

许昌市重点中学 2023-2024 学年数学高三第一学期期末检测模拟试题

请考生注意：

1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2. 答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在 $\triangle ABC$ 中， $C = 30^\circ$ ， $\cos A = -\frac{2}{3}$ ， $AC = \sqrt{15} - 2$ ，则 AC 边上的高为（ ）

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{2}$

2. 设一个正三棱柱 $ABC - DEF$ ，每条棱长都相等，一只蚂蚁从上底面 ABC 的某顶点出发，每次只沿着棱爬行并爬到另一个顶点，算一次爬行，若它选择三个方向爬行的概率相等，若蚂蚁爬行 10 次，仍然在上底面的概率为 P_{10} ，则 P_{10} 为（ ）

- A. $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} + \frac{1}{2}$ B. $\left(\frac{1}{3}\right)^{11} + \frac{1}{2}$
C. $\left(\frac{1}{3}\right)^{11} - \frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} + \frac{1}{2}$

3. 函数 $f(x) = 2^x - \frac{2}{x} - a$ 的一个零点在区间 $(1, 2)$ 内，则实数 a 的取值范围是（ ）

- A. $(1, 3)$ B. $(1, 2)$ C. $(0, 3)$ D. $(0, 2)$

4. 已知函数 $f(x) = x \left(x - \ln \frac{x^2}{a} \right)$ ，关于 x 的方程 $f(x) = a$ 存在四个不同实数根，则实数 a 的取值范围是（ ）

- A. $(0, 1) \cup (1, e)$ B. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$
C. $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ D. $(0, 1)$

5. 复数 z 满足 $z(1-i) = |1-\sqrt{3}i|$ ，则复数 z 等于（ ）

- A. $1-i$ B. $1+i$ C. 2 D. -2

6. 中国古代用算筹来进行记数，算筹的摆放形式有纵横两种形式（如图所示），表示一个多位数时，像阿拉伯记数一样，把各个数位的数码从左到右排列，但各位数码的筹式需要纵横相间，其中个位、百位、方位……用纵式表示，十位、千位、十万位……用横式表示，则 56846 可用算筹表示为（ ）

1 2 3 4 5 6 7 8 9
 | || ||| |||| ||||| T TT TTT TTTT 纵式

— = ≡ ≡ ≡ ⊥ ⊥ ⊥ ⊥ 横式

中国古代的算筹数码

- A. |||| ⊥ TTT ||| T B. |||| ⊥ TTT ≡ T C. ≡ T ⊥ ||| ⊥
- D. |||| ⊥ TTT ||| ⊥

7. 根据散点图，对两个具有非线性关系的相关变量 x, y 进行回归分析，设 $u = \ln y$, $v = (x-4)^2$ ，利用最小二乘法，得到线性回归方程为 $\hat{u} = -0.5v + 2$ ，则变量 y 的最大值的估计值是（ ）

- A. e B. e^2 C. $\ln 2$ D. $2\ln 2$

8. 设函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - t \left(\ln x + x + \frac{2}{x} \right)$ 恰有两个极值点，则实数 t 的取值范围是（ ）

- A. $\left(-\infty, \frac{1}{2} \right]$ B. $\left(\frac{1}{2}, +\infty \right)$
- C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{e}{3} \right) \cup \left(\frac{e}{3}, +\infty \right)$ D. $\left(-\infty, \frac{1}{2} \right] \cup \left(\frac{e}{3}, +\infty \right)$

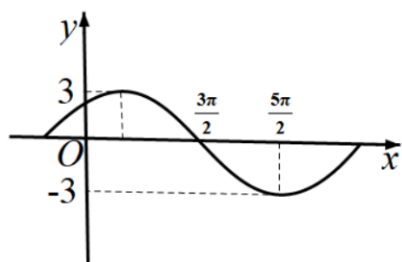
9. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足 $2S_n = 2^{n+1} + \lambda$ ，则 λ 的值是（ ）

- A. 4 B. 2 C. -2 D. -4

10. 复数 z 满足 $z-1 = (z+1)i$ (i 为虚数单位), 则 z 的值是（ ）

- A. $1+i$ B. $1-i$ C. i D. $-i$

11. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $A > 0$, $\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象如图，则此函数表达式为（ ）



A. $f(x) = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

B. $f(x) = 3\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$

C. $f(x) = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

D. $f(x) = 3\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$

12. 若函数 $f(x) = x^3 - mx^2 + 2x (m \in \mathbb{R})$ 在 $x = 1$ 处有极值, 则 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值为 ()

A. $\frac{14}{27}$

B. 2

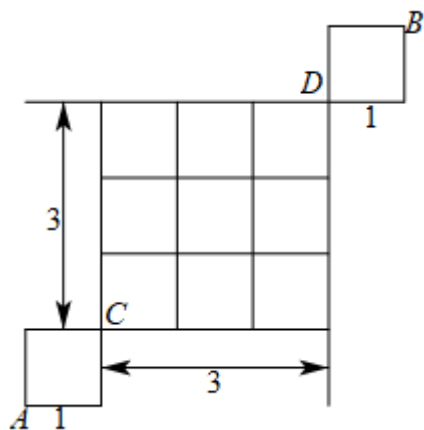
C. 1

D. 3

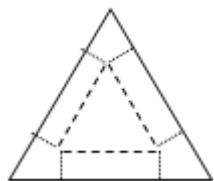
二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若 $\exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0^2 - a\sqrt{x_0^2 + 1} + 5 < 0$ 为假, 则实数 a 的取值范围为_____.

14. 如图, 机器人亮亮沿着单位网格, 从 A 地移动到 B 地, 每次只移动一个单位长度, 则亮亮从 A 移动到 B 最近的走法共有____种.



15. 如图, 从一个边长为 12 的正三角形纸片的三个角上, 沿图中虚线剪出三个全等的四边形, 余下部分再以虚线为折痕折起, 恰好围成一个缺少上底的正三棱柱, 而剪出的三个相同的四边形恰好拼成这个正三棱柱的上底, 则所得正三棱柱的体积为_____.



16. 已知在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_7 = 17$, $a_1 + a_3 + a_5 = 15$, 前 n 项和为 S_n , 则 $S_6 =$ _____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{1}{2}$, 且过点 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

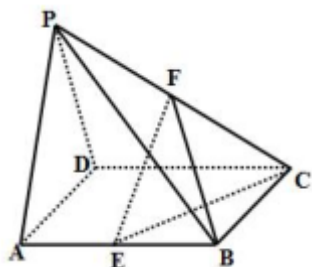
(2) 过左焦点 F_1 的直线 l 与椭圆 C 交于不同的 A, B 两点, 若 $\angle AF_2B = \frac{\pi}{2}$, 求直线 l 的斜率 k .

18. (12分) 如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, 侧面 PAD 为正三角形, 且面 $PAD \perp$ 面 $ABCD$, E, F 分别为棱 AB, PC 的中点.

(1) 求证: $EF \parallel$ 平面 PAD ;

(2) (文科) 求三棱锥 $B-EFC$ 的体积;

(理科) 求二面角 $P-EC-D$ 的正切值.

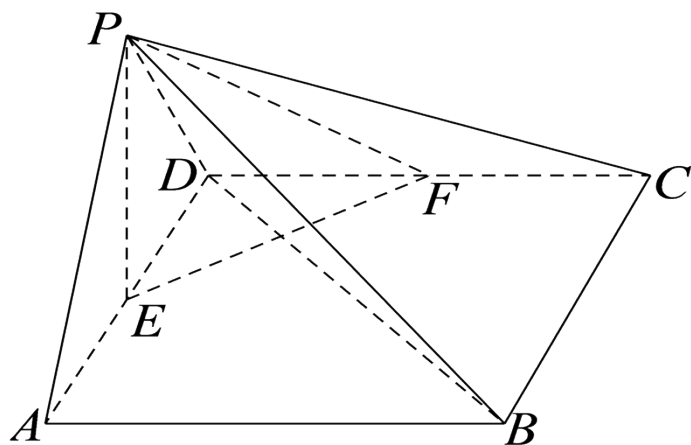


19. (12分) 已知函数 $f(x) = 2x^3 + mx^2 + m + 1$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上的最小值为 -3 , 求 m 的值.

20. (12分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $\triangle PAD$ 为正三角形, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, E, F 分别是 AD, CD 的中点.



(1) 证明: $BD \perp$ 平面 PEF

(2) 若 $\angle BAD = 60^\circ$, 求二面角 $B-PD-A$ 的余弦值.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = x^3 - 3ax + e$, $g(x) = 1 - \ln x$, 其中 e 为自然对数的底数.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 用 $\max\{m, n\}$ 表示 m, n 中较大者, 记函数 $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $(x > 0)$. 若函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$

上恰有 2 个零点, 求实数 a 的取值范围.

22. (10 分) 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$, 过点 $C(-2, 0)$ 的直线 l 交抛物线于 A, B 两点, 坐标原点为 O , $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 12$.

(1) 求抛物线的方程;

(2) 当以 AB 为直径的圆与 y 轴相切时, 求直线 l 的方程.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、C

【解析】

结合正弦定理、三角形的内角和定理、两角和的正弦公式, 求得 BC 边长, 由此求得 AC 边上的高.

【详解】

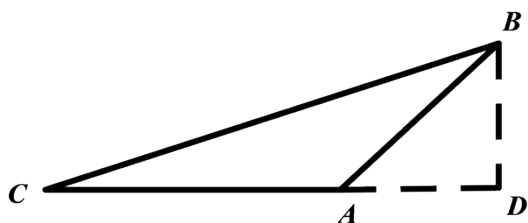
过 B 作 $BD \perp CA$, 交 CA 的延长线于 D . 由于 $\cos A = -\frac{2}{3}$, 所以 A 为钝角, 且 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, 所以

$\sin \angle CBA = \sin(\pi - \angle CBA) = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C = \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{15} - 2}{6}$. 在三角形

ABC 中, 由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 即 $\frac{BC}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{\sqrt{15} - 2}{\frac{\sqrt{15} - 2}{6}}$, 所以 $BC = 2\sqrt{5}$. 在 $Rt\triangle BCD$ 中有

$BD = BC \sin C = 2\sqrt{5} \times \frac{1}{2} = \sqrt{5}$, 即 AC 边上的高为 $\sqrt{5}$.

故选: C



【点睛】

本小题主要考查正弦定理解三角形,考查三角形的内角和定理、两角和的正弦公式,属于中档题.

2、D

【解析】

由题意,设第 n 次爬行后仍然在上底面的概率为 P_n .①若上一步在上面,再走一步要想不掉下去,只有两条路,其概率为 $\frac{2}{3}P_{n-1}$;②若上一步在下面,则第 $n-1$ 步不在上面的概率是 $1-P_{n-1}$.如果爬上来,其概率是 $\frac{1}{3}(1-P_{n-1})$,两种事件又是互斥的,可得 $P_n = \frac{2}{3}P_{n-1} + \frac{1}{3}(1-P_{n-1})$,根据求数列的通项知识可得选项.

【详解】

由题意,设第 n 次爬行后仍然在上底面的概率为 P_n .

①若上一步在上面,再走一步要想不掉下去,只有两条路,其概率为 $\frac{2}{3}P_{n-1}(n \geq 2)$;

②若上一步在下面,则第 $n-1$ 步不在上面的概率是 $1-P_{n-1}(n \geq 2)$.如果爬上来,其概率是 $\frac{1}{3}(1-P_{n-1})(n \geq 2)$,

两种事件又是互斥的, $\therefore P_n = \frac{2}{3}P_{n-1} + \frac{1}{3}(1-P_{n-1})$,即 $P_n = \frac{1}{3}P_{n-1} + \frac{1}{3}$, $\therefore P_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(P_{n-1} - \frac{1}{2}\right)$,

$\therefore$ 数列 $\left\{P_n - \frac{1}{2}\right\}$ 是以 $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列,而 $P_1 = \frac{2}{3}$,所以 $P_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}$,

$\therefore$ 当 $n=10$ 时, $P_{10} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9 + \frac{1}{2}$,

故选:D.

【点睛】

本题考查几何体中的概率问题,关键在于运用递推的知识,得出相邻的项的关系,这是常用的方法,属于难度题.

3、C

【解析】

显然函数 $f(x) = 2^x - \frac{2}{x} - a$ 在区间 $(1,2)$ 内连续,由 $f(x)$ 的一个零点在区间 $(1,2)$ 内,则 $f(1)f(2) < 0$,即可求解.

【详解】

由题,显然函数 $f(x) = 2^x - \frac{2}{x} - a$ 在区间 $(1,2)$ 内连续,因为 $f(x)$ 的一个零点在区间 $(1,2)$ 内,所以 $f(1)f(2) < 0$,即

$(2-2-a)(4-1-a) < 0$,解得 $0 < a < 3$,

故选:C

【点睛】

本题考查零点存在性定理的应用,属于基础题.

4、D

【解析】

原问题转化为 $\frac{x^2}{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{x}{\sqrt{a}} \ln \frac{x^2}{a} = 1$ 有四个不同的实根, 换元处理令 $t = \frac{x}{\sqrt{a}}$, 对 $g(t) = \ln t^2 - \sqrt{a} \left(t - \frac{1}{t} \right)$ 进行零点个数讨论.

【详解】

由题意, $a > 2$, 令 $t = \frac{x}{\sqrt{a}}$,

$$\text{则 } f(x) = a \Leftrightarrow x \left(x - \ln \frac{x^2}{a} \right) = a \Leftrightarrow \frac{x^2}{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{x}{\sqrt{a}} \ln \frac{x^2}{a} = 1$$

$$\Leftrightarrow t^2 - \frac{1}{\sqrt{a}} t \ln t^2 = 1 \Leftrightarrow \ln t^2 - \sqrt{a} \left(t - \frac{1}{t} \right) = 0.$$

$$\text{记 } g(t) = \ln t^2 - \sqrt{a} \left(t - \frac{1}{t} \right).$$

当 $t < 2$ 时, $g(t) = 2 \ln(-t) - \sqrt{a} \left(t - \frac{1}{t} \right)$ 单调递减, 且 $g(-2) = 2$,

又 $g(2) = 2$, $\therefore$ 只需 $g(t) = 2$ 在 $(2, +\infty)$ 上有两个不等于 2 的不等根.

$$\text{则 } \ln t^2 - \sqrt{a} \left(t - \frac{1}{t} \right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} = \frac{2t \ln t}{t^2 - 1},$$

$$\text{记 } h(t) = \frac{2t \ln t}{t^2 - 1} \quad (t > 2 \text{ 且 } t \neq 2),$$

$$\text{则 } h'(t) = \frac{(2 \ln t + 2)(t^2 - 1) - 4t^2 \ln t}{(t^2 - 1)^2} = \frac{2(t^2 + 1) \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} - \ln t \right)}{(t^2 - 1)^2}.$$

$$\text{令 } \varphi(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} - \ln t, \text{ 则 } \varphi'(t) = \frac{2t(t^2 + 1) - 2t(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2} - \frac{1}{t} = -\frac{(t^2 - 1)^2}{t(t^2 + 1)^2} < 2.$$

$$\because \varphi(2) = 2, \therefore \varphi(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} - \ln t \text{ 在 } (2, 2) \text{ 大于 } 2, \text{ 在 } (2, +\infty) \text{ 上小于 } 2.$$

$\therefore h'(t)$ 在 $(2, 2)$ 上大于 2, 在 $(2, +\infty)$ 上小于 2,

则 $h(t)$ 在 $(2, 2)$ 上单调递增, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减.

$$\text{由 } \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2t \ln t}{t^2 - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2 \ln t + 2}{2} = 1, \text{ 可得 } \sqrt{a} < 1, \text{ 即 } a < 2.$$

∴实数 a 的取值范围是 $(2, 2)$.

故选：D.

【点睛】

此题考查方程的根与函数零点问题，关键在于等价转化，将问题转化为通过导函数讨论函数单调性解决问题.

5、B

【解析】

通过复数的模以及复数的代数形式混合运算，化简求解即可.

【详解】

复数 z 满足 $z(1-i) = |1-\sqrt{3}i| = 2$,

$$\therefore z = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 1+i,$$

故选 B.

【点睛】

本题主要考查复数的基本运算，复数模长的概念，属于基础题.

6、B

【解析】

根据题意表示出各位上的数字所对应的算筹即可得答案.

【详解】

解：根据题意可得，各个数码的筹式需要纵横相间，个位，百位，万位用纵式表示；十位，千位，十万位用横式表示，

∴56846用算筹表示应为：纵5横6纵8横4纵6，从题目中所给出的信息找出对应算筹表示为B中的.

故选：B.

【点睛】

本题主要考查学生的合情推理与演绎推理，属于基础题.

7、B

【解析】

将 $u = \ln y$, $v = (x-4)^2$ 代入线性回归方程 $\hat{u} = -0.5v + 2$, 利用指数函数和二次函数的性质可得最大估计值.

【详解】

解：将 $u = \ln y$, $v = (x-4)^2$ 代入线性回归方程 $\hat{u} = -0.5v + 2$ 得：

$$\ln y = -0.5(x-4)^2 + 2, \text{ 即 } y = e^{-0.5(x-4)^2 + 2},$$

当 $x = 4$ 时， $-0.5(x-4)^2 + 2$ 取到最大值 2，

因为 $y = e^x$ 在 R 上单调递增, 则 $y = e^{-0.5(x-4)^2+2}$ 取到最大值 e^2 .

故选: B.

【点睛】

本题考查了非线性相关的二次拟合问题, 考查复合型指数函数的最值, 是基础题.

8、C

【解析】

$f(x)$ 恰有两个极值点, 则 $f'(x) = 0$ 恰有两个不同的解, 求出 $f'(x)$ 可确定 $x=1$ 是它的一个解, 另一个解由方程

$\frac{e^x}{x+2} - t = 0$ 确定, 令 $g(x) = \frac{e^x}{x+2} (x > 0)$ 通过导数判断函数值域求出方程有一个不是 1 的解时 t 应满足的条件.

【详解】

$$\begin{aligned} \text{由题意知函数 } f(x) \text{ 的定义域为 } (0, +\infty), \quad f'(x) &= \frac{(x-1)e^x}{x^2} - t \left(\frac{1}{x} + 1 - \frac{2}{x^2} \right) \\ &= \frac{(x-1)[e^x - t(x+2)]}{x^2} = \frac{(x-1)(x+2) \left(\frac{e^x}{x+2} - t \right)}{x^2}. \end{aligned}$$

因为 $f(x)$ 恰有两个极值点, 所以 $f'(x) = 0$ 恰有两个不同的解, 显然 $x=1$ 是它的一个解, 另一个解由方程

$\frac{e^x}{x+2} - t = 0$ 确定, 且这个解不等于 1.

令 $g(x) = \frac{e^x}{x+2} (x > 0)$, 则 $g'(x) = \frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2} > 0$, 所以函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 从而 $g(x) > g(0) = \frac{1}{2}$,

且 $g(1) = \frac{e}{3}$. 所以, 当 $t > \frac{1}{2}$ 且 $t \neq \frac{e}{3}$ 时, $f(x) = \frac{e^x}{x} - t \left(\ln x + x + \frac{2}{x} \right)$ 恰有两个极值点, 即实数 t 的取值范围是

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{e}{3} \right) \cup \left(\frac{e}{3}, +\infty \right).$$

故选: C

【点睛】

本题考查利用导数研究函数的单调性与极值, 函数与方程的应用, 属于中档题.

9、C

【解析】

利用 S_n 先求出 a_n , 然后计算出结果.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/458073065007006051>