湖北省华中师范大学第一附属中学、湖南省湖南师范大学附属中学等三校2024届高三下学期4月模拟考试（二模）数学试卷

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．若集合$A=\left\{x\mid 3x^2-16x\le 0\right\},B=\{x\mid y=\ln(5x-2)\}$，则$A\cap B=$（   ）

A．$\left\{x\mid 0\le x<\dfrac{5}{2}\right\}$　　B．$\left\{x\mid \dfrac{5}{2}<x\le\dfrac{16}{3}\right\}$

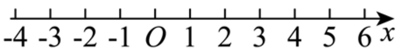
C．$\left\{x\mid 0\le x<\dfrac{2}{5}\right\}$　　D．$\left\{x\mid \dfrac{2}{5}<x\le\dfrac{16}{3}\right\}$

2．已知$z=(2a-1)+(a+1)\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$，则“$|z|=\sqrt{2}$”是“$a=\dfrac{2}{5}$”的（   ）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

3．如图所示，已知一质点在外力的作用下，从原点O出发，每次向左移动的概率为$\dfrac{2}{3}$，向右移动的概率为$\dfrac{1}{3}$．若该质点每次移动一个单位长度，设经过5次移动后，该质点位于X的位置，则$P(X>0)=$（   ）



A．$\dfrac{50}{243}$　　B．$\dfrac{52}{243}$　　C．$\dfrac{2}{9}$　　D．$\dfrac{17}{81}$

4．青少年视力问题是社会普遍关注的问题，视力情况可借助视力表测量，通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据，五分记录法的数据L和小数记录法的数据V满足$L=5+\lg V$．已知小明和小李视力的五分记录法的数据分别为4.5和4.9，记小明和小李视力的小数记录法的数据分别为V_1,V_2，则$\dfrac{V_2}{V_1}\in$（   ）

A．$(1.5,2)$　　B．$(2,2.5)$　　C．$(2.5,3)$　　D．$(3,3.5)$

5．$\dfrac{1+\tan 190^{\circ}}{1-\tan 370^{\circ}}-\dfrac{2\cos 70^{\circ}}{\sin 40^{\circ}}=$（   ）

A．$\tan 20^{\circ}$　　B．$\tan 70^{\circ}$　　C．$-\tan 10^{\circ}$　　D．$-\tan 40^{\circ}$

6．已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点E是线段BB_1上靠近B_1的三等分点，点F是线段D_1C_1上靠近D_1的三等分点，则平面AEF截正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$形成的截面图形为（   ）

A．三角形　　B．四边形　　C．五边形　　D．六边形

7．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$S_1=1$，$S_2=3$，且$\frac{3}{2}a_{n+1}$是$2a_n$，a_{n+2}的等差中项，则使得$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{a_i}>\frac{509}{128}$成立的最小的$n$的值为（　）

A．8　　B．9　　C．10　　D．11

8．若关于x的不等式$a(\ln x+\ln a)\le 2e^{2x}$在$(0,+\infty)$上恒成立，则实数$a$的取值范围为（　）

A．$(0,\sqrt{e}]$　　B．$\left(0,e^2\right]$

C．$(0,e]$　　D．$(0,2e]$

二、多选题

9．若函数$f\left(x\right)=\left|x^2-\left(m-2\right)x+1\right|$在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$上单调，则实数$m$的值可以为（　）

A．-1　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$\frac{5}{2}$　　D．3

10．已知函数$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(\omega>0\right)$，则（　）

A．若$\omega=3$，$\varphi=\frac{\pi}{3}$，则将函数$f\left(x\right)$的图象向右平移$\frac{5\pi}{18}$个单位后关于y轴对称

B．若$\varphi=\frac{\pi}{3}$，函数$f\left(x\right)$在$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$上有最小值，无最大值，且$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，则$\omega=5$

C．若直线$x=\frac{\pi}{4}$为函数$f\left(x\right)$图象的一条对称轴，$\left(\frac{5\pi}{3},0\right)$为函数$f\left(x\right)$图象的一个对称中心，且$f\left(x\right)$在$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right)$上单调递减，则$\omega$的最大值为$\frac{18}{17}$

D．若$f\left(x\right)=\frac{1}{2}$在$x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$上至少有2个解，至多有3个解，则$\omega\in\left[4,\frac{16}{3}\right)$

11．已知抛物线C：$y^2=2px\left(p>0\right)$的焦点为F，点M,N在抛物线C上，则（　）

A．若M,N,F三点共线，且$\frac{|MF|}{|NF|}=\frac{3}{4}$，则直线$MN$的倾斜角的余弦值为$\pm\frac{3}{7}$

B．若M,N,F三点共线，且直线MN的倾斜角为$45°$，则$\triangle OMN$的面积为$\frac{\sqrt{2}}{2}p^2$

C．若点$A\left(4,4\right)$在抛物线C上，且M,N异于点A，$AM\perp AN$，则点M,N到直线$y=-4$的距离之积为定值

D．若点$A\left(2,2\right)$在抛物线C上，且M,N异于点A，$k_{AM}+k_{AN}=0$，其中$k_{AM}>1$

，则$\left|\sin\angle FMN-\sin\angle FNM\right|\le\frac{2\sqrt{5}}{5}$

三、填空题

12．关于双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$，四位同学给出了四个说法：

小明：双曲线C的实轴长为8；

小红：双曲线C的焦点到渐近线的距离为3；

小强：双曲线C的离心率为$\frac{3}{2}$；

小同：双曲线C上的点到焦点距离的最小值为1；

若这4位同学中只有1位同学的说法错误，则说法错误的是_____；双曲线C的方程为_____．（第一空的横线上填“小明”、“小红”、“小强”或“小同”）

13．已知等边$\triangle ABC$的外接圆O的面积为36π，动点M在圆O上，若$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}\le\lambda$，则实数$\lambda$的取值范围为_____．

14．已知空间四面体$ABCD$满足$AB=AC=DB=DC,AD=2BC=6$，则该四面体外接球体积的最小值为_____．

四、解答题

15．某农业大学组织部分学生进行作物栽培试验，由于土壤相对贫瘠，前期作物生长较为缓慢，为了增加作物的生长速度，达到预期标准，小明对自己培育的一株作物使用了营养液，现统计了使用营养液十天之内该作物的高度变化

天数x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
作物高度y/cm	9	10	10	11	12	13	13	14	14	14

(1)观察散点图可知，天数x与作物高度y之间具有较强的线性相关性，用最小二乘法求出作物高度y关于天数x的线性回归方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$（其中$\hat{a},\hat{b}$用分数表示）；

(2)小明测得使用营养液后第22天该作物的高度为$21.3\mathrm{cm}$，请根据（1）中的结果预测第22天该作物的高度的残差．

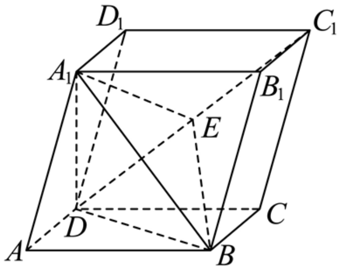
参考公式：$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2},\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$．参考数据：$\sum_{i=1}^{10}x_iy_i=710$．

16．已知数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，且$a_2=3,2S_n=n\left(a_n+2\right)$．

(1)求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

(2)若存在$n \in \mathbf{N}^*$，使得$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}} \ge \lambda a_{n+1}$成立，求实数$\lambda$的取值范围．

17．已知四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$如图所示，底面$ABCD$为平行四边形，其中点D在平面$A_1B_1C_1D_1$内的投影为点A_1，且$AB=AA_1=2AD, \angle ABC=120^\circ$．



(1)求证：平面$A_1BD \perp$平面ADD_1A_1；

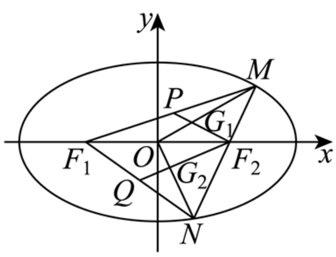
(2)已知点E在线段C_1D上（不含端点位置），且平面A_1BE与平面BCC_1B_1的夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$，求$\frac{DE}{EC_1}$的值．

18．已知函数$f(x)=\ln(1+x)-\frac{1}{\sqrt{1+x}}$．

(1)求曲线$y=f(x)$在$(0, f(0))$处的切线方程；

(2)若$x \in (-1, \pi)$，讨论曲线$y=f(x)$与曲线$y=-2\cos x$的交点个数．

19．已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$短轴长为2，左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过点$F_2$的直线$l$与椭圆$C$交于$M$，$N$两点，其中$M$，$N$分别在$x$轴上方和下方，$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{PF_1}$，$\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{QF_1}$，直线$PF_2$与直线$MO$交于点$G_1$，直线$QF_2$与直线$NO$交于点$G_2$．



(1)若G_1的坐标为$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$，求椭圆$C$的方程；

(2)在（1）的条件下，过点F_2并垂直于x轴的直线交C于点B，椭圆上不同的两点A，D满足$|F_2A|$，$|F_2B|$，$|F_2D|$成等差数列．求弦AD的中垂线的纵截距的取值范围；

(3)若$4S_{\triangle MNG_2} \le 3S_{\triangle NF_1G_1} \le 5S_{\triangle MNG_2}$，求实数$a$的取值范围．

参考答案：

1．D

【分析】根据一元二次不等式的解集确定集合A，根据对数函数的定义域确定集合B，再根据集合的交集运算得结果.

【详解】因为集合$A=\left\{x \mid 3x^2-16x\le 0\right\}=\left\{x \mid 0\le x\le \frac{16}{3}\right\}, B=\{x \mid y=\ln(5x-2)\}=\left\{x \middle| x>\frac{2}{5}\right\}$，

则$A\cap B=\left\{x \mid \frac{2}{5}<x\le \frac{16}{3}\right\}$.

故选：D.

2．B

【分析】由$|z|=\sqrt{2}$建立a的等量关系，求解a，从而判断选项.

【详解】因为$|z|=\sqrt{(2a-1)^2+(a+1)^2}=\sqrt{2}$，化简得$5a^2-2a=0$，解得$a=0$或$a=\frac{2}{5}$，故"$|z|=\sqrt{2}$"是"$a=\frac{2}{5}$"的必要不充分条件.

故选：B.

3．D

【分析】由题意当$X>0$时，X的可能取值为1,3,5，且$X\sim B(5,\frac{2}{3})$，根据二项分布的概率公式计算即可求解.

【详解】依题意，当$X>0$时，X的可能取值为1,3,5，且$X\sim B(5,\frac{2}{3})$，

所以$P(X>0)=P(X=5)+P(X=3)+P(X=1)$

$=\left(\frac{1}{3}\right)^5+C_5^1\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)+C_5^2\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{17}{81}$.

故选：D.

4．C

【分析】根据题意得到方程组，求出$\frac{V_2}{V_1}=\sqrt[5]{100}$，根据$2.5^5\approx 98<100<3^5=243$得到$\sqrt[5]{100}\in(2.5,3)$.

【详解】依题意，$\begin{cases}4.9=5+\lg V_2\\4.5=5+\lg V_1\end{cases}$，两式相减可得，$0.4=\lg V_2-\lg V_1=\lg\frac{V_2}{V_1}$，

故$\frac{V_2}{V_1}=10^{0.4}=\sqrt[5]{100}$，而$2.5^5\approx 98<100<3^5=243$，故$\sqrt[5]{100}\in(2.5,3)$.

故选：C．

5．A

【分析】根据题意，结合三角函数的基本关系式、诱导公式和倍角公式，准确化简、运算，即可求解.

【详解】由 $\frac{1+\tan190^\circ}{1-\tan370^\circ}-\frac{2\cos70^\circ}{\sin40^\circ}=\frac{1+\tan10^\circ}{1-\tan10^\circ}-\frac{2\sin20^\circ}{\sin40^\circ}=\frac{1+\frac{\sin10^\circ}{\cos10^\circ}}{1-\frac{\sin10^\circ}{\cos10^\circ}}-\frac{2\sin20^\circ}{2\sin20^\circ\cos20^\circ}$

$=\frac{\left(\cos10^\circ+\sin10^\circ\right)^2}{\cos^2 10^\circ-\sin^2 10^\circ}-\frac{1}{\cos20^\circ}=\frac{1+\sin20^\circ}{\cos20^\circ}-\frac{1}{\cos20^\circ}=\tan20^\circ$.

故选：A．

6．C

【分析】如图，由题意，根据空间线面的位置关系、基本事实以及面面平行的性质定理可得 $l//AE$，进而 $FI//AE$，结合相似三角形的性质即可求解.

【详解】如图，设 $AB=6$，分别延长 AE、A_1B_1 交于点 G，此时 $B_1G=3$，

连接 FG 交 B_1C_1 于 H，连接 EH，

设平面 AEF 与平面 DCC_1D_1 的交线为 l，则 $F\in l$，

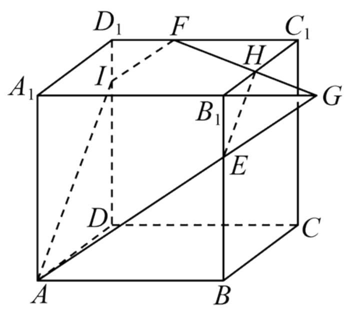
因为平面 $ABB_1A_1//$平面 DCC_1D_1，平面 $AEF\cap$平面 $ABB_1A_1=AE$，平面 $AEF\cap$平面 $DCC_1D_1=l$，

所以 $l//AE$，设 $l\cap D_1D=I$，则 $FI//AE$，

此时 $\triangle FD_1I\backsim\triangle ABE$，故 $ID_1=\frac{4}{3}$，连接 AI，

所以五边形 $AIFHE$ 为所求截面图形，

故选：C．



7．D

【分析】由题意得到$\{a_{n+1}-a_n\}$是等比数列，进而得到$a_n=2^{n-1}$，利用错位相减法求出

$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{a_i}=4-\frac{2+n}{2^{n-1}}$，构造函数$f(x)=\frac{2+x}{2^{x-1}}(x>0)$，并利用导数判断函数$f(x)$的单调性，即可求出符合条件的$n$的最小值.

【详解】$\because \frac{3}{2}a_{n+1}$是$2a_n$，$a_{n+2}$的等差中项，

$\therefore a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$，故$a_{n+2}-a_{n+1}=2\left(a_{n+1}-a_n\right)$，

而$a_2-a_1=S_2-2S_1=1\neq 0$，$\therefore \frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=2$，

故数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是首项为 1，公比为 2 的等比数列，则$a_{n+1}-a_n=2^{n-1}$，

$\therefore a_n=\left(a_n-a_{n-1}\right)+\left(a_{n-1}-a_{n-2}\right)+\cdots+\left(a_2-a_1\right)+a_1=2^{n-2}+2^{n-1}+\cdots+2^0+1=\frac{1-2^{n-1}}{1-2}+1=2^{n-1}$，

记$T_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{a_i}$，则$T_n=\frac{1}{2^0}+\frac{2}{2^1}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}$，

$2T_n=\frac{1}{2^{-1}}+\frac{2}{2^0}+\cdots+\frac{n}{2^{n-2}}$，

两式相减可得，$T_n=\frac{1}{2^{-1}}+\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{n}{2^{n-1}}=\frac{2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n-1}}=4-\frac{2+n}{2^{n-1}}$，

即$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{a_i}=4-\frac{2+n}{2^{n-1}}$，令$4-\frac{2+n}{2^{n-1}}>\frac{509}{128}$，即$\frac{2+n}{2^{n-1}}<\frac{3}{128}$，

设$f(x)=\frac{2+x}{2^{x-1}}(x>0)$，则$f'(x)=\frac{2^{x-1}-(2+x)\cdot 2^{x-1}\cdot\ln 2}{\left(2^{x-1}\right)^2}=\frac{1-(2+x)\cdot\ln 2}{2^{x-1}}$，

$\because x>0$，$\therefore f'(x)<0$，$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减，

$\therefore \left\{\frac{2+n}{2^{n-1}}\right\}$是递减数列，

$\because$当$n=10$时，$\frac{2+n}{2^{n-1}}=\frac{2+10}{2^{10-1}}=\frac{3}{128}$，

$\therefore$当$n>10$时，$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{a_i}>\frac{509}{128}$，

$\therefore$使得$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{a_i}>\frac{509}{128}$成立的最小的$n$的值为 11.

故选：D.

8．D

【分析】根据指对混合型不等式，利用指对运算将不等式$a(\ln x+\ln a)\leq 2e^{2x}$转化成$ax\ln\left(ax\right)\leq 2xe^{2x}$，根据结构相同设函数$f\left(x\right)=xe^{x},x\in\mathbf{R}$，利用函数的单调性及取值情况，将问题转化为$a\leq\frac{e^{2x}}{x}$，令$g\left(x\right)=\frac{e^{2x}}{x},x\in\left(0,+\infty\right)$，求导确定最值即可得实数$a$的取值范围.

【详解】依题意得，$ax\ln\left(ax\right)\leq 2xe^{2x}$，故$e^{\ln(ax)}\ln\left(ax\right)\leq 2xe^{2x}$，

令$f\left(x\right)=xe^{x},x\in\mathbf{R}$，则$f'\left(x\right)=\left(x+1\right)e^{x}$，令$f'\left(x\right)=0$可得$x=-1$，

所以$x\in\left(-\infty,-1\right)$时，$f'\left(x\right)<0$，则$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,-1\right)$上单调递减，$x\in\left(-1,+\infty\right)$时，$f'\left(x\right)>0$，则$f\left(x\right)$在$\left(-1,+\infty\right)$上单调递增；

且当$x<0$时，$f\left(x\right)<0$，当$x>0$时，$f\left(x\right)>0$；

则由$f\left(\ln ax\right)\leq f\left(2x\right)\left(x>0\right)$，得$\ln\left(ax\right)\leq 2x$，则$a\leq\frac{e^{2x}}{x}$

令$g\left(x\right)=\frac{e^{2x}}{x},x\in\left(0,+\infty\right)$，则$g'\left(x\right)=\frac{\left(2x-1\right)e^{2x}}{x^{2}}$，

故当$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时，$g'\left(x\right)<0$，$g\left(x\right)$单调递减，当$x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$时，$g'\left(x\right)>0,g\left(x\right)$单调递增，

故$\left[g\left(x\right)\right]_{\min}=g\left(\frac{1}{2}\right)=2e$，则$a\leq 2e$，则实数$a$的取值范围为$a\in\left(0,2e\right]$.

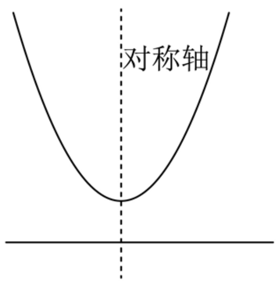
故选：D.

9．BD

【分析】分别讨论$\Delta\leq 0$和$\Delta>0$两种情况，结合二次函数的图像分析，即可得到答案.

【详解】①当$\Delta=(m-2)^{2}-4\leq 0$，即$0\leq m\leq 4$时，$f\left(x\right)=\left|x^{2}-\left(m-2\right)x+1\right|=x^{2}-\left(m-2\right)x+1$，

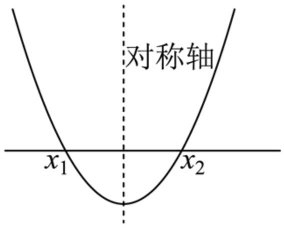
所以$f(x)$的对称轴为$x=\frac{m-2}{2}$，则$f(x)$的图象如下：



结合图象可知，要使函数$f\left(x\right)=\left|x^{2}-\left(m-2\right)x+1\right|$在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$上单调，则$\frac{m-2}{2}\geq\frac{1}{2}$或

$\frac{m-2}{2} \leq -\frac{1}{2}$，解得：$m \geq 3$ 或 m£1，即 $3 \leqslant m \leqslant 4$ 或 $0 \leq m \leq 1$；

②当 $\Delta = (m-2)^2 - 4 > 0$，即 $m < 0$ 或 $m > 4$，令 $h(x) = x^2 - (m-2)x + 1$，则 $h(x)$ 的对称轴为 $x = \frac{m-2}{2}$，则 $h(x)$ 的图象如下：



结合图象可知，要使函数 $f(x) = \left|x^2 - (m-2)x + 1\right|$ 在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 上单调，

则 $\begin{cases} \frac{1}{2} \leq \frac{m-2}{2} \\ h(\frac{1}{2}) \geq 0 \end{cases}$，或 $\begin{cases} \frac{1}{2} \leq \frac{m-2}{2} \\ h(-\frac{1}{2}) \leq 0 \end{cases}$，或 $\begin{cases} -\frac{1}{2} \geq \frac{m-2}{2} \\ h(\frac{1}{2}) \leq 0 \end{cases}$，或 $\begin{cases} -\frac{1}{2} \geq \frac{m-2}{2} \\ h(-\frac{1}{2}) \geq 0 \end{cases}$

解得：$4 < m \leqslant \frac{9}{2}$，或 $-\frac{1}{2} \leq m < 0$，

综上：$3 \leq m \leq \frac{9}{2}$ 或 $-\frac{1}{2} \leqslant m \leqslant 1$；

故选：BD

10．ACD

【分析】根据三角函数图像平移及正弦函数性质可逐一判定各选项.

【详解】对于 A：若 $\omega = 3$，$\varphi = \frac{\pi}{3}$，则 $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$，将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{5\pi}{18}$ 个单位后得 $g(x) = \sin\left(3x - \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 3x$，

其图象关于 y 轴对称，故 A 正确；

对于 B：依题意，当 $x = \frac{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{4}$ 时，$f(x)$ 有最小值，所以 $\sin\left(\frac{\omega\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = -1$，

所以 $\frac{\omega\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}(k \in Z)$，所以 $\omega = 8k + \frac{14}{3}(k \in Z)$，

因为 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ 上有最小值，无最大值，所以 $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{\omega}$，即 $\omega \leq 12$，

令 $k = 0$，得 $\omega = \frac{14}{3}$，故 B 错误；

对于 C：依题意有$\begin{cases}\dfrac{\omega\pi}{4}+\varphi=2k_1\pi+\dfrac{\pi}{2}\left(k_1\in Z\right)\\ \dfrac{5\omega\pi}{3}+\varphi=k_2\pi\left(k_2\in Z\right)\\ \dfrac{T}{2}=\dfrac{\pi}{\omega}\geq\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7\pi}{12}\end{cases}$，则$\omega=\dfrac{6}{17}$或$\dfrac{18}{17}$，故 C 正确；

对于 D：因为$f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}$，则$\omega x+\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\left(k\in Z\right)$或$\omega x+\varphi=2k\pi+\dfrac{5\pi}{6}\left(k\in Z\right)$，

则$x=\dfrac{-\varphi+2k\pi}{\omega}+\dfrac{\pi}{6\omega}\left(k\in Z\right)$或$x=\dfrac{-\varphi+2k\pi}{\omega}+\dfrac{5\pi}{6\omega}\left(k\in Z\right)$，

则需要上述相邻三个根的距离不超过$\dfrac{\pi}{2}$，相邻四个根（距离较小的四个）的距离超过$\dfrac{\pi}{2}$，

即$\begin{cases}\dfrac{2\pi}{\omega}\leq\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{8\pi}{3\omega}>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，解得$\omega\in\left[4,\dfrac{16}{3}\right)$，故 D 正确；

故选：ACD．

11．BCD

【分析】分别设定抛物线C和直线MN的方程，设$M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$，联立求得关于点M,N坐标的韦达定理形式，进而转化各个选项即可；选项 A，将$\dfrac{|MF|}{|NF|}=\dfrac{3}{4}$转化为$\dfrac{y_1}{y_2}=-\dfrac{3}{4}$，求解即可；选项 B，$S_{\triangle OMN}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{p}{2}\times|y_2-y_1|$，求解即可；选项 C，求得点$M,N$的坐标，进而求得点$M,N$到直线$y=-4$的距离，求解即可；选项 D，设点$F$到直线$MN$的距离为$d$，可得$\left|\sin\angle FMN-\sin\angle FNM\right|=d\left|\dfrac{1}{|FM|}-\dfrac{1}{|FN|}\right|$，求解即可.

【详解】对 A，设抛物线C：$y^2=2px$，设直线MN：$x=ty+\dfrac{p}{2}\left(t\neq0\right)$，

设$M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$，联立$\begin{cases}y^2=2px\\ x=ty+\dfrac{p}{2}\end{cases}$，

则$y^2-2pty-p^2=0$，$y_1+y_2=2pt,y_1y_2=-p^2$，

由于$\dfrac{|MF|}{|NF|}=\dfrac{3}{4}$，可得$\dfrac{y_1}{y_2}=-\dfrac{3}{4}$，代入上式得：$\dfrac{1}{4}y_2=2pt,-\dfrac{3}{4}y_2^2=-p^2$，

解得：$t^2=\dfrac{1}{48}$，且直线MN的斜率为$\dfrac{1}{t}$，

设直线MN的倾斜角为α，则$\tan^2\alpha=48$，且$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，

则$\cos^2\alpha=\frac{1}{49}$，解得$\cos\alpha=\pm\frac{1}{7}$，故 A 错误；

对 B，设抛物线 C：$y^2=2px$，且直线MN的倾斜角为$45°$，

设直线MN：$x=y+\frac{p}{2}$，

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，联立$\begin{cases}y^2=2px\\x=y+\frac{p}{2}\end{cases}$，

则$y^2-2py-p^2=0$，$y_1+y_2=2p,y_1y_2=-p^2$，

$S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}\times\frac{p}{2}\times|y_2-y_1|=\frac{p}{4}\times\sqrt{(2p)^2-4(-p^2)}=\frac{\sqrt{2}}{2}p^2$，故 B 正确；

对 C，由于点$A(4,4)$在抛物线 C 上，此时抛物线 C：$y^2=4x$，

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

设直线 AM：$x-4=t(y-4)(t\neq0)$，

联立$\begin{cases}y^2=4x\\x-4=t(y-4)\end{cases}$

则$y^2-4ty+16(t-1)=0$，解得$y_1=4$（舍去，此时M,A重合）或$y_1=4t-4$，

则点 M 到直线$y=-4$的距离为$|y_1+4|=|4t|$，

同理可得，因为$AM\perp AN$，则N到直线$y=-4$的距离为$\left|4\cdot\frac{1}{-t}\right|=\left|\frac{4}{t}\right|$，

故所求距离之积为$\left|4t\cdot\frac{4}{t}\right|=16$，故 C 正确；

对 D，由于点$A(2,2)$在抛物线 C 上，此时抛物线 C：$y^2=2x$，

设直线 AM：$y-2=k(x-2)$，

与抛物线方程联立可得$ky^2-2y+4-4k=0$，

则$y_M\cdot2=\frac{4-4k}{k}$，则$y_M=\frac{2-2k}{k}$，用$-k$替换可得$y_N=-\frac{2+2k}{k}$，

则$k_{MN}=\frac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\frac{y_M-y_N}{\frac{y_M^2}{2}-\frac{y_N^2}{2}}=\frac{2}{y_M+y_N}=-\frac{1}{2}$，

则$M\left(\frac{2(1-k)^2}{k^2},\frac{2-2k}{k}\right)$，$N\left(\frac{2(1+k)^2}{k^2},-\frac{2+2k}{k}\right)$，