，则 x 的取值范围是()

- A. $x > 3$ B. $x \geq 3$ C. $x < 3$ D. $x \leq 3$

【分析】二次根式的被开方数 $x-3 \geq 0$.

【解答】解：根据题意，得

$$x-3 \geq 0,$$

解得 $x \geq 3$;

故选：B.

【点评】本题考查了二次根式的意义和性质. 概念：式子 $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$) 叫二次根式. 性质：二次根式中的被开方数必须是非负数，否则二次根式无意义.

2. 下列根式是最简二次根式的是()

- A. $-\sqrt{3}$ B. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ C. $\sqrt{0.5}$ D. $\sqrt{8}$

【分析】当二次根式满足：①被开方数不含开的尽方的数或式；②根号内面没有分母. 即为最简二次根式，由此即可求解.

【解答】解：A 选项： $-\sqrt{3}$ ，是最简二次根式，故该选项符合题意；

B 选项： $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，不是最简二次根式，故该选项不符合题意；

C 选项： $\sqrt{0.5} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，不是最简二次根式，故该选项不符合题意；

D 选项： $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ，不是最简二次根式，故该选项不符合题意.

故选：A.

【点评】本题考查了最简二次根式，掌握最简二次根式的定义是关键.

3. 下列计算正确的是()

- A. $\sqrt{2} + \sqrt{9} = \sqrt{11}$ B. $3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{5} \div \sqrt{10} = 2\sqrt{5}$ D. $\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

【分析】根据二次根式的加减法法则以及二次根式的乘除法法则逐项分析即可.

【解答】解：A. $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{9}=3$ 不是同类二次根式，不能合并，不正确，故不符合题意；

B. $3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ ，原计算正确，故符合题意；

C. $2\sqrt{5}\div\sqrt{10}=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ ，原计算不正确，故不符合题意；

D. $\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=1$ ，原计算不正确，故不符合题意；

故选：B.

【点评】本题考查了二次根式的加减法，以及二次根式的乘除法运算，熟练掌握运算法则是解答本题的关键.

4. 若点 $A(4,a)$ 是直线 $y=3x+1$ 上一点，则 a 的值是()

A. 1

B. 8

C. 12

D. 13

【分析】将点 $A(4,a)$ 坐标代入直线解析式即可求出.

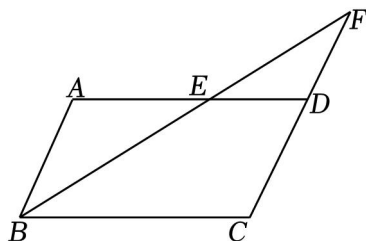
【解答】解：将 $A(4,a)$ 代入解析式 $y=3x+1$ ，

$$a=3\times 4+1=13,$$

故选：D.

【点评】此题主要考查了一次函数图象上点的坐标特征，掌握一次函数的性质是关键.

5. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AB=3$ ， $AD=5$ ， $\angle ABC$ 的平分线交 AD 于 E ，交 CD 的延长线于点 F ，则 $DF=()$



A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

【分析】根据平行四边形的性质得到 $AB\parallel CD$ ， $AD\parallel BC$ ，结合角平分线的性质推出 $\angle AEB=\angle ABE=\angle F=\angle DEF$ ，得到 $AE=AB=3$ ，即可求出 $DE=DF=AD-AE=5-3=2$.

【解答】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB\parallel CD$ ， $AD\parallel BC$ ，

$\therefore \angle ABF=\angle F$ ， $\angle AEB=\angle CBE$ ，

$\therefore BE$ 平分 $\angle ABC$ ，

$\therefore \angle ABE=\angle CBE$ ，

$\therefore \angle AEB=\angle ABE=\angle F=\angle DEF$ ，

$$\therefore AE = AB = 3,$$

$$\therefore DF = DE = AD - AE = 5 - 3 = 2,$$

故选：C．

【点评】此题考查了平行四边形的性质，角平分线的计算，熟练掌握平行四边形的性质是解题的关键．

6. 对某小区 20 户家庭某月的节约用水情况进行分组统计，结果如右表所示．这 20 户家庭该月节约用水量的平均数是()

节约用水量 x/t	$0.5 \leq x < 1.5$	$1.5 \leq x < 2.5$	$2.5 \leq x < 3.5$	$3.5 \leq x < 4.5$
户数	6	4	8	2

A. $1.8t$

B. $2.3t$

C. $2.5t$

D. $3t$

【分析】根据加权平均数的定义列式计算可得．

【解答】解：由上表可知，这 20 户家庭该月节约用水量的平均数是 $\frac{1 \times 6 + 2 \times 4 + 3 \times 8 + 4 \times 2}{20} = 2.3(t)$ ，

故选：B．

【点评】此题考查了加权平均数，掌握加权平均数的计算公式是解题的关键，属于基础题．

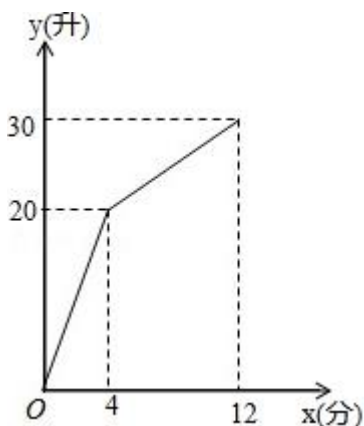
7. 一个装有进水管和出水管的容器，从某时刻开始的 4 分钟内只进水不出水，在随后的 8 分钟内既进水又出水，接着关闭进水管直到容器内的水放完．假设每分钟的进水量和出水量是两个常数，容器内的水量 y （单位：升）与时间 x （单位：分）之间的部分关系如图所示．下列四种说法：其中正确的个数是()

①每分钟的进水量为 5 升．

②每分钟的出水量为 3.75 升．

③从计时开始 8 分钟时，容器内的水量为 25 升．

④容器从进水开始到水全部放完的时间是 20 分钟．



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【分析】根据题意和函数图象中的数据，可以计算出各个小题中的结论是否正确，从而可以解答本题．

【解答】解：由图象可得，

每分钟的进水量为 $20 \div 4 = 5(L)$ ，故①正确；

每分钟的出水量为 $5 - (30 - 20) \div (12 - 4) = 3.75(L)$ ，故②正确；

从计时开始 8 分钟时，容器内的水量为： $20 + (8 - 4) \times (5 - 3.75) = 25(L)$ ，故③正确；

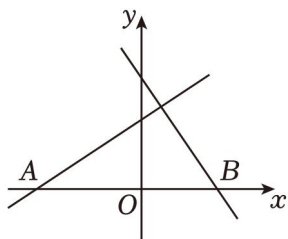
容器从进水开始到水全部放完的时间是： $12 + 30 \div 3.75 = 20$ （分钟），故④正确；

故选：D．

【点评】本题考查一次函数的应用，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答．

8. 如图，直线 $y = \frac{2}{3}x + b$ 和 $y = kx + 3$ 分别与 x 轴交于点 $A(-3, 0)$ ，点 $B(2, 0)$ ，则不等式组 $\begin{cases} \frac{2}{3}x + b < 0 \\ kx + 3 > 0 \end{cases}$ 的解

集为()



A. $x > 2$

B. $x < -3$

C. $x < -3$ 或 $x > 2$

D. $-3 < x < 2$

【分析】把 $A(-3, 0)$ ，点 $B(2, 0)$ 代入不等式组，依据图象直接得出答案即可．

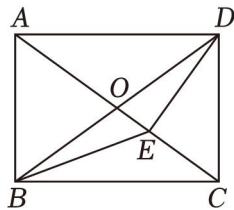
【解答】解： $\because$ 直线 $y = \frac{2}{3}x + b$ 和 $y = kx + 3$ 分别与 x 轴交于点 $A(-3, 0)$ ，点 $B(2, 0)$ ，

$$\therefore \begin{cases} \frac{2}{3}x + b < 0 \\ kx + 3 > 0 \end{cases} \text{ 的解集为 } x < -3,$$

故选：B．

【点评】本题考查了一次函数与一元一次不等式的知识，解题的关键是根据两条直线与 x 轴的交点坐标及直线的位置确定不等式组的解集．

9. 如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC ， BD 相交于点 O ，点 E 是线段 AC 上一点，连接 EB ， ED ．若 $\triangle BED$ 的面积等于 $\triangle BEC$ 的面积，则 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDE$ 的 E 面积比等于()



A. 2:1

B. 3:1

C. 3:2

D. 9:4

【分析】作 $DM \perp AC$ 于 M ， $BN \perp AC$ 于 N ，由矩形的性质推出 $\triangle ANB \cong \triangle CMD(AAS)$ ，得到 $BN = DM$ ，

由三角形面积公式得到 $\triangle BOE$ 的面积 = $\triangle DOE$ 的面积,

由 $\triangle BED$ 的面积等于 $\triangle BEC$ 的面积, 推出 $\triangle BOC$ 的面积 = $\triangle BOE$ 的面积 $\times 3$, 由 $\triangle AOB$ 的面积 = $\triangle COB$ 的面积, 得到 $\triangle ABE$ 的面积 = $\triangle BOE$ 的面积 $\times 4$, 又 $\triangle DCE$ 的面积 = $\triangle BCE$ 的面积, 即可求出 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDE$ 的面积比.

【解答】解: 作 $DM \perp AC$ 于 M , $BN \perp AC$ 于 N ,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AB = CD$, $AB \parallel CD$, $AO = OC$,

$\therefore \angle BAN = \angle DCE$,

$\therefore \angle ANB = \angle DMC = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ANB \cong \triangle CMD (AAS)$,

$\therefore BN = DM$,

$\therefore \triangle BOE$ 的面积 = $\frac{1}{2}OE \cdot BN$, $\triangle DOE$ 的面积 = $\frac{1}{2}OE \cdot DM$,

$\therefore \triangle BOE$ 的面积 = $\triangle DOE$ 的面积,

$\therefore \triangle BED$ 的面积等于 $\triangle BEC$ 的面积,

$\therefore \triangle BEC$ 的面积 = $\triangle BOE$ 的面积 $\times 2$,

$\therefore \triangle BOC$ 的面积 = $\triangle BOE$ 的面积 $\times 3$,

$\therefore AO = OC$,

$\therefore \triangle AOB$ 的面积 = $\triangle COB$ 的面积,

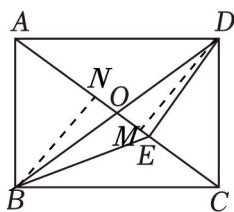
$\therefore \triangle ABE$ 的面积 = $\triangle BOE$ 的面积 $\times 4$,

$\therefore \triangle BEC$ 的面积 = $\frac{1}{2}CE \cdot BN$, $\triangle DCE$ 的面积 = $\frac{1}{2}CE \cdot DM$,

$\therefore \triangle DCE$ 的面积 = $\triangle BCE$ 的面积,

$\therefore \triangle ABE$ 和 $\triangle CDE$ 的面积比 = $(\triangle BOE \text{ 的面积} \times 4) : (\triangle BOE \text{ 的面积} \times 2) = 2 : 1$.

故选: A.



【点评】 本题考查矩形的性质, 全等三角形的判定和性质, 三角形的面积, 关键是由三角形面积公式得到 $\triangle BOE$ 的面积 = $\triangle DOE$ 的面积, $\triangle DCE$ 的面积 = $\triangle BCE$ 的面积.

10. 已知一次函数 $y = kx + 3k - 2$ ($k \neq 0$, k 是常数), 则下列结论正确的是 ()

A. 若点 $A(2, 8)$ 在一次函数 $y = kx + 3k - 2$ 的图象上, 则它的图象与两个坐标轴围成的三角形面积是 2

B. 若 $3k-2>0$ ，则一次函数 $y=kx+3k-2$ 图象上任意两点 $E(a_1, b_1)$ 和 $F(a_2, b_2)$ 满足：

$$(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) < 0$$

C. 一次函数 $y=kx+3k-2$ 的图象不一定经过第三象限

D. 若对于一次函数 $y=tx+7(t \neq 0)$ 和 $y=kx+3k-2$ ，无论 x 取任何实数，总有 $tx+7 > kx+3k-2$ ，则 k 的取值范围是 $0 < k < 3$ 或 $k < 0$

【分析】A、利用待定系数法求得解析式，即可求得与坐标轴的交点，从而求得图象与两个坐标轴围成的三角形面积，即可判断；

B、根据一次函数的性质即可判断；

C、求得一次函数 $y=kx+3k-2$ 的图象过定点 $(-3, -2)$ 即可判断；

D、由题意可知两直线平行，当 $k > 0$ 时，则 $3k-2 < 7$ ，当 $k < 0$ 时， $3k-2 < 7$ 一定成立，解不等式即可求得 k 的取值，即可判断。

【解答】解：A、 $\because A(2, 8)$ 在一次函数 $y=kx+3k-2$ 的图象上，

$$\therefore 8 = 2k + 3k - 2,$$

$$\therefore k = 2,$$

$$\therefore \text{一次函数为 } y = 2x + 4,$$

$$\therefore \text{它的图象与两个坐标轴的交点为 } (-2, 0), (0, 4),$$

$$\therefore \text{图象与两个坐标轴围成的三角形面积是 } \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4, \text{ 故 } A \text{ 错误, 不合题意;}$$

$$B、\because 3k-2 > 0,$$

$$\therefore k > \frac{2}{3},$$

$$\therefore y \text{ 随 } x \text{ 的增大而增大,}$$

$$\therefore (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) > 0, \text{ 故 } B \text{ 错误, 不合题意;}$$

$$C、\because y = kx + 3k - 2 = k(x + 3) - 2,$$

$$\therefore \text{一次函数 } y = kx + 3k - 2 \text{ 的图象过定点 } (-3, -2),$$

$$\therefore \text{一次函数 } y = kx + 3k - 2 \text{ 的图象一定经过第三象限, 故 } C \text{ 错误, 不合题意;}$$

$$D、\because \text{对于一次函数 } y = tx + 7 (t \neq 0) \text{ 和 } y = kx + 3k - 2, \text{ 无论 } x \text{ 取任何实数, 总有 } tx + 7 > kx + 3k - 2,$$

$$\therefore \text{直线 } y = tx + 7 \text{ 与直线 } y = kx + 3k - 2 \text{ 平行,}$$

$$\therefore \text{一次函数 } y = kx + 3k - 2 \text{ 的图象过定点 } (-3, -2),$$

$$\therefore \text{当 } k > 0 \text{ 时, } 3k - 2 < 7,$$

$$\text{解得 } 0 < k < 3,$$

当 $k < 0$ 时, $3k - 2 < 7$ 一定成立,

$\therefore k$ 的取值范围是 $0 < k < 3$ 或 $k < 0$, 故 D 正确, 符合题意.

故选: D .

【点评】本题考查了一次函数与不等式的相关知识, 是难点和易错点, 解答此题关键是熟知一次函数图象上点的坐标特征, 确定函数与系数之间的关系.

二、填空题 (本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 满分 24 分)

11. 已知函数 $y = (m-1)x^{m^2-1}$ 是一次函数, 则 $m = \underline{0}$.

【分析】根据一次函数的定义进行解答即可.

【解答】解: 根据一次函数 $y = kx + b$ 中 $k \neq 0$, 自变量次数是 1 得:

$$m-1 \neq 0,$$

$$\text{即 } m \neq 1, \text{ 且 } m^2 + 1 = 1,$$

$$\text{解得 } m = 0.$$

故答案为: 0.

【点评】本题考查了一次函数的定义, 掌握一次函数的定义是解答本题的关键.

12. 若一组数据: 1, 7, 8, a , 4 的平均数是 5, 中位数是 $\underline{5}$.

【分析】根据平均数的计算方法求出 a , 再根据中位数的定义进行计算即可.

【解答】解: $\because 1, 7, 8, a, 4$ 的平均数是 5,

$$\therefore a = 25 - 1 - 7 - 8 - 4 = 5,$$

因此这组数据为: 1, 7, 8, 5, 4,

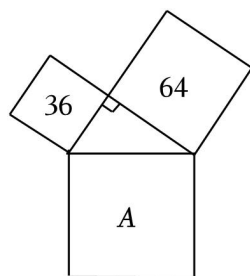
将这 5 个数据从小到大排列, 处在中间位置的一个数是 5,

所以中位数是 5,

故答案为: 5.

【点评】本题考查平均数、中位数, 掌握平均数的计算方法, 中位数的定义是正确解答的关键.

13. 如图, 数字代表所在正方形的面积, 则 A 所代表的正方形的边长为 $\underline{10}$.



【分析】三个正方形的边长正好构成直角三角形的三边, 根据勾股定理得到字母 A 所代表的正方形的面积

$$A = 36 + 64 = 100 .$$

【解答】解：由题意可知，直角三角形中，一条直角边的平方=36，一直角边的平方=64，
则斜边的平方=36+64=100，

∴边长为10

故答案为：10.

【点评】本题考查正方形的面积公式以及勾股定理．正确解题相关知识点是解题关键.

14. 某班将从甲、乙两位学生中选派一人参加学校的环保知识决赛，经过两轮测试，他们的平均成绩都是87分，方差分别是 $s_{\text{甲}}^2=1.56$ ， $s_{\text{乙}}^2=0.56$ ，你认为成绩更稳定的选手是 乙. （填“甲”或“乙”）

【分析】两组数据的平均数相同，则方差小的更稳定，据此即可判断.

【解答】解：甲、乙两人的平均成绩都是87分，

$$\because \text{方差 } s_{\text{甲}}^2=1.56, \quad s_{\text{乙}}^2=0.56,$$

$$0.56 < 1.56,$$

∴乙的成绩更稳定，

故答案为：乙.

【点评】本题考查了方差的意义，若两组数据的平均数相同，则方差小的更稳定，理解方差的意义是解题的关键.

15. 若 $m = \sqrt{2023} + 2$ ，则式子 $m^2 - 4m + 5$ 的值为 2024.

【分析】把代数式化为 $(m-2)^2 + 1$ 的形式，再把 m 的值代入进行计算即可.

【解答】解：∵ $m = \sqrt{2023} + 2$ ，

$$\therefore m^2 - 4m + 5$$

$$= (m-2)^2 + 1$$

$$= (\sqrt{2023} + 2 - 2)^2 + 1$$

$$= 2023 + 1$$

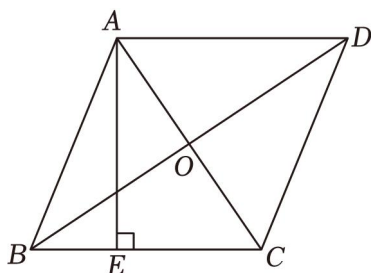
$$= 2024 .$$

故答案为：2024.

【点评】本题考查的是二次根式的化简求值，熟知二次根式混合运算的法则是解题的关键.

16. 如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，连接 AC ， BD 交于点 O ，过点 A 作 $AE \perp BC$ ，交 BC 于点 E ，若 $AC = 4$ ，

$BD=6$ ，则 BE 的长度为 $\frac{5\sqrt{13}}{13}$ 。



【分析】根据菱形的性质，利用勾股定理求得边长 AB ，等面积法求得 AE ，在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中，勾股定理即可求解。

【解答】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形， $AC=4$ ， $BD=6$ ，
 $\therefore AO=2$ ， $BO=3$ ， $AB=BC$ ， $AC \perp BD$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中， $AB = \sqrt{AO^2 + OB^2} = \sqrt{13}$ ，

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = AE \cdot BC，$$

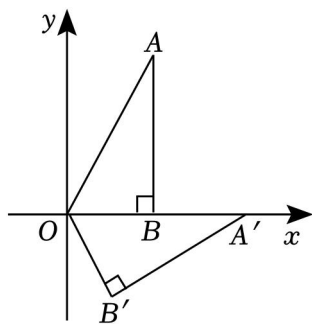
$$\therefore AE = \frac{\frac{1}{2} \times 4 \times 6}{\sqrt{13}} = \frac{12\sqrt{13}}{13}，$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ABE \text{ 中， } BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{13 - \frac{12^2}{13}} = \frac{5\sqrt{13}}{13}，$$

故答案为： $\frac{5\sqrt{13}}{13}$ 。

【点评】本题考查了菱形的性质，勾股定理，掌握菱形的性质是解题的关键。

17. 如图，含 30° 角的直角三角形纸片 AOB 在平面直角坐标系中放置，将该纸片绕着原点 O 按顺时针方向旋转 60° 得到 $\triangle A'OB'$ ，连结 AA' ， BB' ， M ， N 分别为 AA' ， BB' 的中点，若 $OB=2$ ，则直线 MN 与 y 轴的交点坐标为 $(0, -2\sqrt{3})$ 。



【分析】通过解直角三角形，可求出 OA ， AB 的长，进而可得出点 A 的坐标，结合旋转的性质，可得出点 A' 的坐标及 $\triangle OBB'$ 为等边三角形，由点 M 为线段 AA' 的中点，可求出点 M 的坐标，过点 B' 作 $B'D \perp x$ 轴于

点 D ，利用勾股定理，可求出 $B'D$ 的长度，进而可得出点 B' 的坐标，由点 N 为线段 BB' 的中点，可求出点 N 的坐标，利用待定系数法，可求出直线 MN 的函数解析式，再利用一次函数图象上点的坐标特征，即可求出直线 MN 与 y 轴的交点坐标。

【解答】解：在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中， $\angle OAB = 30^\circ$ ， $\angle OBA = 90^\circ$ ， $OB = 2$ ，

$\therefore OA = 2OB = 2 \times 2 = 4$ ，点 B 的坐标为 $(2, 0)$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}，$$

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(2, 2\sqrt{3})$ 。

由旋转的性质可知： $OA' = OA = 4$ ， $OB' = OB = 2$ ， $\angle A'OB' = 60^\circ$ ，

$\therefore$ 点 A' 的坐标为 $(4, 0)$ ， $\triangle OBB'$ 为等边三角形。

$\therefore$ 点 M 为线段 AA' 的中点，

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(3, \sqrt{3})$ 。

过点 B' 作 $B'D \perp x$ 轴于点 D ，如图所示，

$\therefore \triangle OBB'$ 为等边三角形，

$$\therefore OD = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2} \times 2 = 1，$$

$$\therefore B'D = \sqrt{OB'^2 - OD^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}，$$

$\therefore$ 点 B' 的坐标为 $(1, -\sqrt{3})$ 。

$\therefore$ 点 N 为线段 BB' 的中点，

$\therefore$ 点 N 的坐标为 $(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 。

设直线 MN 的解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$ ，

$$\text{将 } M(3, \sqrt{3}), N(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) \text{ 代入 } y = kx + b \text{ 得: } \begin{cases} 3k + b = \sqrt{3} \\ \frac{3}{2}k + b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}，$$

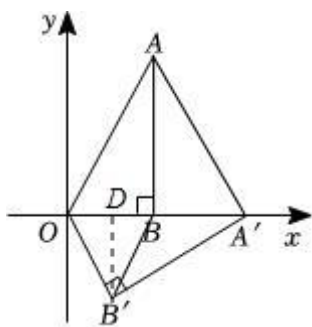
$$\text{解得: } \begin{cases} k = \sqrt{3} \\ b = -2\sqrt{3} \end{cases}，$$

$\therefore$ 直线 MN 的解析式为 $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$ 。

当 $x = 0$ 时， $y = \sqrt{3} \times 0 - 2\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$ ，

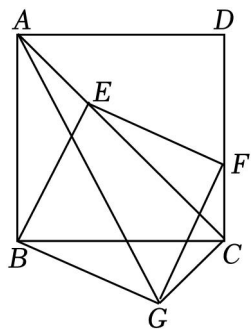
$\therefore$ 直线 MN 与 y 轴的交点坐标为 $(0, -2\sqrt{3})$ 。

故答案为：(0, -2\sqrt{3}).



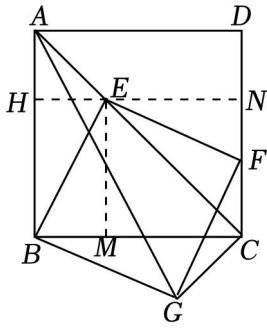
【点评】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征、含 30 度角的直角三角形、旋转、勾股定理以及待定系数法求一次函数解析式，根据点 M ， N 的坐标，利用待定系数法求出直线 MN 的解析式是解题的关键。

18. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 2，点 E 为对角线 AC 上一动点（点 E 不与 A 、 C 重合），过点 E 作 $EF \perp BE$ 交直线 CD 于 F ，将线段 EF 绕点 F 逆时针旋转 90° 得到线段 GF ，连接 GA ， GB ， GC ，下列结论：① $EB = EF$ ；② $AC \perp GC$ ；③ $CE + CG = \sqrt{2}CB$ ；④ $GA + GB$ 的最小值为 $2\sqrt{5}$ ，其中正确的是 ①②③④。（填写所有正确结论的序号）



【分析】 过 E 作 $EM \perp BC$ ， $EN \perp CD$ ，可证 $\triangle BEM \cong \triangle FEN$ 得 $BE = EF$ ，故①正确；
可证四边形 $BEFG$ 是正方形，得 $\angle EBG = 90^\circ$ ， $BE = BG$ ，可证 $\angle ABE = \angle CBG$ ，进而得到 $\triangle ABE \cong \triangle CBG$ ，
所以 $\angle BAE = \angle BCG$ ，得 $\angle BCA + \angle BCG = 90^\circ$ ，即 $\angle ACG = 90^\circ$ ，可证②正确；
由②可知， $\triangle ABE \cong \triangle CBG$ ，所以 $AE = CG$ ，而 $CG + CE = AE + CE = AC$ 可求，③正确。
由“ SAS ”可证 $\triangle BCG \cong \triangle HCG$ ，可得 $BG = GH$ ，当点 G ，点 A ，点 H 三点共线时， $AG + GH$ 有最小值，
由勾股定理可求 AH 的长，故④正确，即可求解。

【解答】 解：过 E 作 $EM \perp BC$ 于点 M ，作 $EN \perp CD$ 于点 N ，作 $EH \perp AB$ 于 H ，连接 BG ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形, AC 平分 $\angle BCD$,

$\therefore EM = EN$,

$\because \angle EMC = \angle MCN = \angle ENC = 90^\circ$,

$\therefore \angle MEN = 90^\circ$,

$\because EF \perp BE$,

$\therefore \angle BEM + \angle MEF = \angle FEN + \angle MEF = 90^\circ$,

$\therefore \angle BEM = \angle FEN$,

$\because \angle EMB = \angle ENF = 90^\circ$, $EM = EN$,

$\therefore \triangle BEM \cong \triangle FEN(ASA)$,

$\therefore BE = EF$, 故①正确;

$\because \angle BEF = \angle EFG = 90^\circ$, $EF = FG$, $BE = EF$,

$\therefore BE = FG$, $BE \parallel FG$,

$\therefore$ 四边形 $BEFG$ 是平行四边形,

$\because \angle BEF = 90^\circ$, $BE = EF$,

$\therefore$ 四边形 $BEFG$ 是正方形,

$\therefore \angle EBG = 90^\circ$, $BE = BG$,

$\because \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABE + \angle EBC = \angle EBC + \angle CBG = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABE = \angle CBG$,

又 $\because AB = BC$, $BE = BG$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBG(SAS)$,

$\therefore \angle BAE = \angle BCG = 45^\circ$,

$\therefore \angle BAE + \angle BCA = 90^\circ$,

$\therefore \angle BCA + \angle BCG = 90^\circ$, 即 $\angle ACG = 90^\circ$,

$\therefore AC \perp GC$, 故②正确;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/457115112112006124>