

2023-2024 学年安徽省滁州市全椒县城东中学高三高考全真模拟数学试题试卷

注意事项

1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 正 $\triangle ABC$ 的边长为 2，将它沿 BC 边上的高 AD 翻折，使点 B 与点 C 间的距离为 $\sqrt{3}$ ，此时四面体 $A-BCD$ 的外接球表面积为 ()

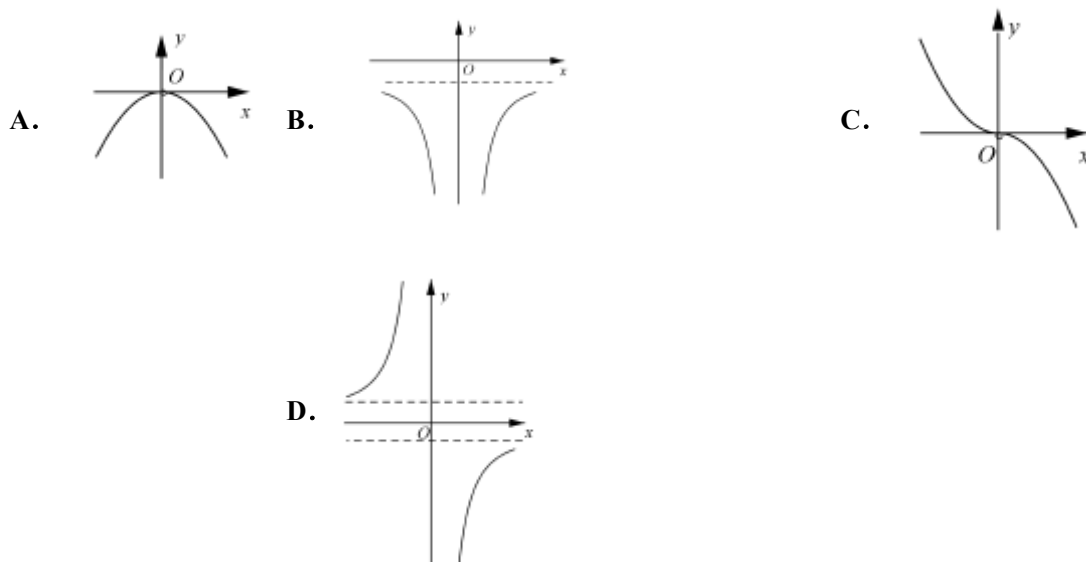
- A. $\frac{10\pi}{3}$ B. 4π C. $\frac{13\pi}{3}$ D. 7π

2. 将函数 $f(x) = 2\sin(3x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$) 图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后，得到函数的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称，则

函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right]$ 上的值域是 ()

- A. $[-1, 2]$ B. $[-\sqrt{3}, 2]$ C. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ D. $[-\sqrt{2}, 2]$

3. 函数 $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$ (其中 e 是自然对数的底数) 的大致图像为 ()



4. 将函数 $y = \sin 2x$ 的图像向左平移 φ ($\varphi > 0$) 个单位得到函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图像，则 φ 的最小值为 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{12}$ C. $\frac{11\pi}{12}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

5. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 15$ 且 $3a_{n+1} = 3a_n - 2$, 则使 $a_k \cdot a_{k+1} < 0$ 的 k 的值为()

- A. 21 B. 22 C. 23 D. 24

6. 设集合 $A = \{x | -2 < x, 2, x \in \mathbb{Z}\}, B = \{x | \log_2 x < 1\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $(0, 2)$ B. $(-2, 2]$ C. $\{1\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2\}$

7. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 V , 点 M, N 分别在棱 BB_1, CC_1 上, 满足 $AM + MN + ND_1$ 最小, 则四面体 $AMND_1$ 的体积为()

- A. $\frac{1}{12}V$ B. $\frac{1}{8}V$ C. $\frac{1}{6}V$ D. $\frac{1}{9}V$

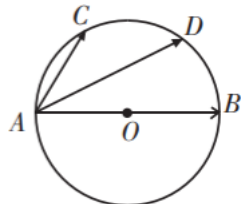
8. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ x - 2y - 2 \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$, 则目标函数 $z = \frac{y-2}{x+1}$ 的最小值为

- A. $-\frac{2}{3}$ B. $-\frac{5}{4}$
C. $-\frac{4}{3}$ D. $-\frac{1}{2}$

9. 设 $a, b \in \mathbb{R}^+$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_{n+1} = a \cdot a_n^2 + b, n \in \mathbb{N}^*$, 则 ()

- A. 对于任意 a , 都存在实数 M , 使得 $a_n < M$ 恒成立
B. 对于任意 b , 都存在实数 M , 使得 $a_n < M$ 恒成立
C. 对于任意 $b \in (2 - 4a, +\infty)$, 都存在实数 M , 使得 $a_n < M$ 恒成立
D. 对于任意 $b \in (0, 2 - 4a)$, 都存在实数 M , 使得 $a_n < M$ 恒成立

10. 如图, $AB = 2$ 是圆 O 的一条直径, C, D 为半圆弧的两个三等分点, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) =$ ()



- A. $\frac{5}{2}$ B. 4 C. 2 D. $1 + \sqrt{3}$

11. O 是平面上的一点, A, B, C 是平面上不共线的三点, 动点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos C} \right)$,

$\lambda \in (0, \infty)$, 则动点 P 的轨迹一定经过 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 重心 B. 垂心 C. 外心 D. 内心

12. 已知命题 p : 任意 $x \geq 4$, 都有 $\log_2 x \geq 2$; 命题 q : $a > b$, 则有 $a^2 > b^2$. 则下列命题为真命题的是 ()

- A. $p \wedge q$ B. $p \wedge (\neg q)$ C. $(\neg p) \wedge (\neg q)$ D. $(\neg p) \vee q$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角为 30° , $(\vec{a} + 2\vec{b}) \perp (2\vec{a} + \lambda\vec{b})$, 则 $(\vec{a} + \lambda\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) =$ _____.

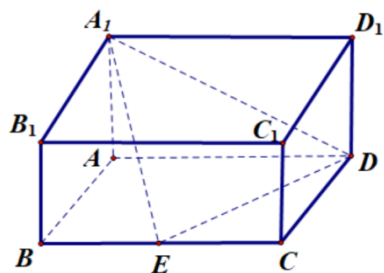
14. 在四面体 $ABCD$ 中, $AB = CD = \sqrt{41}$, $AC = BD = \sqrt{34}$, $AD = BC = 5$, E, F 分别是 AD, BC 的中点. 则下述结论:

- ①四面体 $ABCD$ 的体积为 20;
 ②异面直线 AC, BD 所成角的正弦值为 $\frac{24}{25}$;
 ③四面体 $ABCD$ 外接球的表面积为 50π ;
 ④若用一个与直线 EF 垂直, 且与四面体的每个面都相交的平面 α 去截该四面体, 由此得到一个多边形截面, 则该多边形截面面积最大值为 6.

其中正确的有 _____. (填写所有正确结论的编号)

15. 动点 P 到直线 $x = -1$ 的距离和他到点 $F(1, 0)$ 距离相等, 直线 AB 过 $(4, 0)$ 且交点 P 的轨迹于 A, B 两点, 则以 AB 为直径的圆必过 _____.

16. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 1$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$, E 为 BC 的中点, 则点 A 到平面 A_1DE 的距离是 _____.



三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = 1, S_{n+1} = 2S_n + 1$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = a_1$, 点 (b_n, S_{n+1}) 在 $S_n - S_{n-1} + 2 = 0$ 上, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12分) 已知公比为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1=2$, $S_3=\frac{7}{2}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=\frac{(2n-1)a_n}{2}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12分) 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边, 且 $b^2=3a^2-3c^2$.

(1) 证明: $b=3c\cdot\cos A$;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积 $S=2$, $b=\sqrt{6}$, 求角 C .

20. (12分) 已知函数 $f(x)=\ln(x+1)+\frac{a}{2}x^2$.

(1) 当 $a=-1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 设 $m=f(x_2)+\frac{x_1+2}{8}\cdot f'(x_1+1)$, 求 m 的取值范围, 并求 m 取到最小值时所对应的 a 的值.

21. (12分) 已知 $x>0, y>0, z>0, x^2+y^2+z^2=1$, 证明:

(1) $(x+y)^2+(y+z)^2+(x+z)^2\geq 4$;

(2) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>1+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}$.

22. (10分) 在直角坐标系 xOy 中, 圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=2+2\cos\alpha \\ y=2\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以 O 为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求圆 C 的极坐标方程;

(2) 直线 l 的极坐标方程是 $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$, 射线 $OM:\theta=\frac{\pi}{6}$ 与圆 C 的交点为 O, P , 与直线 l 的交点为 Q ,

求线段 PQ 的长.

参考答案

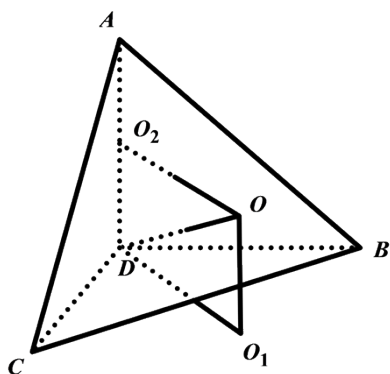
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

如图所示，设 AD 的中点为 O_2 ， $\triangle BCD$ 的外接圆的圆心为 O_1 ，四面体 $A-BCD$ 的外接球的球心为 O ，连接 OO_1, OO_2, OD ，利用正弦定理可得 $DO_1 = 1$ ，利用球心的性质和线面垂直的性质可得四边形 OO_2DO_1 为平行四边形，最后利用勾股定理可求外接球的半径，从而可得外接球的表面积。

【详解】



如图所示，设 AD 的中点为 O_2 ， $\triangle BCD$ 外接圆的圆心为 O_1 ，四面体 $A-BCD$ 的外接球的球心为 O ，连接 OO_1, OO_2, OD ，则 $OO_1 \perp$ 平面 BCD ， $OO_2 \perp AD$ 。

因为 $CD = BD = 1, BC = \sqrt{3}$ ，故 $\cos \angle BDC = \frac{2-3}{2 \times 1 \times 1} = -\frac{1}{2}$ ，

因为 $\angle BDC \in (0, \pi)$ ，故 $\angle BDC = \frac{2\pi}{3}$ 。

由正弦定理可得 $2DO_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sin \frac{2\pi}{3}} = 2$ ，故 $DO_1 = 1$ ，又因为 $AD = \sqrt{3}$ ，故 $DO_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

因为 $AD \perp DB, AD \perp CD, DB \cap CD = D$ ，故 $AD \perp$ 平面 BCD ，所以 $OO_1 \parallel AD$ ，

因为 $AD \perp$ 平面 BCD ， $DO_1 \subset$ 平面 BCD ，故 $AD \perp DO_1$ ，故 $OO_2 \parallel DO_1$ ，

所以四边形 OO_2DO_1 为平行四边形，所以 $OO_1 = DO_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

所以 $OD = \sqrt{\frac{3}{4} + 1} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ ，故外接球的半径为 $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ，外接球的表面积为 $4\pi \times \frac{7}{4} = 7\pi$ 。

故选：D。

【点睛】

本题考查平面图形的折叠以及三棱锥外接球表面积的计算，还考查正弦定理和余弦定理，折叠问题注意翻折前后的变量与不变量，外接球问题注意先确定外接球的球心的位置，然后把半径放置在可解的直角三角形中来计算，本题有一定的难度.

2、D

【解析】

由题意利用函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换规律，三角函数的图象的对称性，余弦函数的值域，求得结果.

【详解】

解：把函数 $f(x) = 2\sin(3x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$) 图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后，

可得 $y = 2\sin\left(3x - \frac{3\pi}{8} + \varphi\right)$ 的图象；

再根据得到函数的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称，

$$\therefore 3 \times \frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{8} + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\therefore \varphi = \frac{7\pi}{8}, \quad \text{函数 } f(x) = 2\sin\left(3x + \frac{7\pi}{8}\right).$$

$$\text{在 } \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right] \text{ 上, } 3x + \frac{7\pi}{8} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right], \quad \therefore \sin\left(3x - \frac{\pi}{8}\right) \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right],$$

$$\text{故 } f(x) = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{8}\right) \in [-\sqrt{2}, 2], \quad \text{即 } f(x) \text{ 的值域是 } [-\sqrt{2}, 2],$$

故选：D.

【点睛】

本题主要考查函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换规律，三角函数的图象的对称性，余弦函数的值域，属于中档题.

3、D

【解析】

由题意得，函数定义域为 $x \in \mathbb{R}$ 且 $x \neq 0$ ，所以定义域关于原点对称，

$$\text{且 } f(-x) = \frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{1+\frac{1}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}} = -\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}} = -f(x), \quad \text{所以函数为奇函数，图象关于原点对称，}$$

故选 D.

4、B

【解析】

根据三角函数的平移求出函数的解析式，结合三角函数的性质进行求解即可.

【详解】

将函数 $y = \sin 2x$ 的图象向左平移 $\varphi (\varphi > 0)$ 个单位，

得到 $y = \sin 2(x + \varphi) = \sin(2x + 2\varphi)$ ，

此时与函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 的图象重合，

则 $2\varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ ，即 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{12}$ ， $k \in Z$ ，

$\therefore$ 当 $k = 0$ 时， φ 取得最小值为 $\varphi = \frac{\pi}{12}$ ，

故选：B.

【点睛】

本题主要考查三角函数的图象和性质，利用三角函数的平移关系求出解析式是解决本题的关键.

5、C

【解析】

因为 $a_{n+1} - a_n = -\frac{2}{3}$ ，所以 $\{a_n\}$ 是等差数列，且公差 $d = -\frac{2}{3}$ ， $a_1 = 15$ ，则 $a_n = 15 - \frac{2}{3}(n-1) = -\frac{2}{3}n + \frac{47}{3}$ ，所以由题设 $a_k \cdot a_{k+1} < 0$ 可得 $(-\frac{2}{3}n + \frac{47}{3})(-\frac{2}{3}n + \frac{45}{3}) < 0 \Rightarrow \frac{45}{2} < n < \frac{47}{2}$ ，则 $n = 23$ ，应选答案 C.

6、C

【解析】

解对数不等式求得集合 B，由此求得两个集合的交集.

【详解】

由 $\log_2 x < 1 = \log_2 2$ ，解得 $0 < x < 2$ ，故 $B = (0, 2)$. 依题意 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ，所以 $A \cap B = \{1\}$.

故选：C

【点睛】

本小题主要考查对数不等式的解法，考查集合交集的概念和运算，属于基础题.

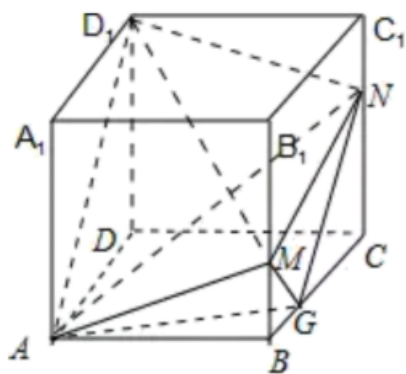
7、D

【解析】

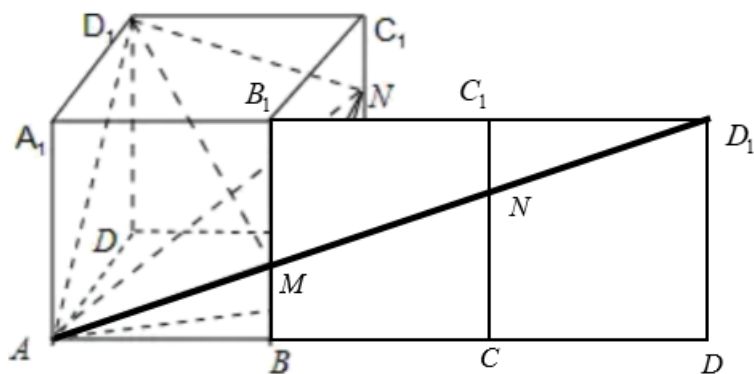
由题意画出图形，将 MN, ND_1 所在的面延它们的交线展开到与 AM 所在的面共面，可得当 $BM = \frac{1}{3}BB_1, C_1N = \frac{1}{3}C_1C$ 时 $AM + MN + ND_1$ 最小，设正方体 AC_1 的棱长为 $3a$ ，得 $a^3 = \frac{V}{27}$ ，进一步求出四面体 $AMND_1$ 的体积即可.

【详解】

解：如图，



∵点 M, N 分别在棱 BB_1, CC_1 上, 要 $AM + MN + ND_1$ 最小, 将 MN, ND_1 所在的面延它们的交线展开到与 AM 所在的面共面, AM, MN, ND_1 三线共线时, $AM + MN + ND_1$ 最小,



$$\therefore BM = \frac{1}{3}BB_1, C_1N = \frac{1}{3}C_1C$$

设正方体 AC_1 的棱长为 $3a$, 则 $27a^3 = V$,

$$\therefore a^3 = \frac{V}{27}.$$

取 $BG = \frac{1}{3}BC$, 连接 NG , 则 $AGND_1$ 共面,

在 $\triangle AND_1$ 中, 设 N 到 AD_1 的距离为 h_1 ,

$$AD_1 = \sqrt{(3a)^2 + (3a)^2} = 3\sqrt{2}a,$$

$$D_1N = \sqrt{(3a)^2 + a^2} = \sqrt{10}a,$$

$$AN = \sqrt{(3\sqrt{2}a)^2 + (2a)^2} = \sqrt{22}a,$$

$$\therefore \cos \angle D_1NA = \frac{10a^2 + 22a^2 - 18a^2}{2 \cdot \sqrt{10}a \cdot \sqrt{22}a} = \frac{7}{2\sqrt{55}},$$

$$\therefore \sin \angle D_1NA = \frac{3\sqrt{19}}{2\sqrt{55}},$$

$$\therefore S_{\triangle D_1NA} = \frac{1}{2} \cdot D_1N \cdot AN \cdot \sin \angle D_1NA = \frac{1}{2} \cdot AD_1 \cdot h_1 = \frac{3\sqrt{19}}{2}a^2$$

$$\therefore h_1 = \sqrt{\frac{19}{2}}a,$$

设 M 到平面 $AGND_1$ 的距离为 h_2 ,

$$\therefore V_{M-AGN} = V_{A-MGN}$$

$$\therefore \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{19}{2}}a \cdot 2\sqrt{2}a \cdot h_2 = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (a+2a) \cdot 3a - \frac{1}{2} \cdot a \cdot a - \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \right]$$

$$\therefore h_2 = \frac{6a}{\sqrt{19}}$$

$$\therefore V_{AMND_1} = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{19}a^2}{2} \times \frac{6a}{\sqrt{19}} = 3a^3 = \frac{V}{9}.$$

故选 D.

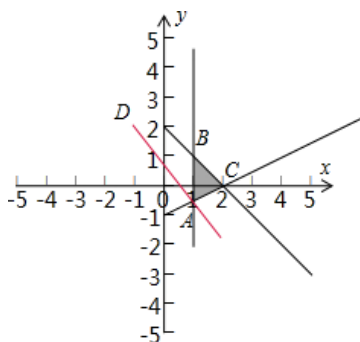
【点睛】

本题考查多面体体积的求法，考查了多面体表面上的最短距离问题，考查计算能力，是中档题.

8、B

【解析】

作出不等式组对应的平面区域，目标函数 $z = \frac{y-2}{x+1}$ 的几何意义为动点 $M(x, y)$ 到定点 $D(-1, 2)$ 的斜率，利用数形结合即可得到 z 的最小值.



【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/458041054111006113>