辽宁省鞍山海城市第三高级中学2024—2025学年高二上学期12月月考数学试题

学校:__________姓名：__________班级：__________考号：__________

一、未知

1．点 $A(2,-3)$ 关于点 $B(-1,0)$ 的对称点 A' 的坐标是（　）

A．$(5,-6)$　　B．$(-4,3)$　　C．$(3,-3)$　　D．$\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$

2．关于空间向量，以下说法错误的是（　）

A．空间中的三个向量，若有两个向量共线，则这三个向量一定共面

B．若 $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是锐角

C．已知向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 是不共面的向量，则 $2\vec{a},\vec{b},\vec{c}-\vec{a}$ 也是不共面的向量

D．若对空间中任意一点 O，有 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{12}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$，则 P,A,B,C 四点共面

3．已知两条直线 $l_1:ax+4y-1=0,l_2:x+ay+2=0$，则“$a=2$”是“$l_1//l_2$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的离心率为 $\sqrt{10}$，则其渐近线方程是（　）

A．$y=\pm\frac{1}{3}x$　　B．$y=\pm\frac{1}{2}x$

C．$y=\pm2x$　　D．$y=\pm3x$

5．已知直线 $l:x+y-2=0$ 与圆 $M:x^2+y^2-4x-4y+a=0$ 交于 A,B 两点，且 $|AB|=4\sqrt{2}$，则 $a=$（　）

A．4　　B．-4　　C．2　　D．-2

6．在棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是 B_1C_1 和 A_1D_1 的中点，则直线 AC 与平面 $ABEF$ 所成角的正弦值为（　）

A．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　B．$\frac{\sqrt{10}}{5}$　　C．$\frac{2\sqrt{3}}{5}$　　D．$\frac{\sqrt{15}}{5}$

7．已知直线 l：$y=\frac{1}{2}x+1$ 与椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）相交于 A,B，且 AB 的中点为

$M\left(-1,\frac{1}{2}\right)$，则椭圆$C$的离心率为（　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{1}{2}$

8．已知P为抛物线$C:y^2=8x$上任意一点，F为抛物线C的焦点，Q为圆$M:(x-8)^2+(y-4)^2=4$上任意一点，则$|PF|+|PQ|$的最小值为（　）

A．6　　B．10　　C．4　　D．8

二、多选题

9．下列说法正确的是（　）

A．直线$\sqrt{3}x+y+1=0$的倾斜角为$120°$

B．方程$k=\frac{y-2}{x+1}$与方程$y-2=k(x+1)$可表示同一直线

C．经过点$P(2,1)$，且在x，y轴上截距互为相反数的直线方程为$x-y-1=0$

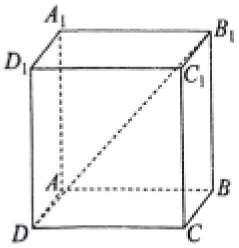
D．过两点$P_1\left(x_1,y_1\right)$，$P_2\left(x_2,y_2\right)$的直线都可用方程$\left(x_2-x_1\right)\left(y-y_1\right)=\left(y_2-y_1\right)\left(x-x_1\right)$表示

10．已知抛物线$C_1:y^2=mx(m>0)$与双曲线C_2：$x^2-\frac{y^2}{3}=1$有相同的焦点，点$P\left(2,y_0\right)$在抛物线C_1上，则下列结论正确的有（　）

A．双曲线C_2的离心率为2　　B．双曲线C_2的渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$

C．$m=8$　　D．点P到抛物线C_1的焦点的距离为4

11．在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=AA_1=2$，$AD=1$，E为A_1B_1的中点，点P满足$\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DB_1}(0<\lambda<1)$，则（　）



A．若M为A_1D的中点，则三棱锥$P-BEM$体积为定值

B．存在点P使得$AP\perp BE$

C．当$\lambda=\dfrac{2}{3}$时，平面PBC截长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$所得截面的面积为$\sqrt{5}$

D．若Q为长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$外接球上一点，$\lambda=\dfrac{2}{3}$，则$QE+3QP$的最小值为$\sqrt{14}$

三、填空题

12．下列说法正确的是_____.

①直线$y=ax-2a+4(a\in\mathrm{R})$恒过定点$(2,4)$

②直线$y+1=3x$在y轴上的截距为 1

③直线$x+\sqrt{3}y+1=0$的倾斜角为150°

④已知直线l过点$P(2,4)$，且在x,y轴上截距相等，则直线l的方程为$x+y-6=0$

13．椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的右顶点为A，上顶点为$B$，右焦点为$F$，若直线$BF$与以A为圆心半径为$\dfrac{1}{3}b$的圆相切，则椭圆离心率等于_____.

14．已知抛物线$y^2=4\sqrt{13}x, F_1$、F_2分别是双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，抛物线的准线过双曲线的左焦点$F_1$，且与双曲线的一条渐近线交于点$A$，若$\angle F_1F_2A=\dfrac{\pi}{3}$，则$b$＝_____.

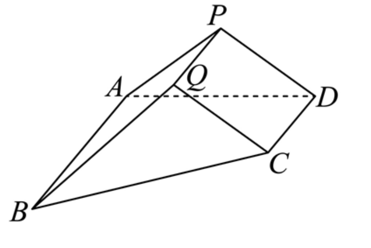
四、解答题

15．已知圆C的圆心在y轴上，并且过原点和$\left(-\sqrt{3},3\right)$.

(1)求圆C的方程；

(2)若线段AB的端点$A(4,-2)$，端点B在圆C上运动，求线段AB的中点M的轨迹方程.

16．如图，已知平面$PAD\perp$平面$ABCD$，$\triangle PAD$为等腰直角三角形，$\angle APD=90^\circ$，四边形$ABCD$为直角梯形，$CD\parallel AB$，$AB\perp AD, AB=AD=2, PQ//DC, PQ=DC=1$.



(1)求二面角$Q-BC-A$的余弦值；

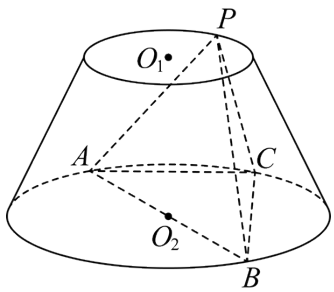
(2)线段 QB 上是否存在点 M，使得 $AM\perp$ 平面 QBC？若存在，求 $\dfrac{|QM|}{|QB|}$ 的值；若不存在，请说明理由.

17．已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且点 $A(2,-1)$ 在椭圆上.

(1)求该椭圆的方程；

(2)直线 l 交椭圆 C 于 P，Q 两点，直线 AP，AQ 的斜率之和为 0，且 $\angle PAQ=\dfrac{\pi}{2}$，求 $\triangle PAQ$ 的面积.

18．如图，PC 是圆台 O_1O_2 的一条母线，$\vee ABC$ 是圆 O_2 的内接三角形，AB 为圆 O_2 的直径，$AB=4,AC=2\sqrt{2}$.



(1)证明：$AB\perp PC$；

(2)若圆台 O_1O_2 的高为 3，体积为 7π，求直线 AB 与平面 PBC 夹角的正弦值.

19．已知点 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，动点 $M(x,y)$ 满足直线 AM 与 BM 的斜率之积为 $-\dfrac{1}{2}$．记 M 的轨迹为曲线 C.

(1)求 C 的方程，并说明 C 是什么曲线；

(2)过坐标原点的直线 l 交 C 于 P，Q 两点，点 P 在第一象限，$PE\perp x$ 轴，垂足为 E，连结 QE 并延长交 C 于点 G.

（ⅰ）证明：以 QG 为直径的圆必然经过点 P.

（ⅱ）求 $\dfrac{|PQ|}{|PG|}$ 的取值范围，并求当 $\dfrac{|PQ|}{|PG|}$ 取得最小值时的直线 l 的方程.

参考答案：

题号	9	10	11							
答案	AD	ACD	ACD							

1．B

【分析】根据中点坐标公式求解即可.

【详解】设A'点坐标为(x,y)，

则由题意可得$\begin{cases}\dfrac{x+2}{2}=-1\\ \dfrac{y+(-3)}{2}=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=-4\\ y=3\end{cases}$，

所以A'点坐标为$(-4,3)$，

故选：B

2．B

【分析】根据向量夹角的范围、空间基底的定义和空间向量基本定理的知识依次判断即可.

【详解】选项A：根据共线向量的概念可知，空间中的三个向量，若有两个向量共线，则这三个向量一定共面，A说法正确；

选项B：若$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle>0$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角是锐角或$\vec{a}$与$\vec{b}$同向，即夹角为0，B说法错误；

选项C：假设$2\vec{a},\vec{b},\vec{c}-\vec{a}$是共面向量，则存在$m,n\in R$使得$2\vec{a}=m\vec{b}+n(\vec{c}-\vec{a})$，

因为向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$是不共面的向量，所以m,n无解，则$2\vec{a},\vec{b},\vec{c}-\vec{a}$也是不共面的向量，C说法正确；

选项D：因为$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{12}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$，且$\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=1$，所以$P,A,B,C$四点共面，D说法正确；

故选：B

3．A

【分析】由两直线平行求出a，再利用充分条件、必要条件的定义判断即得.

【详解】当$l_1//l_2$时，$\frac{a}{1}=\frac{4}{a}\neq\frac{-1}{2}$，则$a=\pm2$，

所以“$a=2$”是“$l_1//l_2$”的充分不必要条件.

故选：A

4．D

【分析】利用双曲线的性质结合给定条件求解即可.

【详解】因为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的离心率为$\sqrt{10}$，

所以$\frac{c}{a}=\sqrt{10}$，所以$\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=1+\frac{b^2}{a^2}=10$，

所以$\frac{b^2}{a^2}=9$，所以$\frac{b}{a}=3$，

所以双曲线的渐近线方程是$y=\pm 3x$.

故选：D

5．D

【分析】运用垂径定理结合勾股定理构造方程计算即可.

【详解】由题意可得圆M的圆心为$M\left(2,2\right)$，半径$r=\sqrt{4+4-a}=\sqrt{8-a}$，

则圆心M到直线l的距离$d=\frac{\left|2+2-2\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$．因为$d^2+\left(\frac{\left|AB\right|}{2}\right)^2=r^2$，

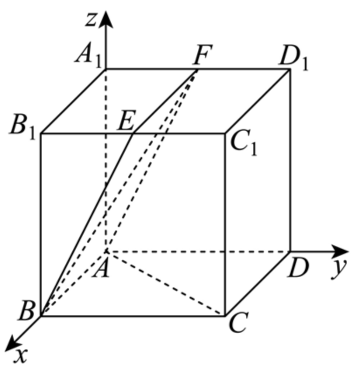
所以$(\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2=8-a$，即$8-a=10$，解得$a=-2$.

故选：D.

6．B

【分析】建立空间直角坐标系，求得直线AC的方向向量和平面$ABEF$的法向量，结合夹角公式求解即可.

【详解】在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，以A为原点，AB,AD,AA_1所在直线为x,y,z轴建立如图所示坐标系，



由题意可得$A(0,0,0)$，$B\left(2,0,0\right)$，$C\left(2,2,0\right)$，$F\left(0,1,2\right)$，

所以 $\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{AF}=(0,1,2)$，

设平面 $ABEF$ 的一个法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=2x=0\\ \overrightarrow{AF}\cdot\vec{n}=y+2z=0\end{cases}$，取 $y=2$ 可得 $\vec{n}=(0,2,-1)$，

设直线 AC 与平面 $ABEF$ 所成角为 θ，

所以 $\sin\theta=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{4}{\sqrt{5}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，

即直线 AC 与平面 $ABEF$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，

故选：B

7．B

【分析】将直线方程与椭圆方程联立，利用韦达定理和中点坐标公式求出 a,b 的关系，再根据椭圆的性质求解即可.

【详解】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

将直线方程与椭圆方程联立 $\begin{cases}y=\dfrac{1}{2}x+1\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$，

消去 x 得 $\left(4b^2+a^2\right)y^2-8b^2y+4b^2-a^2b^2=0$，

则 $y_1+y_2=\dfrac{8b^2}{4b^2+a^2}$，

因为 AB 的中点为 $M\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$ 所以 $\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{1}{2}$，解得 $4b^2=a^2$，

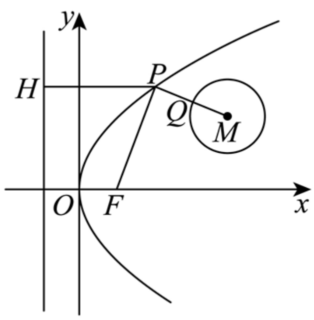
所以 $e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=1-\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{3}{4}$，$e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

故选：B

8．D

【分析】利用抛物线的定义及点与圆的位置关系，通过数形结合计算最值即可.

【详解】如图，过点 P 作 PH 垂直准线于点 H，连接 PM 交 $\odot M$ 于点 Q.



由题意可得$F(2,0)$，C的准线方程为$x=-2$，$|PF|+|PQ|=|PH|+|PQ|$.

因为$|PQ|=|PM|-|QM|=|PM|-2$，所以$|PF|+|PQ|=|PH|+|PM|-2$，

当M,P,H三点共线时，$|PH|+|PM|$取得最小值，最小值为$8+2=10$，

所以$|PF|+|PQ|$的最小值为$10-2=8$.

故选：D

9．AD

【分析】对于A，先求斜率，进而可得倾斜角；对于B，注意区分方程$k=\dfrac{y-2}{x+1}$与方程$y-2=k(x+1)$的不同之处，对于C，设直线l：$y-1=k(x-2)$，进而可得截距，根据题意进行求解即可，对于D，根据两点式方程的变形进行判断即可.

【详解】对于选项A：直线$\sqrt{3}x+y+1=0$的斜率$k=-\sqrt{3}$，

所以倾斜角为$120°$，故A正确；

对于B，$k=\dfrac{y-2}{x+1}$表示过点$(-1,2)$，斜率为k的直线，但不含点$(-1,2)$，

而$y-2=k(x+1)$表示过点$(-1,2)$，斜率为k的直线，且含点$(-1,2)$，故B错误；

对于C：因为直线经过点$P(2,1)$，故斜率存在且不为0，

设直线为$y-1=k(x-2)$，令$x=0$，则$y=1-2k$；令$y=0$，则$x=2-\dfrac{1}{k}$，

因为在x，y轴上截距互为相反数，则$1-2k+2-\dfrac{1}{k}=0$，

解得$k=\dfrac{1}{2}$或$k=1$，

所以直线方程为$x-2y=0$或$x-y-1=0$，故C错误；

对于D，方程$(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1)$为直线两点式方程的变形，

可以表示经过任意两点$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$的直线，故D正确.

故选：AD.

10．ACD

【分析】根据双曲线C_2的方程求出离心率可判断A；求出双曲线C_2的渐近线方程可判断B；由C_1,C_2有相同的焦点求出m可判断C；点P坐标代入C_1方程可判断D.

【详解】双曲线$C_2:x^2-\frac{y^2}{3}=1$的焦点为$\left(2,0\right)$，$\left(-2,0\right)$，$a^2=1,b^2=3$，

对于A，双曲线C_2的离心率$e=\frac{\sqrt{1+3}}{1}=2$，故A正确；

对于B，双曲线C_2的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$，故B错误；

对于C，由C_1,C_2有相同的焦点，得$\frac{m}{4}=2$，解得$m=8$，故C正确；

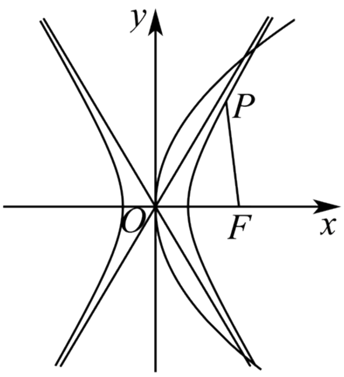
对于D，由C可知，抛物线$C_1:y^2=8x$的焦点为$\left(2,0\right)$，

因为点$P\left(2,y_0\right)$在C_1上，所以$y_0^2=8\times2$，

解得$y_0=\pm4$，故$P\left(2,4\right)$或$P(2,-4)$，

所以点P到C_1的焦点$\left(2,0\right)$的距离为4，故D正确.

故选：ACD.



11．ACD

【分析】对于A，证明$DB_1//$面BEM即可得证三棱锥$P-BEM$体积为定值；对于B，假设$AP\perp BE$，可证明$AB_1\perp BE$，与题意矛盾，即可判断；对于C，作出平面PBC截长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$所得截面为矩形$BCFE$，计算面积即可；对于D，建系将$QE+3QP$的最小值转化为$(QE+3QP)_{\min}=(QE+QN)_{\min}=NE$，计算即可.

【详解】对于A：因为M为A_1D的中点，E为A_1B_1的中点，