

2023-2024 学年广东省肇庆联盟校高三第二学期期末质量检查数学试题

考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. “中国剩余定理”又称“孙子定理”，最早可见于中国南北朝时期的数学著作《孙子算经》卷下第二十六题，叫做“物不知数”，原文如下：今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二.问物几何？现有这样一个相关的问题：将 1 到 2020 这 2020 个自然数中被 5 除余 3 且被 7 除余 2 的数按照从小到大的顺序排成一列，构成一个数列，则该数列各项之和为（ ）

- A. 56383 B. 57171 C. 59189 D. 61242

2. 已知函数 $f(x) = \log_a(|x-2|-a)$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$)，则“ $f(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上是单调函数”是“ $0 < a < 1$ ”的（ ）

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 一辆邮车从 A 地往 B 地运送邮件，沿途共有 n 地，依次记为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ (A_1 为 A 地， A_n 为 B 地). 从 A_1 地出发时，装上发往后面 $n-1$ 地的邮件各 1 件，到达后面各地后卸下前面各地发往该地的邮件，同时装上该地发往后面各地的邮件各 1 件，记该邮车到达 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 各地装卸完毕后剩余的邮件数记为 a_k ($k=1, 2, \dots, n$). 则 a_k 的表达式为（ ）.

- A. $k(n-k+1)$ B. $k(n-k-1)$ C. $n(n-k)$ D. $k(n-k)$

4. 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点，过 F_1 的直线 l 交 C 于 A, B 两点， O

为坐标原点，若 $OA \perp BF_1$, $|AF_2| = |BF_2|$ ，则 C 的离心率为（ ）

- A. 2 B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{6}$ D. $\sqrt{7}$

5. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a} + y^2 = 1$ 的一条渐近线倾斜角为 $\frac{5\pi}{6}$ ，则 $a =$ （ ）

- A. 3 B. $-\sqrt{3}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. -3

6. 已知等边 $\triangle ABC$ 内接于圆 $\tau: x^2 + y^2 = 1$ ，且 P 是圆 τ 上一点，则 $\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 的最大值是（ ）

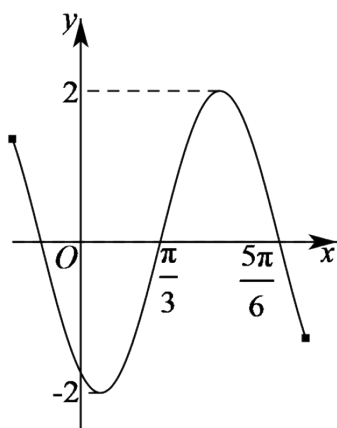
- A. $\sqrt{2}$ B. 1 C. $\sqrt{3}$ D. 2

7. 双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一个焦点为 $F(c, 0)$ ($c > 0$), 且双曲线 C_1 的两条渐近线与圆 $C_2:$

$(x-c)^2 + y^2 = \frac{c^2}{4}$ 均相切, 则双曲线 C_1 的渐近线方程为 ()

- A. $x \pm \sqrt{3}y = 0$ B. $\sqrt{3}x \pm y = 0$ C. $\sqrt{5}x \pm y = 0$ D. $x \pm \sqrt{5}y = 0$

8. 已知函数 $f(x) = 2\cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi \leq \pi$) 的图象如图所示, 则下列说法错误的是 ()



A. 函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{17\pi}{12}, -\frac{11\pi}{12}\right]$ 上单调递减

B. 函数 $f(x)$ 在 $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递增

C. 函数 $f(x)$ 的对称中心是 $\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, 0\right)$ ($k \in \mathbb{Z}$)

D. 函数 $f(x)$ 的对称轴是 $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

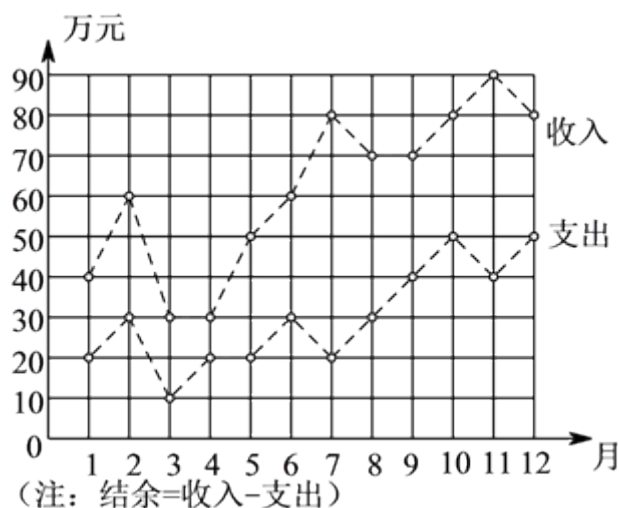
9. 设 x, y, z 是空间中不同的直线或平面, 对下列四种情形: ① x, y, z 均为直线; ② x, y 是直线, z 是平面; ③ z 是直线, x, y 是平面; ④ x, y, z 均为平面. 其中使“ $x \perp z$ 且 $y \perp z \Rightarrow x \parallel y$ ”为真命题的是 ()

- A. ③④ B. ①③ C. ②③ D. ①②

10. 已知角 α 的顶点与坐标原点 O 重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 它的终边过点 $P(-3, -4)$, 则 $\tan\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值为 ()

- A. $-\frac{24}{7}$ B. $-\frac{17}{31}$ C. $\frac{24}{7}$ D. $\frac{17}{31}$

11. 某工厂一年中各月份的收入、支出情况的统计如图所示, 下列说法中错误的是 ().



- A. 收入最高值与收入最低值的比是3:1
 B. 结余最高的月份是7月份
 C. 1与2月份的收入的变化率与4至5月份的收入的变化率相同
 D. 前6个月的平均收入为40万元

12. $\frac{2-3i}{1+i} = (\quad)$

- A. $\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$ B. $-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$ C. $\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$ D. $-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 设随机变量 ξ 服从正态分布 $N(2, 9)$, 若 $P(\xi > c) = P(\xi < c+2)$, 则 c 的值是_____.

14. 我国著名的数学家秦九韶在《数书九章》提出了“三斜求积术”. 他把三角形的三条边分别称为小斜、中斜和大斜. 三斜求积术就是用小斜平方加上大斜平方, 送到中斜平方, 取相减后余数的一半, 自乘而得一个数, 小斜平方乘以大斜平方, 送到上面得到的那个数, 相减后余数被4除, 所得的数作为“实”, 1作为“隅”, 开平方后即得面积. 所谓“实”、“隅”指的是在方程 $px^2 = q$ 中, p 为“隅”, q 为“实”. 即若 $\triangle ABC$ 的大斜、中斜、小斜分别为 a, b, c , 则

$$S^2 = \frac{1}{4} \left[a^2 c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \right)^2 \right].$$

已知点 D 是 $\triangle ABC$ 边 AB 上一点, $AC = 3$, $BC = 2$, $\angle ACD = 45^\circ$,

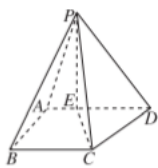
$\tan \angle BCD = \frac{8 + \sqrt{15}}{7}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

15. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别关于两渐近线对称点重合, 则双曲线的离心率为_____

16. 若双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的顶点到渐近线的距离为 $\frac{b}{2}$, 则 $\frac{b^2 + 1}{\sqrt{3}a}$ 的最小值_____.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AD \parallel BC, \angle ABC = \frac{\pi}{2}$, $PE \perp$ 面 $ABCD$, $AD = 3AE, AB = BC = 2AE = 2, PC = 3$.



- (1) 在线段 PD 上是否存在点 F , 使 $CF \parallel$ 面 PAB , 说明理由;
 (2) 求二面角 $E-PC-D$ 的余弦值.
18. (12分) 已知函数 $f(x) = |2x - a| + |x - 2a + 3|$.

- (1) 当 $a = 2$ 时, 解关于 x 的不等式 $f(x) \leq 9$;
 (2) 当 $a \neq 2$ 时, 若对任意实数 x , $f(x) \geq 4$ 都成立, 求实数 a 的取值范围.

19. (12分) 已知 a, b, c 均为正实数, 函数 $f(x) = \left| x + \frac{1}{a^2} \right| + \left| x - \frac{1}{b^2} \right| + \frac{1}{4c^2}$ 的最小值为 1. 证明:

- (1) $a^2 + b^2 + 4c^2 \geq 9$;
 (2) $\frac{1}{ab} + \frac{1}{2bc} + \frac{1}{2ac} \leq 1$.

20. (12分) 已知函数 $f(x) = x - \ln x$, $g(x) = x^2 - ax$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[t, t+1] (t > 0)$ 上的最小值 $m(t)$;
 (2) 令 $h(x) = g(x) - f(x)$, $A(x_1, h(x_1)), B(x_2, h(x_2)) (x_1 \neq x_2)$ 是函数 $h(x)$ 图像上任意两点, 且满足 $\frac{h(x_1) - h(x_2)}{x_1 - x_2} > 1$, 求实数 a 的取值范围;

- (3) 若 $\exists x \in (0, 1]$, 使 $f(x) \geq \frac{a - g(x)}{x}$ 成立, 求实数 a 的最大值.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = |x + 1| + |2x - 1|$

- (1) 解不等式 $f(x) \leq x + 2$;
 (2) 若函数 $g(x) = |x + 2019| + |x + 2021 - a|$, 若对于任意的 $x_1 \in R$, 都存在 $x_2 \in R$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

22. (10分) 已知 $f(x) = |2x + 3| - |2x - 1|$.

- (1) 求不等式 $f(x) < 2$ 的解集;

(2) 若存在 $x \in R$ ，使得 $f(x) > |3a - 2|$ 成立，求实数 a 的取值范围

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

根据“被 5 除余 3 且被 7 除余 2 的正整数”，可得这些数构成等差数列，然后根据等差数列的前 n 项和公式，可得结果.

【详解】

被 5 除余 3 且被 7 除余 2 的正整数构成首项为 23，

公差为 $5 \times 7 = 35$ 的等差数列，记数列 $\{a_n\}$

$$\text{则 } a_n = 23 + 35(n-1) = 35n - 12$$

$$\text{令 } a_n = 35n - 12 \leq 2020, \text{ 解得 } n \leq 58 \frac{2}{35}.$$

$$\text{故该数列各项之和为 } 58 \times 23 + \frac{58 \times 57}{2} \times 35 = 59189.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查等差数列的应用，属基础题。

2、C

【解析】

先求出复合函数 $f(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上是单调函数的充要条件，再看其和 $0 < a < 1$ 的包含关系，利用集合间包含关系与充要条件之间的关系，判断正确答案.

【详解】

$$f(x) = \log_a(|x-2|-a) (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1),$$

$$\text{由 } |x-2|-a > 0 \text{ 得 } x < 2-a \text{ 或 } x > 2+a,$$

$$\text{即 } f(x) \text{ 的定义域为 } \{x | x < 2-a \text{ 或 } x > 2+a\}, (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1)$$

令 $t = |x-2| - a$ ，其在 $(-\infty, 2-a)$ 单调递减， $(2+a, +\infty)$ 单调递增，

$$f(x) \text{ 在 } (3, +\infty) \text{ 上是单调函数，其充要条件为 } \begin{cases} 2+a \leq 3 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

即 $0 < a < 1$.

故选：C.

【点睛】

本题考查了复合函数的单调性的判断问题，充要条件的判断，属于基础题.

3、D

【解析】

根据题意，分析该邮车到第 k 站时，一共装上的邮件和卸下的邮件数目，进而计算可得答案.

【详解】

解：根据题意，该邮车到第 k 站时，一共装上了 $(n-1) + (n-2) + \dots + (n-k) = \frac{(2n-1-k) \times k}{2}$ 件邮件，

需要卸下 $1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) = \frac{k \times (k-1)}{2}$ 件邮件，

$$\text{则 } a_k = \frac{(2n-1-k) \times k}{2} - \frac{k \times (k-1)}{2} = k(n-k),$$

故选：D.

【点睛】

本题主要考查数列递推公式的应用，属于中档题.

4、D

【解析】

作出图象，取 AB 中点 E ，连接 EF_2 ，设 $F_1A = x$ ，根据双曲线定义可得 $x = 2a$ ，再由勾股定理可得到 $c^2 = 7a^2$ ，进而得到 e 的值

【详解】

解：取 AB 中点 E ，连接 EF_2 ，则由已知可得 $BF_1 \perp EF_2$ ， $F_1A = AE = EB$ ，

设 $F_1A = x$ ，则由双曲线定义可得 $AF_2 = 2a + x$ ， $BF_1 - BF_2 = 3x - 2a - x = 2a$ ，

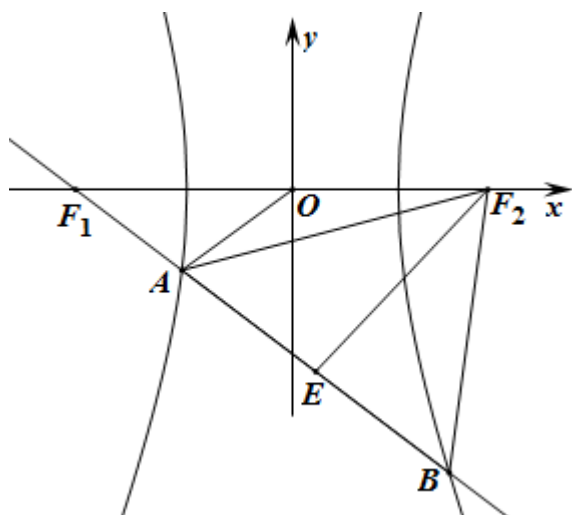
所以 $x = 2a$ ，则 $EF_2 = 2\sqrt{3}a$ ，

由勾股定理可得 $(4a)^2 + (2\sqrt{3}a)^2 = (2c)^2$ ，

所以 $c^2 = 7a^2$ ，

$$\text{则 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{7}$$

故选：D.



【点睛】

本题考查双曲线定义的应用，考查离心率的求法，数形结合思想，属于中档题．对于圆锥曲线中求离心率的问题，关键是列出含有 a, b, c 中两个量的方程，有时还要结合椭圆、双曲线的定义对方程进行整理，从而求出离心率．

5、D

【解析】

由双曲线方程可得渐近线方程，根据倾斜角可得渐近线斜率，由此构造方程求得结果．

【详解】

由双曲线方程可知： $a < 0$ ，渐近线方程为： $y = \pm \frac{1}{\sqrt{-a}}x$ ，

Q 一条渐近线的倾斜角为 $\frac{5\pi}{6}$ ， $\therefore -\frac{1}{\sqrt{-a}} = \tan \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，解得： $a = -3$ ．

故选：D.

【点睛】

本题考查根据双曲线渐近线倾斜角求解参数值的问题，关键是明确直线倾斜角与斜率的关系；易错点是忽略方程表示双曲线对于 a 的范围的要求．

6、D

【解析】

如图所示建立直角坐标系，设 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ ，则 $\vec{PA} \cdot (\vec{PB} + \vec{PC}) = 1 - \cos \theta$ ，计算得到答案．

【详解】

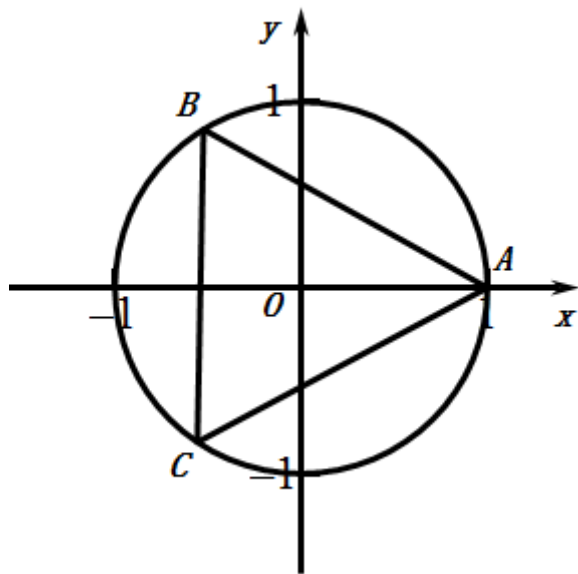
如图所示建立直角坐标系，则 $A(1,0)$ ， $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ， $C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，设 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ ，

$$\text{则 } \overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) = (1 - \cos\theta, -\sin\theta) \cdot (-1 - 2\cos\theta, -2\sin\theta)$$

$$= (1 - \cos\theta)(-1 - 2\cos\theta) + 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 + 2\sin^2\theta = 1 - \cos\theta \leq 2.$$

当 $\theta = -\pi$ ，即 $P(-1,0)$ 时等号成立.

故选：D.



【点睛】

本题考查了向量的计算，建立直角坐标系利用坐标计算是解题的关键.

7、A

【解析】

根据题意得到 $d = \frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{c}{2}$ ，化简得到 $a^2 = 3b^2$ ，得到答案.

【详解】

根据题意知：焦点 $F(c,0)$ 到渐近线 $y = \frac{b}{a}x$ 的距离为 $d = \frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{c}{2}$ ，

故 $a^2 = 3b^2$ ，故渐近线为 $x \pm \sqrt{3}y = 0$.

故选：A.

【点睛】

本题考查了直线和圆的位置关系，双曲线的渐近线，意在考查学生的计算能力和转化能力.

8、B

【解析】

根据图象求得函数 $y = f(x)$ 的解析式，结合余弦函数的单调性与对称性逐项判断即可。

【详解】

由图象可得，函数的周期 $T = 2 \times \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \right) = \pi$ ，所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ 。

将点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0 \right)$ 代入 $f(x) = 2 \cos(2x + \varphi)$ 中，得 $2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ ，解得 $\varphi = 2k\pi - \frac{7\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$ ，由

$0 < \varphi \leq \pi$ ，可得 $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ ，所以 $f(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right)$ 。

令 $2k\pi \leq 2x + \frac{5\pi}{6} \leq 2k\pi + \pi (k \in \mathbb{Z})$ ，得 $k\pi - \frac{5\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{12} (k \in \mathbb{Z})$ ，

故函数 $y = f(x)$ 在 $\left[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12} \right] (k \in \mathbb{Z})$ 上单调递减，

当 $k = -1$ 时，函数 $y = f(x)$ 在 $\left[-\frac{17}{12}\pi, -\frac{11}{12}\pi \right]$ 上单调递减，故 A 正确；

令 $2k\pi - \pi \leq 2x + \frac{5\pi}{6} \leq 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，得 $k\pi - \frac{11\pi}{12} \leq x \leq k\pi - \frac{5\pi}{12} (k \in \mathbb{Z})$ ，

故函数 $y = f(x)$ 在 $\left[k\pi - \frac{11\pi}{12}, k\pi - \frac{5\pi}{12} \right] (k \in \mathbb{Z})$ 上单调递增。

当 $k = 2$ 时，函数 $y = f(x)$ 在 $\left[\frac{13\pi}{12}, \frac{19\pi}{12} \right]$ 上单调递增，故 B 错误；

令 $2x + \frac{5\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ ，得 $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$ ，故函数 $y = f(x)$ 的对称中心是 $\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, 0 \right) (k \in \mathbb{Z})$ ，故 C 正确；

令 $2x + \frac{5\pi}{6} = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，得 $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{5\pi}{12} (k \in \mathbb{Z})$ ，故函数 $y = f(x)$ 的对称轴是 $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{5\pi}{12} (k \in \mathbb{Z})$ ，故 D 正确。

故选：B。

【点睛】

本题考查由图象求余弦型函数的解析式，同时也考查了余弦型函数的单调性与对称性的判断，考查推理能力与计算能力，属于中等题。

【解析】

①举反例，如直线 x 、 y 、 z 位于正方体的三条共点棱时②用垂直于同一平面的两直线平行判断.③用垂直于同一直线的两平面平行判断.④举例，如 x 、 y 、 z 位于正方体的三个共点侧面时.

【详解】

- ①当直线 x 、 y 、 z 位于正方体的三条共点棱时,不正确;
②因为垂直于同一平面的两直线平行,正确;
③因为垂直于同一直线的两平面平行,正确;
④如 x 、 y 、 z 位于正方体的三个共点侧面时, 不正确.

故选:C.

【点睛】

此题考查立体几何中线面关系，选择题一般可通过特殊值法进行排除，属于简单题目.

10、B

【解析】

根据三角函数定义得到 $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ ，故 $\tan 2\alpha = -\frac{24}{7}$ ，再利用和差公式得到答案.

【详解】

$\because$ 角 α 的终边过点 $P(-3, -4)$ ， $\therefore \tan \alpha = \frac{4}{3}$ ， $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = -\frac{24}{7}$.

$$\therefore \tan \left(2\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan 2\alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan 2\alpha \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{-\frac{24}{7} + 1}{1 + \frac{24}{7} \times 1} = -\frac{17}{31}.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查了三角函数定义，和差公式，意在考查学生的计算能力.

11、D

【解析】

由图可知，收入最高值为90万元，收入最低值为30万元，其比是3:1，故A项正确；

结余最高为7月份，为 $80 - 20 = 60$ ，故B项正确；

1至2月份的收入的变化率为4至5月份的收入的变化率相同，故C项正确；

前6个月的平均收入为 $\frac{1}{6}(40 + 60 + 30 + 30 + 50 + 60) = 45$ 万元，故D项错误.

综上，故选D.

12、B

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/458054117030006134>