

第三章 函数的概念与性质 章末题型归纳总结

目录

模块一：本章知识思维导图

模块二：典型例题

经典题型一：求具体函数与抽象函数的定义域

经典题型二：求函数的解析式

经典题型三：求函数的值域

经典题型四：函数的单调性

经典题型五：函数的奇偶性

经典题型六：函数性质的综合应用

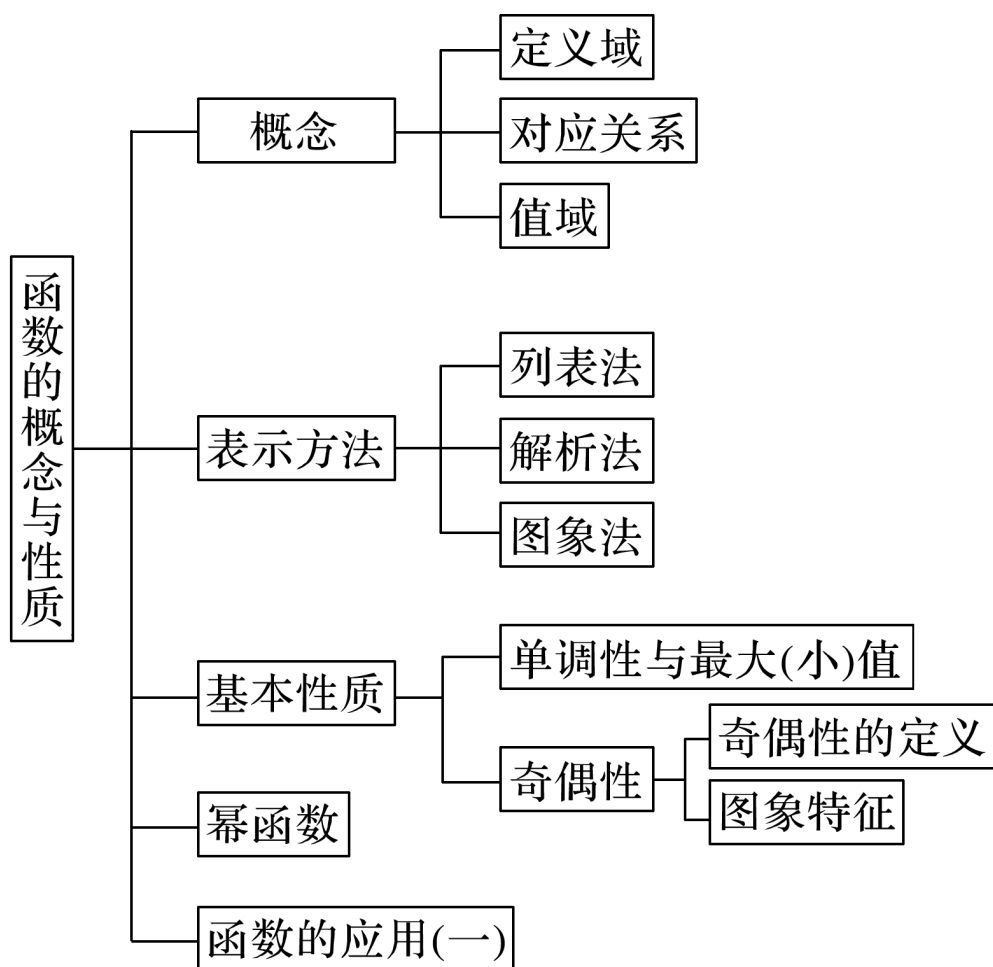
经典题型七：幂函数

经典题型八：函数的实际应用

模块三：数学思想方法

①分类讨论思想②转化与化归思想③数形结合思想

模块一：本章知识思维导图



【解析】因为 $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1-x}$ ，则 $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ ，解得 $x \leq 1$ 且 $x \neq 0$ ，

所以函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$ 。

故选：C。

【变式 1-2】（2024·高一·浙江丽水·阶段练习）已知函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $[-1, 4]$ ，则 $y = \frac{f(2x+1)}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域为（ ）

A. $\left[-1, \frac{3}{2}\right)$

B. $\left(1, \frac{3}{2}\right]$

C. $(1, 9]$

D. $\left[-5, \frac{3}{2}\right]$

【答案】B

【解析】因为 $y = f(x)$ 的定义域是 $[-1, 4]$ ，

所以要使得 $y = \frac{f(2x+1)}{\sqrt{x-1}}$ 有意义，

需满足 $\begin{cases} -1 \leq 2x+1 \leq 4 \\ x-1 > 0 \end{cases}$ ，解得 $1 < x \leq \frac{3}{2}$ 。

则函数 $y = \frac{f(2x+1)}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域为 $\left(1, \frac{3}{2}\right]$ 。

故选：B

【变式 1-3】（2024·高一·浙江·阶段练习）已知函数 $f(x)$ 的定义域和值域都是 $[0, 1]$ ，则函数 $f(\sqrt{x+1})$ 的定义域和值域分别为（ ）

A. $[1, \sqrt{2}]$ 和 $[-1, 0]$

B. $[1, \sqrt{2}]$ 和 $[0, 1]$

C. $[-1, 0]$ 和 $[-1, 0]$

D. $[-1, 0]$ 和 $[0, 1]$

【答案】D

【解析】因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$ ，

则 $0 \leq \sqrt{x+1} \leq 1$ ，即 $-1 \leq x \leq 0$ ，

所以函数 $f(\sqrt{x+1})$ 的定义域为 $[-1, 0]$ 。

又函数 $f(x)$ 的值域为 $[0, 1]$ ，

所以 $f(\sqrt{x+1})$ 的值域为 $[0, 1]$ 。

故选：D。

【变式 1-4】(2024·高一·山东枣庄·阶段练习) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, +\infty)$ ，则函数 $y = \frac{f(x-2)}{x-5}$ 的定义域为 ()

A. $(-2, 5) \cup (5, +\infty)$

B. $[-2, 5) \cup (5, +\infty)$

C. $(2, 5) \cup (5, +\infty)$

D. $[2, 5) \cup (5, +\infty)$

【答案】D

【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, +\infty)$ ，

则 $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-5 \neq 0 \end{cases}$ ，则 $x \geq 2$ 且 $x \neq 5$ ，

则函数 $y = \frac{f(x-2)}{x-5}$ 的定义域为 $[2, 5) \cup (5, +\infty)$ 。

故选：D。

【变式 1-5】(2024·高三·福建宁德·开学考试) 已知函数 $y = f(2x-1)$ 的定义域是 $[-1, 3]$ ，则 $y = \frac{f(x)}{\sqrt{x+2}}$ 的定义域是 ()

A. $(-2, 5]$

B. $(-2, 3]$

C. $[-1, 3]$

D. $[-2, 5]$

【答案】A

【解析】由函数 $y = f(2x-1)$ 的定义域是 $[-1, 3]$ ，得 $-3 \leq 2x-1 \leq 5$ ，

因此在函数 $y = \frac{f(x)}{\sqrt{x+2}}$ 中， $\begin{cases} -3 \leq x \leq 5 \\ x+2 > 0 \end{cases}$ ，解得 $-2 < x \leq 5$ ，

所以所示函数的定义域为 $(-2, 5]$ 。

故选：A

经典题型二：求函数的解析式

【典例 2-1】(2024·高一·湖北武汉·阶段练习) (1) 已知 $f(x)$ 是一次函数，且 $f(f(x)) = 9x + 4$ ，求 $f(x)$ 的解析式；

(2) 已知函数 $f(x+1) = x^2 - 2x$ ，求 $f(x)$ 的解析式；

(3) 已知函数 $y = f(x)$ 满足 $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$ ，求函数 $y = f(x)$ 的解析式；

【解析】(1) 设 $f(x) = kx + b (k \neq 0)$ ，

则 $f(f(x)) = k(kx + b) + b = k^2x + kb + b = 9x + 4$ 。

$$\therefore \begin{cases} k^2 = 9 \\ kb + b = 4 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = 3 \\ b = 1 \end{cases}, \text{或} \begin{cases} k = -3 \\ b = -2 \end{cases},$$

$$\therefore f(x) = 3x + 1 \text{ 或 } f(x) = -3x - 2.$$

(2) 令 $x+1=t$, 则 $x=t-1, t \in \mathbf{R}$,

$$\therefore f(t) = (t-1)^2 - 2(t-1) = t^2 - 4t + 3,$$

$$\text{即 } f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

(3) 在已知等式中, 将 x 换成 $\frac{1}{x}$, 得 $f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{1}{x}$, 与已知方程联立,

$$\text{得} \begin{cases} f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x \\ f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{1}{x} \end{cases}, \text{解得 } f(x) = -\frac{x}{3} + \frac{2}{3x} (x \neq 0).$$

【典例 2-2】(2024·高一·天津宝坻·阶段练习) (1) 已知 $f(x)$ 是二次函数, 且满足

$$f(0)=1, f(x+1)-f(x)=2x, \text{ 求 } f(x) \text{ 的表达式;}$$

(2) 已知 $f(2x+1)=4x^2+4x$, 求 $f(x)$ 的表达式.

【解析】(1) 令 $f(x)=ax^2+bx+c(a \neq 0)$,

因为 $f(0)=1$, 所以 $c=1$, 则 $f(x)=ax^2+bx+1$.

$$\text{由题意可知: } f(x+1)-f(x)=a(x+1)^2+b(x+1)+1-(ax^2+bx+1)=2x$$

$$\text{即 } 2ax+a+b=2x, \text{ 可得 } \begin{cases} 2a=2 \\ a+b=0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases},$$

$$\text{所以 } f(x)=x^2-x+1;$$

(2) 因为 $f(2x+1)=4x^2+4x=(2x+1)^2-1$, 所以 $f(x)=x^2-1$.

【变式 2-1】(2024·高三·黑龙江佳木斯·开学考试) 求下列函数解析式

(1) 函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=x^2+2x+2$, 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 函数 $f(x)$ 满足 $2f(x)-f(-x)=x^2$, 求函数 $f(x)$ 的解析式.

【解析】(1) 令 $t=x+1$, 则 $x=t-1(t \in \mathbf{R})$, 又 $f(x+1)=x^2+2x+2$,

$$\text{所以 } f(t)=(t-1)^2+2(t-1)+2=t^2+1,$$

所以函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=x^2+1$.

(2) $\because 2f(x)-f(-x)=x^2$,

∴用 $-x$ 替换上式中的 x ，得到 $2f(-x) - f(x) = (-x)^2 = x^2$ ，

解方程组 $\begin{cases} 2f(x) - f(-x) = x^2 \\ 2f(-x) - f(x) = x^2 \end{cases}$ ，得 $f(x) = x^2$ 。

【变式 2-2】（2024·高三·海南·开学考试）（1）已知 $f(\sqrt{x}+2) = x + 4\sqrt{x}$ ，求函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）已知 $f(x)$ 是二次函数，且满足 $f(0)=1$ ， $f(x+1)=f(x)+2x$ ，求函数 $f(x)$ 的解析式；

（3）已知 $f(x)+2f(-x)=2x+3$ ，求 $f(x)$ 的解析式。

【解析】（1）设 $t = \sqrt{x} + 2$ ，则 $t \geq 2$ ， $\sqrt{x} = t - 2$ ，即 $x = (t - 2)^2$ ，

所以 $f(t) = (t - 2)^2 + 4(t - 2) = t^2 - 4$ ，所以 $f(x) = x^2 - 4 (x \geq 2)$ 。

（2）因为 $f(x)$ 是二次函数，所以设 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 。由 $f(0)=1$ ，得 $c=1$ 。

由 $f(x+1) = f(x) + 2x$ ，得 $a(x+1)^2 + b(x+1) + 1 = ax^2 + bx + 1 + 2x$ ，

整理得 $(2a-2)x + (a+b) = 0$ ，

所以 $\begin{cases} 2a-2=0 \\ a+b=0 \end{cases}$ ，所以 $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$ ，所以 $f(x) = x^2 - x + 1$ 。

（3）用 $-x$ 替换 $f(x) + 2f(-x) = 2x + 3$ 中的 x ，得 $f(-x) + 2f(x) = -2x + 3$ ，

由 $\begin{cases} f(x) + 2f(-x) = 2x + 3 \\ 2f(x) + f(-x) = -2x + 3 \end{cases}$ ，解得 $f(x) = -2x + 1$ 。

【变式 2-3】（2024·高一·全国·课堂例题）（1）已知 $f(\sqrt{x}+1) = x + 2\sqrt{x}$ ，求 $f(x)$ ；

（2）已知 $f(x)$ 为二次函数，且 $f(x+1) + f(x-1) = 2x^2 - 4x$ ，求 $f(x)$ ；

（3）已知函数 $f(x)$ 对于任意的 x 都有 $2f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = x (x \neq 0)$ ，求 $f(x)$ 。

【解析】（1）方法一（换元法）：

令 $t = \sqrt{x} + 1$ ，则 $x = (t - 1)^2$ ， $t \geq 1$ ，

所以 $f(t) = (t - 1)^2 + 2(t - 1) = t^2 - 1 (t \geq 1)$ ，

所以 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = x^2 - 1 (x \geq 1)$ 。

方法二（配凑法）：

$$f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}=x+2\sqrt{x}+1-1=(\sqrt{x}+1)^2-1.$$

因为 $\sqrt{x}+1 \geq 1$,

所以 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=x^2-1(x \geq 1)$.

(2) 设 $f(x)=ax^2+bx+c(a \neq 0)$,

则 $f(x+1)+f(x-1)$

$$=a(x+1)^2+b(x+1)+c+a(x-1)^2+b(x-1)+c$$

$$=2ax^2+2bx+2a+2x=2x^2-4x,$$

$$\text{所以 } \begin{cases} 2a=2 \\ 2b=-4 \\ 2a+2c=0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-1 \end{cases},$$

所以 $f(x)=x^2-2x-1$.

$$(3) f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x,$$

$$\text{令 } x=\frac{1}{x}, \text{ 得 } f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{1}{x},$$

$$\text{于是得到关于 } f(x) \text{ 与 } f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ 的方程组 } \begin{cases} f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x \\ f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{1}{x} \end{cases},$$

$$\text{解得 } f(x)=\frac{2}{3x}-\frac{x}{3}(x \neq 0).$$

【变式 2-4】 (2024·高一·上海·课堂例题) (1) 已知 $f(x)$ 是一次函数, 且 $f(f(x))=4x-1$, 求 $f(x)$ 的表达式;

(2) 已知 $f(x+1)=x^2-2x$, 求 $f(x)$ 的表达式;

(3) 已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$, 求 $f(x)$ 的表达式;

(4) 已知 $f(x)+2f(-x)=x^2+2x$, 求 $f(x)$ 的表达式.

【解析】 (1) 设 $f(x)=ax+b(a \neq 0)$.

$$\therefore f(ax+b)=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b=4x-1,$$

$$\therefore \begin{cases} a^2 = 4 \\ ab + b = -1 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = 2 \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases} \text{或} \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases},$$

$$\therefore f(x) = 2x - \frac{1}{3} \text{或} f(x) = -2x + 1.$$

$$(2) \text{ 令 } t = x + 1 \text{ 则 } x = t - 1.$$

$$\therefore f(t) = (t-1)^2 - 2(t-1) = t^2 - 4t + 3,$$

$$\therefore f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

$$(3) \text{ 令 } t = \sqrt{x} + 1, t \geq 1, \text{ 则 } \sqrt{x} = t - 1, \text{ 即 } x = (t-1)^2.$$

$$\therefore f(t) = (t-1)^2 + 2\sqrt{(t-1)^2},$$

$$\therefore f(t) = (t-1)^2 + 2(t-1) = t^2 - 2t + 1 + 2t - 2 = t^2 - 1,$$

$$\therefore f(x) = x^2 - 1 (x \geq 1).$$

$$(4) \therefore f(x) + 2f(-x) = x^2 + 2x, \text{ ①}$$

$$\therefore f(-x) + 2f(x) = x^2 - 2x. \text{ ②}$$

$$\text{①} - 2 \times \text{②} \text{ 得 } -3f(x) = -x^2 + 6x,$$

$$\therefore f(x) = \frac{x^2}{3} - 2x.$$

经典题型三：求函数的值域

【典例 3-1】(2024·高一·全国·课堂例题) 求下列函数的值域：

$$(1) y = 2x + 1, x \in \{1, 2, 3, 4, 5\};$$

$$(2) y = \sqrt{x} + 1;$$

$$(3) y = x^2 - 4x + 6, x \in [1, 5];$$

$$(4) y = \frac{3x+2}{x-1}.$$

【解析】(1) $y = 2x + 1$, 且 $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 则 $y \in \{3, 5, 7, 9, 11\}$.

所以函数的值域为 $\{3, 5, 7, 9, 11\}$.

(2) 函数 $y = \sqrt{x} + 1$ 的定义域为 $[0, +\infty)$, 由 $\sqrt{x} \geq 0$, 得 $\sqrt{x} + 1 \geq 1$,

所以 $y = \sqrt{x} + 1$ 的值域为 $[1, +\infty)$.

(3) 函数 $y = x^2 - 4x + 6$ 图象的对称轴为 $x = 2$, 而 $x \in [1, 5]$,

当 $x = 2$ 时, $y_{\min} = 2$, 当 $x = 5$ 时, $y_{\max} = 11$,

所以函数的值域为 $[2, 11]$.

(4) 函数 $y = \frac{3x+2}{x-1}$ 的定义域为 $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$,

$$y = \frac{3x+2}{x-1} = \frac{3(x-1)+5}{x-1} = 3 + \frac{5}{x-1} \neq 3,$$

所以函数的值域为 $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

【典例 3-2】(2024·高一·上海·随堂练习) 求下列函数的值域:

(1) $f(x) = 3x^2 - x + 2, x \in [1, 3]$;

(2) $f(x) = \sqrt{-x^2 - 6x - 5}$;

(3) $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$.

【解析】(1) 因为 $f(x) = 3x^2 - x + 2 = 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{23}{12}, x \in [1, 3]$,

所以 $f(x)$ 在 $x \in [1, 3]$ 上单调递增,

又 $f(1) = 4, f(3) = 26$,

$\therefore$ 函数 $f(x) = 3x^2 - x + 2, x \in [1, 3]$ 的值域为 $[4, 26]$.

(2) 令 $-x^2 - 6x - 5 \geq 0$, 即 $(x+1)(x+5) \leq 0$, 解得 $-5 \leq x \leq -1$,

所以 $f(x) = \sqrt{-x^2 - 6x - 5}$ 的定义域为 $[-5, -1]$,

又 $\because -x^2 - 6x - 5 = -(x+3)^2 + 4 \leq 4, \therefore 0 \leq -x^2 - 6x - 5 \leq 4$,

故 $\sqrt{-x^2 - 6x - 5} \in [0, 2]$,

$\therefore f(x) = \sqrt{-x^2 - 6x - 5}$ 的值域为 $[0, 2]$.

(3) 因为 $f(x) = \frac{3x+1}{x-2} = \frac{3(x-2)+7}{x-2} = 3 + \frac{7}{x-2}$,

又 $\frac{7}{x-2} \neq 0$, 所以 $f(x) \neq 0$,

∴ 函数 $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ 的值域为 $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

【变式 3-1】(2024·高一·河北邯郸·期中) (1) 求当 $x > 0$ 时, $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x}$ 的值域.

(2) 已知 $x > 1$, 求函数 $g(x) = \frac{x^2 + 7x + 10}{x-1}$ 的最小值.

【解析】(1) $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x} = x + \frac{4}{x} - 2 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} - 2 = 2$,

当且仅当 $x = 2$ 时等号成立, 则函数值域为 $[2, +\infty)$.

(2) 因为 $x > 1$, $g(x) = \frac{x^2 + 7x + 10}{x-1} = \frac{(x-1)^2 + 9(x-1) + 18}{x-1} = (x-1) + \frac{18}{x-1} + 9$
 $\geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{18}{x-1}} + 9 = 6\sqrt{2} + 9$, 当且仅当 $(x-1) = \frac{18}{x-1}$ 时, 即 $x = 1 + 3\sqrt{2}$ 时, 等号成立,

所以函数的最小值为 $6\sqrt{2} + 9$, 此时 $x = 1 + 3\sqrt{2}$.

【变式 3-2】(2024·高一·上海·课堂例题) 求函数 $y = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$ 的最小值.

【解析】因为 $|x-1| + |x-4| \geq |x-1+4-x| = 3$, $|x-2| + |x-3| \geq |x-2+3-x| = 1$,

所以 $y = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4| \geq 3 + 1 = 4$,

等号当且仅当 $\begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$, 即 $2 \leq x \leq 3$ 时成立,

所以函数最小值为 4.

【变式 3-3】(2024·高一·浙江杭州·期中) 求下列函数的值域:

(1) $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x-1} (x > 1)$

(2) $y = 3x - \sqrt{x+1}$

(3) $f(x) = 3x + 1 + \frac{9}{3x-2} \left(x < \frac{2}{3} \right)$

【解析】(1) 因为 $x > 1$, 则 $x-1 > 0$,

可得 $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x-1} = (x-1) + \frac{1}{x-1} - 2 \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}} - 2 = 0$,

当且仅当 $x-1 = \frac{1}{x-1}$, 即 $x = 2$ 时, 等号成立,

所以函数的值域为 $[0, +\infty)$.

(2) 令 $t = \sqrt{x+1} \geq 0$, 则 $x = t^2 - 1$,

可得 $y = 3(t^2 - 1) - t = 3t^2 - t - 3 = 3\left(t - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{37}{12} \geq -\frac{37}{12}$,

当 $t = \frac{1}{6}$ 时, 等号成立,

所以函数的值域为 $\left[-\frac{37}{12}, +\infty\right)$.

(3) 因为 $x < \frac{2}{3}$, 则 $2 - 3x > 0$,

可得 $-f(x) = -\left(3x + 1 + \frac{9}{3x - 2}\right) = (2 - 3x) + \frac{9}{2 - 3x} - 3 \geq 2\sqrt{(2 - 3x) \cdot \frac{9}{2 - 3x}} - 3 = 3$,

当且仅当 $2 - 3x = \frac{9}{2 - 3x}$, 即 $x = -\frac{1}{3}$ 时, 等号成立,

即 $f(x) \leq -3$, 所以函数的值域为 $(-\infty, -3]$.

【变式 3-4】 (2024·高一·上海·专题练习) 已知函数 $f(x) = \frac{2x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$ 的值域为 $[1, 3]$, 求 a, b 的值

【解析】 由题意 $y = f(x) = \frac{2x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$ 定义域为 R , 则 $(y - 2)x^2 - ax + y - b = 0$ 在 R 上有解, 当 $y = 2$ 符合题意, 当 $y \neq 2, \Delta = a^2 - 4(y - 2)(y - b) \geq 0$, 即 $(y - 2)(y - b) - \frac{a^2}{4} \leq 0$ 的解集为 $[1, 3]$, 故 1 和 3 为关于 y 的

二次方程 $(y - 2)(y - b) - \frac{a^2}{4} = 0$ 的两个根所以 $\begin{cases} -(1 - b) = \frac{a^2}{4} \\ (3 - b) = \frac{a^2}{4} \end{cases}$

解得 $a = \pm 2, b = 2$

【变式 3-5】 (2024·高一·全国·课后作业) 求下列函数的值域.

(1) $y = \sqrt{x} - 2$;

(2) $y = \frac{x^2 - x}{x^2 - x + 1}$;

(3) $y = x - \sqrt{1 - 2x}$;

(4) $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - x - 1}$;

(5) $y = \frac{x^2 + 8}{x - 1} \quad (x > 1)$.

【解析】 (1) 因为 $\sqrt{x} \geq 0$, 所以 $\sqrt{x} - 2 \geq -2$. 故值域为 $[-2, +\infty)$.

(2) 因为 $y = 1 - \frac{1}{x^2 - x + 1}$, 且 $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$, 所以 $0 < \frac{1}{x^2 - x + 1} \leq \frac{4}{3}$, 所以 $-\frac{1}{3} \leq y < 1$

，故函数的值域为 $\left[-\frac{1}{3}, 1\right)$ 。

(3) 令 $\sqrt{1-2x}=t$ ，则 $t \geq 0$ ，且 $x = \frac{1-t^2}{2}$ ，

所以 $y = -\frac{1}{2}(t+1)^2 + 1 \leq \frac{1}{2}$ ($t \geq 0$)。故函数的值域 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ 。

(4) $y = \frac{x^2-4x+3}{2x^2-x-1} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(2x+1)} = \frac{x-3}{2x+1}$ ，其中 $x \neq 1$ ， $\frac{x-3}{2x+1} = \frac{\frac{1}{2}(2x+1) - \frac{7}{2}}{2x+1} = \frac{1}{2} - \frac{7}{2(2x+1)}$ ，

当 $x=1$ 时， $\frac{x-3}{2x+1} = \frac{1-3}{2 \times 1+1} = -\frac{2}{3}$ 。

又因为 $\frac{7}{2(2x+1)} \neq 0$ ，所以 $y = \frac{x-3}{2x+1} \neq \frac{1}{2}$ 。

故函数的值域为 $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 。

(5) 因为 $x > 1$ ，所以 $x-1 > 0$ ，所以

$$y = \frac{x^2+8}{x-1} = \frac{(x-1)^2+2(x-1)+9}{x-1} = x-1 + \frac{9}{x-1} + 2 \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{9}{x-1}} + 2 = 8，$$

当且仅当 $x-1 = \frac{9}{x-1}$ ，即 $x=4$ 时，取等号，即 y 取得最小值 8。

故函数的值域为 $[8, +\infty)$ 。

【变式 3-6】 (2024·高一·广东佛山·阶段练习) 完成下列各小题：

(1) 若正数 x, y 满足 $2x+y+6=xy$ ，求 $x+y$ 的最小值。

(2) 已知 $x > 1$ ，求 $\frac{x^2+7x+10}{x-1}$ 的最小值。

(3) 已知定义在 $(0, +\infty)$ 的函数 $f(x) = 2-3x-\frac{4}{x}$ ，求函数的值域

【解析】 (1) 由题得，正数 x, y 满足 $2x+y+6=xy$ ，

因为 $2x+y+6=xy$ ，所以 $\begin{cases} y = \frac{2x+6}{x-1} > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 1$ ，

所以 $x+y = x + \frac{2x+6}{x-1} = x+2 + \frac{8}{x-1} = (x-1) + \frac{8}{x-1} + 3 \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{8}{x-1}} + 3 = 4\sqrt{2} + 3$ ；

当且仅当 $(x-1) = \frac{8}{x-1}$ ，得 $(x-1)^2 = 8$ ，即 $x = 1+2\sqrt{2}$ 时，等号成立；

所以 $x+y$ 的最小值为 $4\sqrt{2} + 3$ 。

(2) 因为 $x > 1$ ，所以 $x-1 > 0$ ，令 $t = x-1$ ，所以 $t > 0$ ，

$$\text{所以 } \frac{x^2+7x+10}{x-1} = \frac{(t+1)^2+7(t+1)+10}{t} = \frac{t^2+9t+18}{t} = t + \frac{18}{t} + 9 \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{18}{t}} + 9 = 9 + 6\sqrt{2},$$

当且仅当 $t=3\sqrt{2}$, 即 $x=1+3\sqrt{2}$ 时, 等号成立;

所以 $x>1$ 时, $\frac{x^2+7x+10}{x-1}$ 的最小值为 $9+6\sqrt{2}$.

(3) 因为 $x \in (0, +\infty)$, 所以 $x > 0$

$$\text{所以 } 3x > 0, \frac{4}{x} > 0$$

$$\text{因此 } 3x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{3x \times \frac{4}{x}} = 4\sqrt{3}$$

当且仅当 $3x = \frac{4}{x}$ 时, 取等号, 即 $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时取等号,

$$\text{因为 } 3x + \frac{4}{x} \geq 4\sqrt{3}, \text{ 所以 } -3x - \frac{4}{x} \leq -4\sqrt{3}$$

$$\text{所以 } 2 - 3x - \frac{4}{x} \leq 2 - 4\sqrt{3}, \text{ 即 } f(x) \leq 2 - 4\sqrt{3}$$

所以函数的值域为 $(-\infty, 2 - 4\sqrt{3}]$

经典题型四：函数的单调性

【典例 4-1】(2024·高一·湖南长沙·阶段练习) 已知函数 $f(x) = 2x + \frac{a}{x} (x \in \mathbf{R}, x \neq 0)$.

(1) 若 $a=1$, 求 $f(x)$ 在 $\{x \in \mathbf{R} | -1 \leq x < 0 \text{ 或 } 0 < x \leq 1\}$ 上的值域;

(2) 证明: 当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\infty, -\frac{\sqrt{2a}}{2}\right]$ 上单调递增.

【解析】(1) 当 $a=1, f(x) = 2x + \frac{1}{x}$,

若 $x \in (0, 1]$, 则 $f(x) = 2x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{1}{x}} = 2\sqrt{2}$, 等号当且仅当 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时成立;

若 $x \in [-1, 0)$, 则 $f(x) = 2x + \frac{1}{x} = -[(-2x) + (-\frac{1}{x})] \leq -2\sqrt{(-2x) \cdot (-\frac{1}{x})} = -2\sqrt{2}$, 等号当且仅当 $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时成立.

所以 $f(x)$ 在 $\{x \in \mathbf{R} | -1 \leq x < 0 \text{ 或 } 0 < x \leq 1\}$ 上的值域为: $(-\infty, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, +\infty)$.

(2) $\forall x_1, x_2 \in \left[-\infty, -\frac{\sqrt{2a}}{2}\right]$, 且 $x_1 < x_2$,

$$\text{有 } f(x_1) - f(x_2) = \left(2x_1 + \frac{a}{x_1}\right) - \left(2x_2 + \frac{a}{x_2}\right) = (2x_1 - 2x_2) + \left(\frac{a}{x_1} - \frac{a}{x_2}\right)$$

$$= (2x_1 - 2x_2) + \frac{a(x_2 - x_1)}{x_1x_2} = \frac{x_1 - x_2}{x_1x_2} (2x_1x_2 - a).$$

$$\text{由 } x_1, x_2 \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2a}}{2}\right] \text{ 得: } x_1 < -\frac{\sqrt{2a}}{2}, x_2 \leq -\frac{\sqrt{2a}}{2}.$$

所以 $x_1x_2 > \frac{a}{2} > 0, 2x_1x_2 - a > 0$, 又由 $x_1 < x_2$, 得 $x_1 - x_2 < 0$.

于是: $\frac{x_1 - x_2}{x_1x_2} (2x_1x_2 - a) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$.

所以, 函数 $f(x) = 2x + \frac{a}{x}$ 在区间 $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2a}}{2}\right]$ 上单调递增.

【典例 4-2】 (2024·高一·湖南邵阳·开学考试) 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $h(x)$ 满足: ① $h(1) = 2$; ②

$\forall x, y \in \mathbf{R}$, 均有 $h(x) - h(x-y) = y(2x-y)$, 函数 $g(x) = ax + b$, 若曲线 $g(x)$ 与 $h(x)$ 恰有一个交点且交点

横坐标为 1, 令 $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$.

(1) 求实数 a, b 的值及 $f(x)$;

(2) 判断函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调性, 不用说明理由;

(3) 已知 $0 < x_1 < x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 证明: $x_1 + x_2 > 2$.

【解析】 (1) 由 $\forall x, y \in \mathbf{R}$, 均有 $h(x) - h(x-y) = y(2x-y)$ 且 $h(1) = 2$,

令 $x = y = 1$, 可得 $h(0) = 1$,

令 $y = x$, 可得 $h(x) = x^2 + 1$.

因为曲线 $g(x)$ 与 $h(x)$ 恰有一个交点且交点横坐标为 1, 所以 $g(1) = a + b = 2$,

又因为曲线 $g(x)$ 与 $h(x)$ 恰有一个交点, 所以 $x^2 - ax + 1 - b = 0$ 有两个相等的实数根,

则 $\Delta = a^2 - 4(1-b) = 0$,

因为 $a + b = 2$, 可得 $a^2 - 4a + 4 = 0$, 解得 $a = 2, b = 0$,

所以 $g(x) = 2x$, 则 $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

(2) 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

设 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 且 $x_1 < x_2$,

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x_2) - f(x_1) &= \frac{2x_2}{x_2^2 + 1} - \frac{2x_1}{x_1^2 + 1} = \frac{2x_2(x_1^2 + 1) - 2x_1(x_2^2 + 1)}{(x_2^2 + 1)(x_1^2 + 1)} = \frac{2x_1^2x_2 + 2x_2 - 2x_1x_2^2 - 2x_1}{(x_2^2 + 1)(x_1^2 + 1)} \\ &= \frac{2x_1x_2(x_1 - x_2) + 2(x_2 - x_1)}{(x_2^2 + 1)(x_1^2 + 1)} = \frac{2(x_1x_2 - 1)(x_1 - x_2)}{(x_2^2 + 1)(x_1^2 + 1)}, \end{aligned}$$

其中 $(x_2^2 + 1)(x_1^2 + 1) > 0, x_1 - x_2 < 0$

当 $x_1, x_2 \in (0, 1)$ 时, $x_1x_2 - 1 < 0$, 则 $f(x_2) - f(x_1) > 0$, 即 $f(x_2) > f(x_1)$,

此时函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增;

当 $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ 时, $x_1x_2 - 1 > 0$, 则 $f(x_2) - f(x_1) < 0$, 即 $f(x_2) < f(x_1)$,

此时函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

(3) 证明: 因为 $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$,

由 $f(x_1) = f(x_2)$, 可得 $\frac{2x_1}{x_1^2 + 1} = \frac{2x_2}{x_2^2 + 1}$, 即 $\frac{2}{x_1 + \frac{1}{x_1}} = \frac{2}{x_2 + \frac{1}{x_2}}$,

所以 $x_1 + \frac{1}{x_1} = x_2 + \frac{1}{x_2}$, 整理得 $x_1x_2 = 1$,

又因为 $0 < x_1 < x_2$, 由基本不等式, 可得 $x_1 + x_2 > 2\sqrt{x_1x_2} = 2$.

【变式 4-1】(2024·高一·安徽阜阳·阶段练习) 函数 $f(x) = \begin{cases} (-a-5)x-2, & x \geq 2 \\ x^2 + 2(a-1)x - 3a, & x < 2 \end{cases}$, 若对任意

$x_1, x_2 \in \mathbb{R} (x_1 \neq x_2)$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 成立, 则实数 a 的取值范围为 ()

A. $[-4, -1]$

B. $[-4, -2]$

C. $(-5, -1]$

D. $[-5, -4]$

【答案】A

【解析】因为对任意 $x_1, x_2 \in \mathbb{R} (x_1 \neq x_2)$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 成立,

可得 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是单调递减的,

$$\text{则} \begin{cases} -a-5 < 0 \\ -(a-1) \geq 2 \\ 2^2 + 2(a-1) \times 2 - 3a \geq (-a-5) \times 2 - 2 \end{cases}, \text{解得 } -4 \leq a \leq -1.$$

故选：A

【变式 4-2】（2024·高一·江苏常州·期中）已知函数 $f(x) = 1 + \frac{1}{x-1+a}$ ，若对于任意 $1 < x_1 < x_2 < 2$ ，都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ ，则 a 的取值范围是（ ）

- A. $(-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$ B. $[0, +\infty)$
C. $(-1, 0)$ D. $(-\infty, -1)$

【答案】A

【解析】由任意 $1 < x_1 < x_2 < 2$ ，都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ ，知 $f(x) = 1 + \frac{1}{x-1+a}$ 在 $(1, 2)$ 单调递减，要使 $f(x) = 1 + \frac{1}{x-1+a}$ 在 $(1, 2)$ 单调递减，则 $1-a \leq 1$ 或 $1-a \geq 2$ ，即 $a \geq 0$ 或 $a \leq -1$ 。

故选：A.

【变式 4-3】（2024·高一·全国·课后作业）函数 $f(x) = -\frac{1}{x-2}$ 的单调增区间是（ ）。

- A. $(2, +\infty)$ B. $(-\infty, 2)$
C. $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ D. $(-\infty, 2), (2, +\infty)$

【答案】D

【解析】函数 $f(x) = -\frac{1}{x-2}$ 的定义域为 $\{x | x \neq 2\}$ ，
又 $f(x) = -\frac{1}{x-2}$ 的图象是由 $y = -\frac{1}{x}$ 向右平移 2 个单位而来，
 $y = -\frac{1}{x}$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ ，
所以 $f(x) = -\frac{1}{x-2}$ 的单调递增区间为 $(2, +\infty), (-\infty, 2)$ 。

故选：D

【变式 4-4】（2024·高一·吉林·阶段练习）如果函数 $y = x^2 + (1-a)x + 2$ 在区间 $(4, +\infty)$ 上单调递增，那么实数 a 的取值范围是（ ）

- A. $(-\infty, 9]$ B. $(-\infty, -3]$

C. $[5, +\infty)$

D. $(-\infty, -7]$

【答案】A

【解析】 $y = x^2 + (1-a)x + 2$ 开口向上，对称轴为 $x = -\frac{1-a}{2}$ ，

要想函数在区间 $(4, +\infty)$ 上单调递增，则需 $-\frac{1-a}{2} \leq 4$ ，解得 $a \leq 9$ ，

故实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 9]$

故选：A

【变式 4-5】（2024·高一·天津滨海新·阶段练习）已知函数 $f(x) = \begin{cases} (2a-1)x + 4a, & x < 1 \\ x^2 - ax + 5, & x \geq 1 \end{cases}$ 满足对任意 x_1, x_2 ，

当 $x_1 \neq x_2$ 时都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 成立，则 a 的取值范围是（ ）

A. $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$

B. $\left(\frac{1}{2}, 2\right]$

C. $[2, +\infty)$

D. $[1, 2]$

【答案】A

【解析】对任意 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ，当 $x_1 \neq x_2$ 时都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 成立，

所以函数 $f(x) = \begin{cases} (2a-1)x + 4a, & x < 1 \\ x^2 - ax + 5, & x \geq 1 \end{cases}$ 在 $\mathbb{R}$ 上是增函数，

所以 $\begin{cases} 2a-1 > 0 \\ \frac{a}{2} \leq 1 \\ 2a-1+4a \leq 1-a+5 \end{cases}$ ，解得 $\frac{1}{2} < a \leq 1$ ，所以实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 。

故选：A.

经典题型五：函数的奇偶性

【典例 5-1】（2024·高一·北京·阶段练习）已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数，当 $x \in (-\infty, 0)$

时， $f(x) = x - x^2$ ，则当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $-x^2 - x$

【解析】当 $x \in (0, +\infty)$ 时，可得 $x \in (-\infty, 0)$ ，

因为函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数，且 $x \in (-\infty, 0)$ 时， $f(x) = x - x^2$ ，

可得 $f(x) = f(-x) = (-x) - (-x)^2 = -x^2 - x$ ，

即当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) = -x^2 - x$.

故答案为: $-x^2 - x$.

【典例 5-2】(2024·高一·吉林·阶段练习) 若函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数, 又 $f(-2) = 0$, 则 $xf(x) < 0$ 的解集是_____.

【答案】 $(-2, 0) \cup (0, 2)$

【解析】 因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 则 $f(0) = 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数, 则在 $(0, +\infty)$ 上也单调递增,

又 $f(-2) = 0$, 故 $f(2) = -f(-2) = 0$,

当 $x < -2$ 或 $0 < x < 2$ 时, $f(x) < 0$, 当 $-2 < x < 0$ 或 $x > 2$ 时, $f(x) > 0$,

故当 $-2 < x < 0$ 时, $f(x) > 0$, 满足 $xf(x) < 0$,

当 $0 < x < 2$ 时, $f(x) < 0$, 满足 $xf(x) < 0$,

综上, $xf(x) < 0$ 的解集为 $(-2, 0) \cup (0, 2)$.

故答案为: $(-2, 0) \cup (0, 2)$

【变式 5-1】(2024·高一·吉林·阶段练习) 已知函数 $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx - 4$, $f(10) = 6$, 则 $f(-10) =$ _____.

【答案】 -14

【解析】 设 $g(x) = ax^5 + bx^3 + cx$, 则 $f(x) = g(x) - 4$, 且 $g(x)$ 为奇函数, 即 $g(-x) = -g(x)$.

又 $f(10) = g(10) - 4 = 6 \Rightarrow g(10) = 10$;

所以 $g(-10) = -g(10) = -10$,

所以 $f(-10) = g(-10) - 4 = -10 - 4 = -14$.

故答案为: -14

【变式 5-2】(2024·高三·全国·专题练习) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & x \geq 0, \\ 4x - x^2, & x < 0, \end{cases}$ 若 $f(2-a^2) + f(a) > 0$, 则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】 $(-1, 2)$

【解析】因 $y = x^2 + 4x$ 为开口向上的二次函数，对称轴为 $x = -2$ ，故函数在 $[0, +\infty)$ 上单调递减；

当 $x > 0$ 时， $-x < 0$ ， $f(x) = x^2 + 4x$ ， $f(-x) = -4x - x^2$ ，

所以 $f(x) = -f(-x)$ 。

又当 $x < 0$ 时， $-x > 0$ ， $f(x) = 4x - x^2$ ， $f(-x) = -4x + x^2$ ，

所以 $f(x) = -f(-x)$ 。

又 $f(0) = 0$ ，所以 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & x \geq 0, \\ 4x - x^2, & x < 0, \end{cases}$ 为奇函数，且在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

则 $f(2 - a^2) + f(a) > 0$ 可得：

$f(2 - a^2) > f(-a) \Leftrightarrow 2 - a^2 > -a \Leftrightarrow a^2 - a - 2 < 0$ ，即 $(a - 2)(a + 1) < 0$ ，

解得 $-1 < a < 2$ ，

故答案为： $(-1, 2)$

【变式 5-3】（2024·高一·全国·课堂例题）函数 $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ 是奇函数，则满足条件的一组值可以是

$a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 1（不唯一）； 0

【解析】因为函数 $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ 是奇函数， $x \in \mathbf{R}$

所以 $f(0) = 0$ ，得 $b = 0$ ，

当 $a = 1$ 时， $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ，满足 $f(-x) = \frac{-x}{x^2+1} = -f(x)$ ， $f(x)$ 为奇函数。

故答案为：1（不唯一）； 0

【变式 5-4】（2024·高一·天津·阶段练习）（1）解关于 x 的不等式： $2x^2 - (2a+3)x + (a+1) > 0$ ；

（2）设定义在 $[-2, 2]$ 上的偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递增，若 $f(1-a) < f(a)$ ，求实数 a 的取值范围。

【解析】（1）原不等式化为： $(2x-1)[x-(a+1)] > 0$ ，

解得 $x = \frac{1}{2}$ 或 $x = a+1$ ，

当 $a+1=\frac{1}{2}$, 即 $a=-\frac{1}{2}$ 时, 原不等式的解集为 $\{x|x \neq \frac{1}{2}\}$;

当 $a+1>\frac{1}{2}$, 即 $a>-\frac{1}{2}$ 时, 原不等式的解集为 $\{x|x>a+1 \text{ 或 } x<\frac{1}{2}\}$;

当 $a+1<\frac{1}{2}$, 即 $a<-\frac{1}{2}$ 时, 原不等式的解集为 $\{x|x>\frac{1}{2} \text{ 或 } x<a+1\}$;

综上得: 当 $a=-\frac{1}{2}$ 时, 原不等式的解集为 $\{x|x \neq \frac{1}{2}\}$;

当 $a>-\frac{1}{2}$ 时, 原不等式的解集为 $\{x|x>a+1 \text{ 或 } x<\frac{1}{2}\}$;

当 $a<-\frac{1}{2}$ 时, 原不等式的解集为 $\{x|x>\frac{1}{2} \text{ 或 } x<a+1\}$.

(2) 因为 $x \in [-2, 2]$, $f(x)$ 是偶函数, 所以 $f(|1-a|) < f(|a|)$,

又 $f(x)$ 在 $[0, 2]$, 所以 $|1-a| < |a|$,

$$\text{所以 } \begin{cases} (1-a)^2 < a^2 \\ -2 \leq 1-a \leq 2, \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

解得 $\frac{1}{2} < a \leq 2$.

所以 a 的取值范围是 $(\frac{1}{2}, 2]$.

【变式 5-5】 (2024·高一·天津·阶段练习) 已知函数 $f(x) = \frac{ax-b}{1+x^2}$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的奇函数, 且

$$f(1) = -1.$$

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 判断函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的单调性, 并用定义证明;

(3) 解不等式 $f(2t) + f(t-1) > 0$.

【解析】 (1) 函数 $f(x) = \frac{ax-b}{1+x^2}$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的奇函数, $f(-x) = \frac{-ax-b}{1+x^2} = -\frac{ax-b}{1+x^2} = -f(x)$,

解得: $b=0$,

$\therefore f(x) = \frac{ax}{1+x^2}$, 而 $f(1) = -1$, 解得 $a = -2$,

$\therefore f(x) = -\frac{2x}{1+x^2}$, $x \in [-1, 1]$.

(2) 函数 $f(x) = -\frac{2x}{1+x^2}$ 在 $[-1, 1]$ 上为减函数; 证明如下:

任意 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ 且 $x_1 < x_2$,

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = -\frac{2x_1}{1+x_1^2} + \frac{2x_2}{1+x_2^2} = -\frac{2(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)},$$

因为 $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1$, 所以 $x_1 - x_2 < 0$, $1 - x_1x_2 > 0$,

所以 $f(x_1) - f(x_2) > 0$, 即 $f(x_1) > f(x_2)$, 所以函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上为减函数.

(3) 由题意, 不等式 $f(t-1) + f(2t) > 0$ 可化为 $f(2t) > f(1-t)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} -1 \leq 2t \leq 1 \\ -1 \leq t-1 \leq 1, \text{ 解得 } 0 \leq t < \frac{1}{3} \\ 2t < 1-t \end{cases}, \text{ 所以该不等式的解集为 } \left[0, \frac{1}{3}\right).$$

经典题型六：函数性质的综合应用

【典例 6-1】(2024·高一·北京·阶段练习) 已知函数 $f(x) = 3x + \frac{x}{|x|+1}$.

(1) 证明: 函数 $f(x)$ 是奇函数;

(2) 用定义证明: 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数;

(3) 若关于 x 的不等式 $f(ax^2 + 3ax) + f(1 - ax) \geq 0$ 对于任意实数 x 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

【解析】(1) 证明: 由函数 $f(x) = 3x + \frac{x}{|x|+1}$, 可得其定义域为 $\mathbb{R}$, 关于原点对称,

$$\text{又由 } f(-x) = -3x - \frac{x}{|-x|+1} = -(3x + \frac{x}{|x|+1}) = -f(x),$$

所以函数 $f(x)$ 为定义域 $\mathbb{R}$ 上的奇函数.

(2) 证明: 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) = 3x + \frac{x}{x+1} = 3x + 1 - \frac{1}{x+1}$,

任取 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$,

$$\begin{aligned} \text{可得 } f(x_1) - f(x_2) &= 3x_1 + 1 - \frac{1}{x_1+1} - (3x_2 + 1 - \frac{1}{x_2+1}) = 3(x_1 - x_2) + (\frac{1}{x_2+1} - \frac{1}{x_1+1}) \\ &= 3(x_1 - x_2) + \frac{x_1 - x_2}{(x_2+1)(x_1+1)} = (x_1 - x_2) \cdot [3 + \frac{1}{(x_2+1)(x_1+1)}] \end{aligned}$$

因为 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 可得 $x_1 - x_2 < 0$, $(x_2+1)(x_1+1) > 0$,

所以 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

(3) 因为函数 $f(x)$ 为定义域 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上是增函数,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上也是增函数,

又因为 $f(0)=0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数,

又由 $f(ax^2+3ax)+f(1-ax)\geq 0$, 可得 $f(ax^2+3ax)\geq -f(1-ax)=f(ax-1)$,

因为不等式 $f(ax^2+3ax)+f(1-ax)\geq 0$ 对于任意实数 x 恒成立,

即不等式 $f(ax^2+3ax)\geq f(ax-1)$ 对于任意实数 x 恒成立,

可得不等式 $ax^2+3ax\geq ax-1$ 对于任意实数 x 恒成立,

即不等式 $ax^2+2ax+1\geq 0$ 对于任意实数 x 恒成立,

当 $a=0$ 时, 不等式即为 $1\geq 0$ 恒成立, 符合题意;

当 $a\neq 0$ 时, 则满足 $\begin{cases} a>0 \\ \Delta=(2a)^2-4a\leq 0 \end{cases}$, 解得 $0<a\leq 1$,

综上所述, $0\leq a\leq 1$, 即实数 a 的取值范围 $[0,1]$.

【典例 6-2】 (2024·高一·河南南阳·阶段练习) 已知函数 $f(x)=x^2-2tx+1(t\in\mathbf{R})$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 上单调递减, 求 t 的取值范围;

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, -1]$ 上的最小值为 $g(t)$, 求 $g(t)$ 的表达式;

(3) 对 (2) 中的 $g(t)$, 当 $x\in[-1, 1]$, $t\in[-1, 1]$ 时, 恒有 $x^2-mx-3\leq g(t)$ 成立, 求实数 m 的取值范围.

【解析】 (1) 函数 $f(x)=x^2-2tx+1(t\in\mathbf{R})$ 开口向上, 对称轴为 $x=t$,

若 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 上单调递减, 则 $t\geq 2$, 即 t 的取值范围为 $[2, +\infty)$;

(2) 因为 $f(x)=x^2-2tx+1=(x-t)^2+1-t^2$, $x\in[-2, -1]$,

当 $t\leq -2$ 时, $f(x)$ 在 $[-2, -1]$ 上单调递增, 所以 $f(x)_{\min}=f(-2)=5+4t$;

当 $t\geq -1$ 时, $f(x)$ 在 $[-2, -1]$ 上单调递减, 所以 $f(x)_{\min}=f(-1)=2+2t$;

当 $-2<t<-1$ 时, $f(x)_{\min}=f(t)=1-t^2$;

$$\text{所以 } g(t) = \begin{cases} 5+4t, & t \leq -2 \\ 2+2t, & t \geq -1 \\ 1-t^2, & -2 < t < -1 \end{cases};$$

(3) 当 $t \in [-1, 1]$ 时 $g(t) = 2+2t$, 则 $g(t) \in [0, 4]$,

因为当 $x \in [-1, 1]$, $t \in [-1, 1]$ 时, 恒有 $x^2 - mx - 3 \leq g(t)$ 成立,

所以当 $x \in [-1, 1]$, 恒有 $x^2 - mx - 3 \leq 0$ 成立,

令 $h(x) = x^2 - mx - 3$, $x \in [-1, 1]$, 则 $h(x)_{\max} \leq 0$,

当 $\frac{m}{2} \geq 0$, 即 $m \geq 0$ 时, $h(x)_{\max} = h(-1) = m - 2 \leq 0$, 解得 $m \leq 2$, 所以 $0 \leq m \leq 2$;

当 $\frac{m}{2} < 0$, 即 $m < 0$ 时, $h(x)_{\max} = h(1) = -m - 2 \leq 0$, 解得 $m \geq -2$, 所以 $-2 \leq m < 0$;

综上可得 $-2 \leq m \leq 2$.

【变式 6-1】 (2024·高一·浙江嘉兴·阶段练习) 若函数 G 在 $m \leq x \leq n (m < n)$ 上的最大值记为 $y_{\max}$, 最小值

记为 $y_{\min}$, 且满足 $y_{\max} - y_{\min} = 1$, 则称函数 G 是在 $m \leq x \leq n$ 上的“美好函数”.

(1) 函数① $y = x + 1$ ② $y = x^2$, 哪个函数是在 $1 \leq x \leq 2$ 上的“美好函数”, 并说明理由;

(2) 已知函数 $G: y = ax^2 - 2ax - 3a (a \neq 0)$.

① 函数 G 是在 $1 \leq x \leq 2$ 上的“美好函数”, 求 a 的值;

② 当 $a = 1$ 时, 函数 G 是在 $t \leq x \leq t + 1$ 上的“美好函数”, 求 t 的值.

【解析】 (1) $y = x + 1$ 在 $[1, 2]$ 上的最大值为 3, 最小值为 2, 最大值与最小值的差为 1, $y = x + 1$ 是在 $1 \leq x \leq 2$ 上的“美好函数”;

$y = x^2$ 在 $[1, 2]$ 上递增, 最大值为 4, 最小值是 1, 最大值与最小值的差为 3, $y = x^2$ 不是在 $1 \leq x \leq 2$ 上的“美好函数”;

$$(2) \text{ ① } y = ax^2 - 2ax - 3a = a(x-1)^2 - 4a,$$

(i) $a > 0$ 时, $y = a(x-1)^2 - 4a$ 在 $[1, 2]$ 上递增, $x = 1$ 时, $y_{\min} = -4a$, $x = 2$ 时, $y_{\max} = -3a$, 所以

$$y_{\max} - y_{\min} = a = 1;$$

(ii) $a < 0$ 时, $y = a(x-1)^2 - 4a$ 在 $[1, 2]$ 上递减, $x = 1$ 时, $y_{\max} = -4a$, $x = 2$ 时, $y_{\min} = -3a$, 所以

$$y_{\max} - y_{\min} = -a = 1 \text{ 得 } a = -1,$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/458023027124007026>