浙江省台州市温岭市书生中学2023-2024学年高三第一次模拟（月考）数学试题试卷

请考生注意：

1．请用2B铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用0．5毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。

2．答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

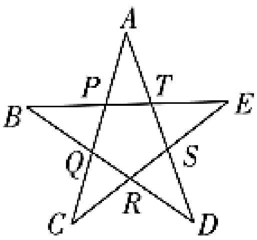
1．已知正三棱锥 $A-BCD$ 的所有顶点都在球 O 的球面上，其底面边长为4，E、F、G 分别为侧棱 AB，AC，AD 的中点.若 O 在三棱锥 $A-BCD$ 内，且三棱锥 $A-BCD$ 的体积是三棱锥 $O-BCD$ 体积的4倍，则此外接球的体积与三棱锥 $O-EFG$ 体积的比值为（　　）

A．$6\sqrt{3}\pi$　　B．$8\sqrt{3}\pi$　　C．$12\sqrt{3}\pi$　　D．$24\sqrt{3}\pi$

2．已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，圆 $x^2+y^2=b^2$ 与双曲线在第一象限内的交点为M，若 $\left|MF_1\right|=3\left|MF_2\right|$．则该双曲线的离心率为

A．2　　B．3　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{3}$

3．中国的国旗和国徽上都有五角星，正五角星与黄金分割有着密切的联系，在如图所示的正五角星中，以 A、B、C、D、E 为顶点的多边形为正五边形，且 $PT=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AP$，则 $\overrightarrow{AT}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{ES}=$（　　）



A．$\frac{\sqrt{5}+1}{2}\overrightarrow{QR}$　　B．$\frac{\sqrt{5}+1}{2}\overrightarrow{RQ}$　　C．$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{RD}$　　D．$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{RC}$

4．复数 $z=\left(a^2-1\right)+\left(a-1\right)i\left(a\in R\right)$ 为纯虚数，则 $z=$(　　)

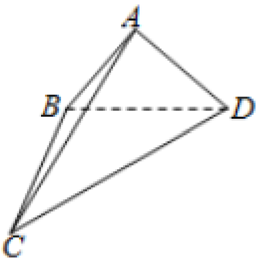
A．i　　B．$-2i$　　C．$2i$　　D．$-i$

5．若点$(□,□)$位于由曲线$□=|□-2|+1$与$□=3$围成的封闭区域内（包括边界），则$\frac{□+1}{□-2}$的取值范围是（　）

A．$[-3,1]$　　B．$[-3,5]$　　C．$(-\infty,-3]\cup[5,+\infty)$　　D．$(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$

6．如图，四面体 $ABCD$ 中，面 ABD 和面 BCD 都是等腰直角三角形，$AB=\sqrt{2}$，$\angle BAD=\angle CBD=\frac{\pi}{2}$，且二面角

$A-BD-C$ 的大小为$\dfrac{2\pi}{3}$，若四面体$ABCD$的顶点都在球O上，则球O的表面积为（　　）



A．$\dfrac{22\pi}{3}$　　　　B．$\dfrac{28\pi}{3}$　　　　C．$\dfrac{\pi}{2}$　　　　D．$\dfrac{2\pi}{3}$

7．M、N 是曲线 y=πsinx 与曲线 y=πcosx 的两个不同的交点,则|MN|的最小值为(　　)

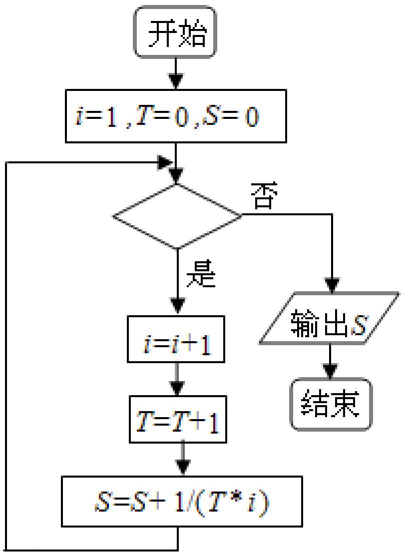
A．π　　　　**B．**$\sqrt{2}$ **π**　　　　**C．**$\sqrt{3}$ **π**　　　　**D．2π**

8．已知向量$\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(1,\sqrt{3})$，则与$2\vec{a}-\vec{b}$共线的单位向量为(　　)

A．$\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　　　B．$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

C．$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$或$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$　　　　D．$\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$或$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

9．一个算法的程序框图如图所示，若该程序输出的结果是$\dfrac{3}{4}$，则判断框中应填入的条件是（　　）



A．$i>5?$　　　　B．$i<5?$　　　　C．$i>4?$　　　　D．$i<4?$

10．下列说法正确的是（　　）

A．“若$a>1$，则$a^2>1$”的否命题是“若$a>1$，则$a^2\le 1$”

B．“若$am^2<bm^2$，则$a<b$”的逆命题为真命题

C．$\exists x_0\in(0,+\infty)$，使$3^{x_0}>4^{x_0}$成立

D．“若$\sin\alpha\neq\dfrac{1}{2}$，则$\alpha\neq\dfrac{\pi}{6}$”是真命题

11．等比数列$\{a_n\}$,若$a_3=4,a_{15}=9$则$a_9=$（　　）

A．±6　　B．6　　C．-6　　D．$\dfrac{13}{2}$

12．若AB为过椭圆$\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{25}=1$中心的弦，$F_1$为椭圆的焦点，则$\Delta F_1AB$面积的最大值为（　　）

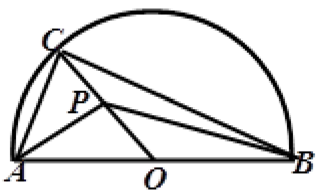
A．20　　B．30　　C．50　　D．60

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．复数$z=\dfrac{2i}{1+i}$(i为虚数单位）的虚部为__________.

14．如图，半圆的直径AB＝6，O为圆心，C为半圆上不同于A、B的任意一点，若P为半径OC上的动点，则

$\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right)\cdot\overrightarrow{PC}$的最小值为________.



15．已知变量$x_1,x_2\in\left(0,m\right)$ (m>0)，且$x_1<x_2$，若$x_1^{x_2}<x_2^{x_1}$恒成立，则m的最大值________.

16．已知函数$f(x)=\begin{cases}|x+1|,x\leq 0\\4x^2,x>0\end{cases}$，若函数$y=f(x)-a$有3个不同的零点$x_1,x_2,x_3(x_1<x_2<x_3)$，则$x_1+x_2+\dfrac{a}{x_3}$的取值范围是___________.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（12分）已知函数$f\left(x\right)=|x+1|-|x+a|$.

（1）若$a=-1$，求不等式$f\left(x\right)\geq -1$的解集；

（2）若“$\forall x\in R$，$f\left(x\right)<|2a+1|$”为假命题，求a的取值范围.

18.（12分）某百货商店今年春节期间举行促销活动，规定消费达到一定标准的顾客可进行一次抽奖活动，随着抽奖活动的有效开展，参与抽奖活动的人数越来越多，该商店经理对春节前7天参加抽奖活动的人数进行统计，y表示第x天参加抽奖活动的人数，得到统计表格如下：

x	1	2	3	4	5	6	7
y	5	8	8	10	14	15	17

（1）经过进一步统计分析，发现y与x具有线性相关关系．请根据上表提供的数据，用最小二乘法求出y关于x

的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$；

（2）该商店规定：若抽中"一等奖"，可领取 **600** 元购物券；抽中"二等奖"可领取 **300** 元购物券；抽中"谢谢惠顾"，则没有购物券．已知一次抽奖活动获得"一等奖"的概率为 $\dfrac{1}{6}$，获得"二等奖"的概率为 $\dfrac{1}{3}$．现有张、王两位先生参与了本次活动，且他们是否中奖相互独立，求此二人所获购物券总金额 X 的分布列及数学期望．

参考公式：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$，$\sum\limits_{i=1}^{7}x_iy_i=364$，$\sum\limits_{i=1}^{7}x_i^2=140$．

19．（12 分）为了保障全国第四次经济普查顺利进行，国家统计局从东部选择江苏，从中部选择河北、湖北，从西部选择宁夏，从直辖市中选择重庆作为国家综合试点地区，然后再逐级确定普查区域，直到基层的普查小区，在普查过程中首先要进行宣传培训，然后确定对象，最后入户登记，由于种种情况可能会导致入户登记不够顺利，这为正式普查提供了宝贵的试点经验，在某普查小区，共有 **50** 家企事业单位，**150** 家个体经营户，普查情况如下表所示：

普查对象类别	顺利	不顺利	合计
企事业单位	**40**	**10**	**50**
个体经营户	**100**	**50**	**150**
合计	**140**	**60**	**200**

（1）写出选择 **5** 个国家综合试点地区采用的抽样方法；

（2）根据列联表判断是否有 90% 的把握认为"此普查小区的入户登记是否顺利与普查对象的类别有关"；

（3）以该小区的个体经营户为样本，频率作为概率，从全国个体经营户中随机选择 **3** 家作为普查对象，入户登记顺利的对象数记为 X，写出 X 的分布列，并求 X 的期望值．

附：$k^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P\left(K^2\geq k_0\right)$	**0.10**	**0.010**	**0.001**
k_0	**2.706**	**6.635**	**10.828**

20．（12 分）已知等差数列$\{a_n\}$的各项均为正数，S_n为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，$a_1=1,\ \ a_4\cdot a_5=11$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项 a_n；

（2）设 $b_n=a_n\cdot 3^n$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

21．（12 分）已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，有 $f(x)>0$，且 $f(2)=1$．

（1）求不等式 $f(4t)-f(1-t)<2$ 的解集；

（2）对任意 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，$f\left[2\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-5a+2\right]\ldots f(6-2a)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

22．（10 分）在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}t,\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+2,\end{cases}$ （t 为参数），在以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴，且与直角坐标系长度单位相同的极坐标系中，曲线 C 的极坐标方程是 $\rho=4\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)$.

（1）求直线 l 的普通方程与曲线 C 的直角坐标方程；

（2）若直线 l 与曲线 C 相交于两点 A，B，求线段 AB 的长.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**D**

【解析】

如图，平面 EFG 截球 O 所得截面的图形为圆面，计算 $AH=4OH$，由勾股定理解得 $R=\sqrt{6}$，此外接球的体积为 $\dfrac{24\sqrt{6}}{3}\pi$，三棱锥 $O-EFG$ 体积为 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，得到答案.

【详解】

如图，平面 EFG 截球 O 所得截面的图形为圆面.

正三棱锥 $A-BCD$ 中，过 A 作底面的垂线 AH，垂足为 H，与平面 EFG 交点记为 K，连接 OD、HD.

依题意 $V_{A-BCD}=4V_{O-BCD}$，所以 $AH=4OH$，设球的半径为 R，

在 $Rt\nabla OHD$ 中，$OD=R$，$HD=\frac{\sqrt{3}}{3}BC=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$OH=\frac{1}{3}OA=\frac{R}{3}$，

由勾股定理：$R^2=\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{R}{3}\right)^2$，解得 $R=\sqrt{6}$，此外接球的体积为 $\frac{24\sqrt{6}}{3}\pi$，

由于平面 $EFG//$ 平面 BCD，所以 $AH\perp$ 平面 EFG，

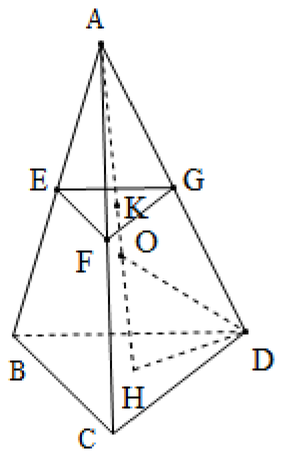
球心 O 到平面 EFG 的距离为 KO，

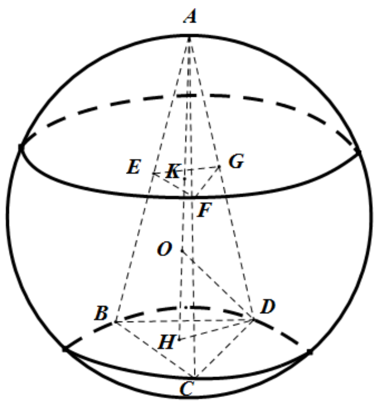
则 $KO=OA-KA=OA-\frac{1}{2}AH=R-\frac{2}{3}R=\frac{R}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以三棱锥 $O-EFG$ 体积为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}$，

所以此外接球的体积与三棱锥 $O-EFG$ 体积比值为 $24\sqrt{3}\pi$.

故选：**D.**





【点睛】

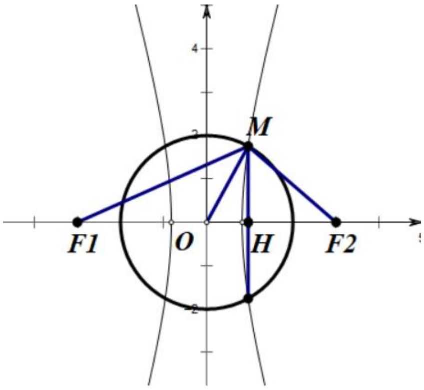
本题考查了三棱锥的外接球问题，三棱锥体积，球体积，意在考查学生的计算能力和空间想象能力.

2、**D**

【解析】

本题首先可以通过题意画出图像并过 M 点作 F_1F_2 垂线交 F_1F_2 于点 H，然后通过圆与双曲线的相关性质判断出三角形 OMF_2 的形状并求出高 MH 的长度，MH 的长度即 M 点纵坐标，然后将 M 点纵坐标带入圆的方程即可得出 M 点坐标，最后将 M 点坐标带入双曲线方程即可得出结果。

【详解】



根据题意可画出以上图像，过M点作F_1F_2垂线并交F_1F_2于点H，

因为$|MF_1|=3|MF_2|$，M在双曲线上，

所以根据双曲线性质可知，$|MF_1|-|MF_2|=2a$，即$3|MF_2|-|MF_2|=2a$，$|MF_2|=a$，

因为圆$x^2+y^2=b^2$的半径为b，OM是圆$x^2+y^2=b^2$的半径，所以$OM=b$，

因为$OM=b$，$|MF_2|=a$，$OF_2=c$，$a^2+b^2=c^2$，

所以$\angle OMF_2=90^\circ$，三角形OMF_2是直角三角形，

因为$MH\perp OF_2$，所以$OF_2\times MH=OM\times MF_2$，$MH=\frac{ab}{c}$，即$M$点纵坐标为$\frac{ab}{c}$，

将M点纵坐标带入圆的方程中可得$x^2+\frac{a^2b^2}{c^2}=b^2$，解得$x=\frac{b^2}{c}$，$M\left(\frac{b^2}{c},\frac{ab}{c}\right)$，

将M点坐标带入双曲线中可得$\frac{b^4}{a^2c^2}-\frac{a^2}{c^2}=1$，

化简得$b^4-a^4=a^2c^2$，$\left(c^2-a^2\right)^2-a^4=a^2c^2$，$c^2=3a^2$，$e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$，故选**D**。

【点睛】

本题考查了圆锥曲线的相关性质，主要考察了圆与双曲线的相关性质，考查了圆与双曲线的综合应用，考查了数形结合思想，体现了综合性，提高了学生的逻辑思维能力，是难题。

3、**A**

【解析】

利用平面向量的概念、平面向量的加法、减法、数乘运算的几何意义，便可解决问题.

【详解】

解：$\overrightarrow{AT}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{ES}=\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{SR}=\overrightarrow{RD}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\overrightarrow{QR}$.

故选：**A**

【点睛】

本题以正五角星为载体，考查平面向量的概念及运算法则等基础知识，考查运算求解能力，考查化归与转化思想，属于基础题.

4、**B**

【解析】

复数 $z=\left(a^{2}-1\right)+\left(a-1\right)i\left(a\in R\right)$ 为纯虚数，则实部为 **0**，虚部不为 **0**，求出 a，即得 z.

【详解】

$\because z=\left(a^{2}-1\right)+\left(a-1\right)i\left(a\in R\right)$ 为纯虚数，

$\therefore\begin{cases}a^{2}-1=0\\a-1\neq 0\end{cases}$，解得 $a=-1$.

$\therefore z=-2i$.

故选：B.

【点睛】

本题考查复数的分类，属于基础题.

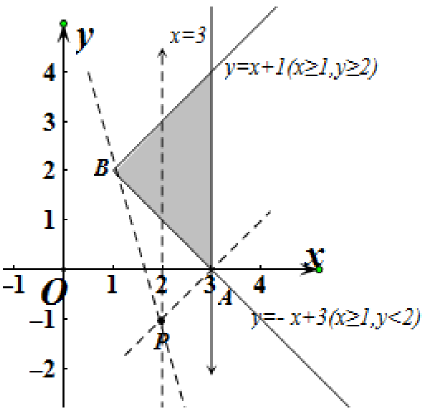
5、**D**

【解析】

画出曲线 $□=|□-2|+1$ 与 $□=3$ 围成的封闭区域，$\frac{□+1}{□-2}$ 表示封闭区域内的点 $(□,□)$ 和定点 $(2,-1)$ 连线的斜率，然后结合图形求解可得所求范围.

【详解】

画出曲线 $□=|□-2|+1$ 与 $□=3$ 围成的封闭区域，如图阴影部分所示.



$\frac{□+1}{□-2}$ 表示封闭区域内的点 $(□,□)$ 和定点 $□(2,-1)$ 连线的斜率，

设 $□=\frac{□+1}{□-2}$，结合图形可得$□ \ge □_{□□}$或$□ \le □_{□□}$，

由题意得点 **A,B** 的坐标分别为$□(3,0), □(1,2)$，

∴ $□_{□□}=\frac{1}{3-2}=1, □_{□□}=\frac{2-(-1)}{1-2}=-3$，

∴$□ \ge 1$或$□ \le -3$，

∴$\frac{□+1}{□-2}$的取值范围为$(-\infty,-3] \cup [1,+\infty)$.

故选 **D**．

【点睛】

解答本题的关键有两个：一是根据数形结合的方法求解问题，即把$\frac{□+1}{□-2}$看作两点间连线的斜率；二是要正确画出两曲线所围成的封闭区域．考查转化能力和属性结合的能力，属于基础题．

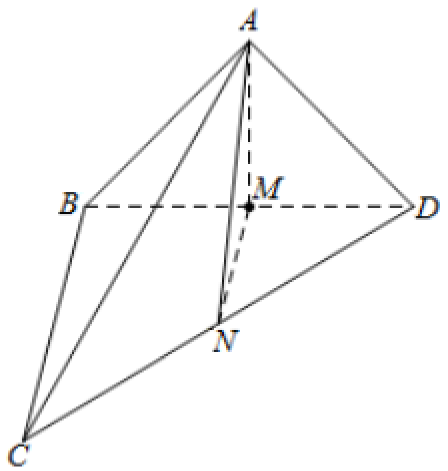
6、**B**

【解析】

分别取BD、CD的中点M、N，连接AM、MN、AN，利用二面角的定义转化二面角$A-BD-C$的平面角为$\angle AMN=\frac{2\pi}{3}$，然后分别过点$M$作平面$ABD$的垂线与过点$N$作平面$BCD$的垂线交于点$O$，在$Rt\Delta OMN$中计算出$OM$，再利用勾股定理计算出$OA$，即可得出球$O$的半径，最后利用球体的表面积公式可得出答案．

【详解】

如下图所示，



分别取BD、CD的中点M、N，连接AM、MN、AN，

由于ΔABD是以$\angle BAD$为直角等腰直角三角形，M为BD的中点，$\therefore AM \perp BD$，