

## 第 41 届全国中学生物理竞赛决赛理论考试试题

2024 年 10 月 26 日 9:00-12:00

一、(50 分) 实验研究发现, 某些原子核会释放出一个电子而转变为另一种原子核, 释放出的电子的动能呈连续谱分布, 这种现象被称为原子核的  $\beta^-$  衰变。例如原子核  ${}^{210}_{83}\text{Bi}$  发生  $\beta^-$  衰变释放出的电子的动能分布谱 (在  ${}^{210}_{83}\text{Bi}$  静止的参考系中测得) 如图 1a 所示。已知电子的静止质量  $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$ 。忽略电子在原子中的结合能。

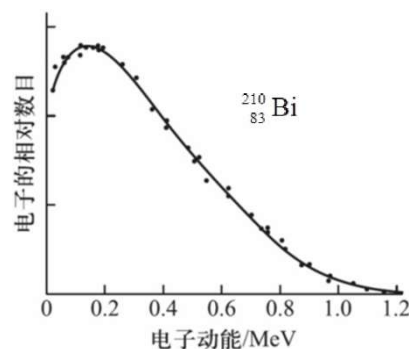


图 1a

(1) 记发生  $\beta^-$  衰变的母原子的静止质量、发生  $\beta^-$  衰变后的子原子的静止质量分别为  $M_P(Z, A)$ 、 $M_D(Z+1, A)$ , 其中  $Z$ 、 $A$  分别是母原子的原子序数、核子数。由于将原子的电子都电离掉而研究原子核的  $\beta^-$  衰变非常困难, 因此通常在原子层次上考察原子核的  $\beta^-$  衰变。试给出原子发生  $\beta^-$  衰变的条件。

(2) 已知  ${}^{210}_{83}\text{Bi}$  的原子质量为  $M_P = 209.984130 \text{ amu}$  (其中  $\text{amu}$  为原子质量单位,  $1 \text{ amu} = 931.494 \text{ MeV}/c^2$ ), 在  $\beta^-$  衰变后生成的原子质量为  $M_D = 209.982883 \text{ amu}$ 。假如在  $\beta^-$  衰变过程中除去释放出  $\beta^-$  电子之外没有生成另外的新粒子, 那么  $\beta^-$  电子的动能 (以  $\text{MeV}$  为单位) 是多大? 设  ${}^{210}_{83}\text{Bi}$  原子在初始时是静止的。

(3) 第 (2) 问得到的  $\beta^-$  电子的动能是完全确定的, 这显然不符合实验观察到的连续谱的结果; 所以在  $\beta^-$  衰变的过程中必然有其他粒子生成。若只生成了一个其他粒子, 试根据图 1a 所示的实验结果估算该粒子的静止质量的范围。

(4) 研究表明, 原子核发生  $\beta^-$  衰变的元过程是其中的一个中子  $n$  转变成了一个电子  $e^-$ 、一个质子  $p$  和一个其他粒子  $X$ 。已知中子、电子和质子自身都具有固有的角动量, 称为粒子的自旋; 进一步的研究表明, 中子、电子和质子的自旋的取值都是量子化的, 它们各自在任意给定方向上的投影的大小都为  $\frac{1}{2}\hbar$  ( $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ,  $h$  是普朗克常量)。设微观粒子 1 的角动量为  $\mathbf{L}_1$  (它在任意给定方向上的最大投影为  $l_1\hbar$ )、微观粒子 2 的角动量为  $\mathbf{L}_2$  (它在任意给定方向上的最大投影为  $l_2\hbar$ ), 这两个粒子的总角动量  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$  在任意给定方向上的最大投影的可能值为  $|l_1 - l_2|\hbar, (|l_1 - l_2| + 1)\hbar, \dots, (l_1 + l_2)\hbar$ 。求粒子  $X$  的带电量和自旋。

### 二、(50 分)

晶格的热振动问题常可简化成耦合的弹簧振子问题。考虑一个一维耦合弹簧振子系统模型。设有  $N$  ( $N \gg 1$ ) 个质量为  $M$  的大珠子, 编号为 1、3、5、 $\dots$ 、 $2N-1$ ;  $N$  个质量为  $m$  的小珠子, 编号为 2、4、6、 $\dots$ 、 $2N$ 。这  $2N$  个珠子按编号从小到大的次序套在一个光滑、水平、闭合、刚性的固定大圆环上。所有编号相邻的珠子之间 (包括 1 号和  $2N$  号) 都由相同的、劲度系数为  $k$  的轻弹簧相连, 并达到静力平衡状态。

现研究上述一维耦合弹簧振子系统  $S$  在平衡状态附近的微振动。由于圆环半径远大于相邻珠子的间距, 可近似认为每个珠子是各自在相应的直线上振动的质点。

(1) 试写出第  $i$  ( $i=1, 2, \dots, 2N$ ) 个珠子满足的运动方程, 设其偏离平衡位置的位移为  $x_i$ ,  $x_i$  的正方向均与环的逆时针方向一致。

(2)  $S$  有各种振动形式。其中有一类特别的振动模式, 在此振动模式中所有珠子都以相同的频率作稳定的微振动。这称为  $S$  的本征模式, 其频率称为本征频率。试求出  $S$  的所有可能的本征频率  $\omega$ 。提示: 可尝试用波 (行波) 的形式 (相邻珠子振动的相位差为  $\alpha$ ) 求解。

(3) 对于频率为  $\omega$  的本征模式, 设所有大珠子的振幅都为  $A$ , 小珠子的振幅都为  $B$ 。求

(3.1)  $A$  和  $B$  之间的关系;

(3.2) 所有珠子在一个振荡周期内的平均动能  $\langle E_k \rangle$  和  $S$  的总能量  $E$ , 结果中均不能出现  $B$ 。(设静力平

衡状态的能量为 0。)

(4) 假设 1 号珠子被锁定不动, 但其余所有珠子仍可无摩擦滑动。试求出这种情况下 S 的所有微振动的本征频率 $\omega$ ; 并对频率为 $\omega$ 的本征模式, 导出其 $x_i = x_i(t)$  ( $i=1,2,\dots,2N$ ) 的表达式 (结果中均不能出现 $B$ )。

(5) 如 1 号珠子的锁定被解除, 且其质量变为 $\mu$ 。即使在这种情况下, 该系统也有一些本征频率 $\omega$ 完全不依赖于 $\mu$ 。试求出这种情况下 S 的所有不依赖于 $\mu$ 的微振动的本征频率 $\omega$ ; 对于频率为 $\omega$ 的本征模式, 试导出 $x_i = x_i(t)$  ( $i=1,2,\dots,2N$ ) 的表达式 (结果中均不能出现 $B$ )。

三、(50 分) 本题中的一些物理量用复数表示。例如, 电场强度的某分量随传播距离 $l$ 和时间 $t$ 变化的关系式的复数表示为 $\tilde{E}(t) = Ee^{i(kl - \omega t + \phi_0)}$ , 其中 $\omega$ 和 $k$ 分别为角频率和波矢的大小,  $\phi_0$ 为初相位;  $\tilde{E}$ 是复数, 而相应 $E$ 是 $\tilde{E}$ 的模 $|\tilde{E}|$ , 余类推。

第一部分: 光学器件的矩阵表示。

(1) (1.1) 马赫-曾德尔 (Mach-Zehnder, 简称 MZ) 干涉仪示意图如图 3a 所示。入射光经过半透半反分束器, 再经过上下两处全反镜 (全反射镜), 分为上路 (射向 M1) 和下路 (射向 M2); 再经过第二个相同的半透半反分束器后发生干涉。可调节光路, 使第二个分束器下方的探测器探测的光强为零。这时入射光的能量去了哪里? 作图并简明描述。

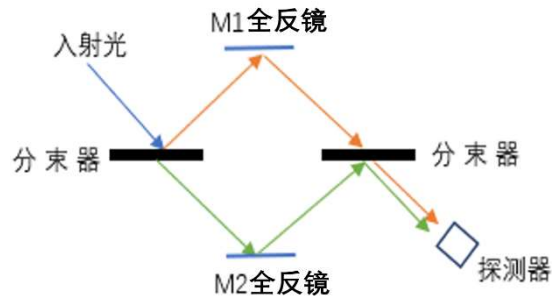


图 3a: 马赫-曾德尔干涉仪示意图 (部分)

(1.2) 利用图 3a 所示的装置可研究分束器的透射系数和反射系数之间的关系。这里分束器是一个

50/50 半透半反 (对所有偏振) 分光器件, 即反射系数 $\tilde{r}$ 和透射系数 $\tilde{t}$ 的大小满足

$$r = |\tilde{r}| = t = |\tilde{t}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

反射、透射都会引入相位差, 即

$$\tilde{r} = re^{i\delta_r}, \quad \tilde{t} = te^{i\delta_t}, \quad \frac{\tilde{t}}{\tilde{r}} = e^{i(\delta_t - \delta_r)} = e^{i\phi}$$

试求 $\phi$ 为多少?

(2) 图 3b 给出了光的 P、S 偏振正方向的定义: 在图 3b(a)中,  $\mathbf{k}$  为光的传播方向, P-S- $\mathbf{k}$  构成右手正交系, P 方向又称为水平方向 H, S 方向又称为垂直方向 V; 图 3b(b)画出了分束器涉及的入射、反射和透射光中的 P、S、 $\mathbf{k}$  方向, 以反射为例,  $\mathbf{k}_r$ 、 $\mathbf{P}_r$ 、 $\mathbf{S}_r$  分别代表反射光的传播方向、反射光中 P、S 偏振的正方向。经分束器后, 反射光的 $\mathbf{P}_r$ 、 $\mathbf{S}_r$  偏振分量均可用入射光的 $\mathbf{P}_i$ 、 $\mathbf{S}_i$  分量表示

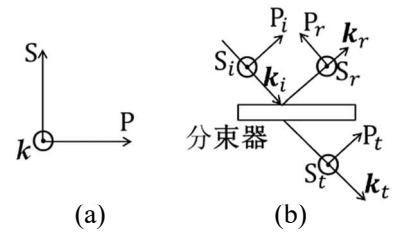


图 3b

$$\tilde{E}_{rP} = \tilde{a}\tilde{E}_{iP} + \tilde{b}\tilde{E}_{iS}, \quad \tilde{E}_{rS} = \tilde{c}\tilde{E}_{iP} + \tilde{d}\tilde{E}_{iS}$$

它们可由一个矩阵表示

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_{rP} \\ \tilde{E}_{rS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}_{iP} \\ \tilde{E}_{iS} \end{pmatrix}$$

上式中的 $2 \times 2$ 矩阵称为分束器的反射矩阵, 余类推。已知分束器对 P 和 S 分量的反射系数分别为 $\tilde{r}_P = r_P e^{i\delta_{rP}}$ 和 $\tilde{r}_S = r_S e^{i\delta_{rS}}$ , 试写出分束器的反射矩阵 $\tilde{R}$ 和透射矩阵 $\tilde{T}$ 的具体形式 (用本问中给的已知量和常数表示)。

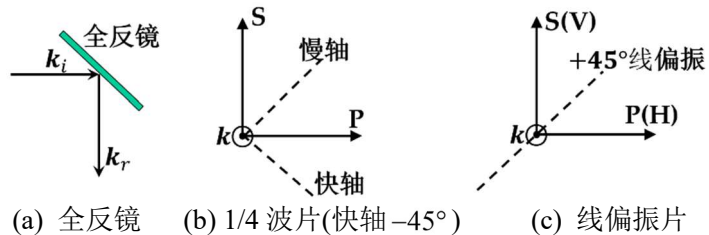


图 3c

(3) 图 3c(a)为全反镜示意图, 试写出它的反射矩阵 $\tilde{M}$ 。

(4) 对于 1/4 波片, 偏振沿其快轴的光经过波片后会比偏振沿其慢轴的光的相位领先 $\frac{\pi}{2}$ 。图 3c(b)为快轴沿

$-45^\circ$  方向的  $1/4$  波片的示意图,  $\mathbf{k}$  垂直于此波片。写出该波片的矩阵  $\tilde{Q}$ , 并将其表示成标准形式  $\tilde{Q} = \tilde{a} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{b}' \\ \tilde{c}' & d' \end{pmatrix}$ 。

(5) 线偏振片的透光方向沿水平 (H)、垂直 (V) 和  $+45^\circ$  方向的示意图如图 3c(c) 所示, 分别写出它们的矩阵  $\tilde{L}_H$ 、 $\tilde{L}_V$ 、 $\tilde{L}_{+45^\circ}$ 。

第二部分: 四象限干涉。

干涉仪是通过光强的变化测量相位变化的一种仪器。一般的干涉仪 (如迈克尔逊干涉仪) 仅测量光强并可据其定出相位  $\Delta\phi$  的大小, 但无法确定其正负, 还需要通过观察条纹的吞吐变化才能判断  $\Delta\phi$  的正负。这在某些应用中并不方便。图 3d 给出了四象限干涉仪的示意图, 它可以通过仅测量 A、B 处探测器的干涉光强, 便可得到  $\Delta\phi$  的确定值 ( $-\pi < \Delta\phi \leq \pi$ )。

激光经过一个垂直透光方向 (垂直于纸面) 的线偏振片 (V) 被全反镜 1 反射后射入半透半反分束器 1, 分成光路 1 和光路 2。光路 1 的光被全反镜 5 反射, 再经过快轴沿  $-45^\circ$  的  $1/4$  波片进入半透半反分束器 2, 再次被分成两路后分别通过线偏振片 (V) 到达探测器 A 和线偏振片 (H) 到达探测器 B。光路 2 的光被全反镜 2、3 和 4 反射后, 通过一个透光方向沿  $+45^\circ$  的线偏振片, 再由分束器 2 分成两路, 分别射向探测器 A、B。

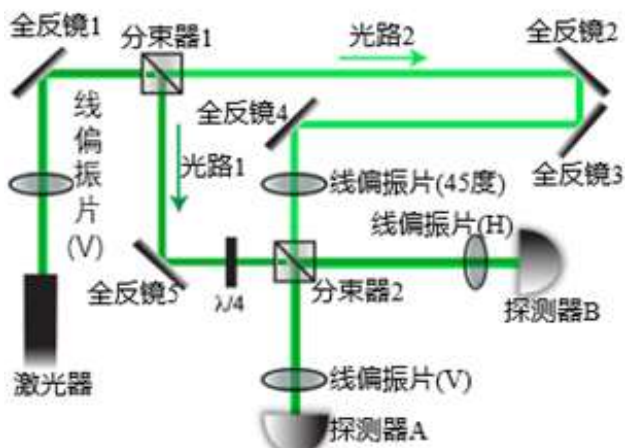


图 3d: 四象限干涉仪示意图

(6) 已知激光器发出的激光到达分束器 1 前的振幅为  $E_0$ ,  $l_1$ 、 $l_2$ 、 $k$  分别表示光从分束器 1 沿光路 1、2 到达分束器 2 的光程和激光的真空波矢的大小, 分别写出探测器 A 的光强和探测器 B 的光强中的干涉项  $I_A^{\text{干涉}}$ 、 $I_B^{\text{干涉}}$  (干涉项是指光强中因干涉所引起的贡献, 即两路光同时存在的光强减去两路光单独存在时的光强)。进而将  $I_A^{\text{干涉}}$  的计算结果中的总相位记为  $\Delta\phi$ , 再将  $I_A^{\text{干涉}}$ 、 $I_B^{\text{干涉}}$  用  $\Delta\phi$  表示出来。

(7) 简述如何通过  $I_A^{\text{干涉}}$ 、 $I_B^{\text{干涉}}$  的数值求得  $\Delta\phi$  的方法。

不计光在传播过程中的所有损耗。

四、(70 分) 考虑在刚性、粗糙的水平地面上的一个载人的两轮平衡车简化模型, 如图 4a 所示。该模型包含两个相同的刚性圆形车轮 (厚度忽略不计), 每个车轮的半径为  $r$ , 质量为  $m$  且均匀分布在车轮边缘; 两车轮的圆心用长度为  $d$ 、质量可忽略的细直刚性轮轴相连, 两车轮各自所在平面始终与轮轴垂直。将平衡车除两轮、轮轴以外的其它车体部分和车上站立的人简化为质量为  $M$ 、长度为  $L$  的匀质刚性细杆, 细杆底端和轮轴中心位置 C 相连, 细杆可绕 C 做无摩擦转动; 此外, 细杆与轮轴之间可以有沿轮轴方向的力偶矩 (即扭矩, 由杆上的发动机提供)。假设车轮在地面上始终做纯滚动。忽略平衡车系统内部所有摩擦阻力、空气阻力和形变导致的能量损失。取  $z$  轴正向为竖直向上,  $x$  轴与轮轴平行,  $y$  轴与车行进的方向平行。已知重力加速度大小为  $g$ 。

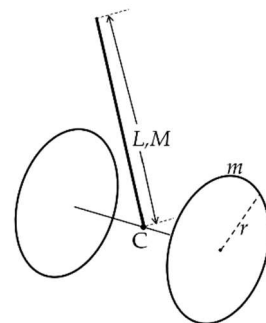


图 4a

(1) 本问中发动机不输出扭矩, 细杆与轮轴之间的接触可视为点接触; 设两个车轮与轮轴不是刚性连接 (可以各自独立转动), 且车轮质量可以忽略。

考虑平衡车的转弯过程, C 点在水平面上做角速度为  $\Omega$  的匀速圆周运动。细杆始终保持在轮轴所在的竖直平面内, 且向内侧的倾角  $\phi$  保持不变, 其后视图如图 4b 所示。求

(1.1) C 点运动轨迹的半径  $R(\phi)$ ;

(1.2) 地面对左、右两个车轮的正压力的大小  $N_{\text{左}}$ 、 $N_{\text{右}}$  (最后表达式中不得含  $R$ )。

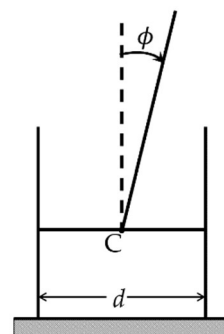


图 4b

在下面第(2)(3)问中,细杆在垂直于轮轴的平面内运动;两个车轮与轮轴刚性连接,车轮质量不可忽略。

(2) 考虑平衡车沿直线向前加速的过程,平衡车的侧视图如图4c所示。设细杆处在向前倾角为 $\theta$ 的位置,为使 $\theta$ 保持不变,发动机需要对轮轴施加合适的扭矩 $\tau(\theta)$ 。求 $\tau(\theta)$ 和平衡车质心的加速度 $a(\theta)$ 。设 $y$ 轴正向指向平衡车前进的方向,扭矩的正向为图4c中的逆时针方向。

(3) 考虑平衡车的小振动。假设发动机输出的扭矩 $\tau(\theta)$ 满足第(2)问求出的函数关系式,关系式中的各参量仍为第(2)问中的值。但是,本问中细杆的质量变为 $M'$ 。对于合适的 $M'$ 值,细杆倾角 $\theta$ (在 $\theta=0$ 附近)和C可以做频率相同的小振动。求 $M'$ 需满足的条件,以及此小振动的角频率 $\omega$ 。

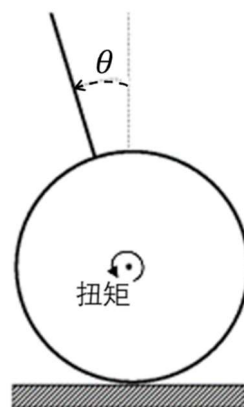


图 4c

五、(50分) 考虑一个球对称的恒星,其物质分布在半径为 $R$ 的球体中,总质量为 $M$ ,球心为 $O$ 。假设恒星物质只含有两种成分:一是中性或电离的原子,称为原子物质;二是辐射,称为光子气体。已知万有引力常量为 $G$ 。

假设恒星的总能量主要来自原子物质,在以下第(1)(2)(3)(4)问中可忽略辐射。

(1) 首先研究恒星的静力平衡,此时可将恒星物质视为流体。设 $r$ 为恒星内的任一点到其中心 $O$ 的距离,该点处流体的压强为 $p(r)$ ,质量密度为 $\rho(r)$ ,半径为 $r$ 的球体内的总质量为 $m(r)$ 。试写出平衡状态下 $m(r)$ 与 $p(r)$ 满足的微分方程。

(2) 利用第(1)问的结果,证明 $m(r)$ 与 $p(r)$ 满足不等式

$$\frac{d}{dr} \left[ p(r) + \frac{Gm^2(r)}{8\pi r^4} \right] < 0$$

并据此估算恒星中心 $O$ 处压强的下界,结果用 $M$ 、 $R$ 、 $G$ 表示。

(3) 试计算恒星自身的引力势能,用 $p(r)$ 的积分式表示。设所有恒星物质被球对称地拉到无穷远处为势能的零点。

(4) 考虑恒星物质的热力学。假设恒星物质的内能密度 $u(r)$ 与压强 $p(r)$ 满足关系

$$(\gamma - 1)u(r) = p(r)$$

其中 $\gamma$ 为绝热指数。只考虑 $\gamma > 1$ 且 $\gamma$ 不依赖于 $r$ 的情形。如果恒星不会解体, $\gamma$ 应满足什么条件?

以下各问考虑辐射的效应。假设恒星内部的光子仍然以真空中的光速 $c$ 传播。

(5) 假设恒星内光子气体处处达到局域热平衡,光子气体的内能来自光子的能量,压强来自光子的光压。试计算这种光子气体的绝热指数 $\gamma$ 。

(6) 原子物质能吸收光子。当辐射通过厚度为 $dr$ 、密度为 $\rho$ 的物质薄层时,有部分光子被吸收。被吸收的光子所占的比例为 $\kappa(r)\rho(r)dr$ ,其余光子穿过该物质薄层,其中 $\kappa(r)$ 称为不透明度。假设 $\kappa(r)$ 不依赖光的频率。原子物质吸收光子而受到光压,由此导致了光子气体的压强差。设恒星在以 $O$ 为中心、半径为 $r$ 的整个球面向外辐射的功率(光度)为 $L(r)$ ,试给出温度 $T(r)$ 满足的微分方程,结果可包含 $L(r)$ 、 $m(r)$ 、 $\kappa(r)$ 、 $r$ 及相关常量和常数。

(7) 假设恒星内原子物质的分压随半径 $r$ 的增大而减小。试估算恒星表面处光度 $L(R)$ 的上界,结果用 $M$ 、 $\kappa(R)$ 与相关常量和常数表示。

提示:可利用 Planck 黑体辐射能谱为

$$B(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1}$$

和积分公式

$$\int_0^\infty \frac{z^3 dz}{e^z - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

六. (50 分) 根据量子力学不确定性关系  $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$  (这里,

$\Delta x$ 、 $\Delta p$  分别是粒子的位移  $x$ 、动量  $p$  的不确定度,  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  是

约化普朗克常量,  $h$  是普朗克常量), 一个简谐振子的位移  $x$  和动量  $p$  不可能都为零, 因此其基态能量不可能为零。基于类似的理由, 真空中的量子电磁场最低态 (即没有光子的态) 的能量也不能为零。这导致了一个有趣的现象: 将两块相距一定距离的不带电的导体板平行放置在真空中, 它们之间存在非零的电磁相互作用力。

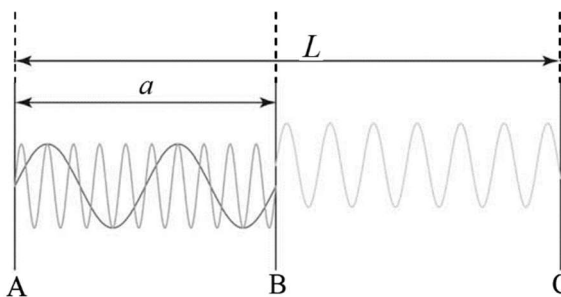


图 6a

现用一个简单模型来考察这个力的起源, 该模型只考虑一维空间中电磁波的传播, 并假设电磁波只有一种偏振模式。将三块相同的不带电的理想导体薄板 A、B、C 相互平行放置, A、B 之间距离为  $a$ , A、C 之间距离为  $L$  ( $L \gg a$ ), 如图 6a 所示。已知真空中的光速为  $c$ 。

(1) 真空电磁波在 A、B 之间形成驻波, 导体板表面的位置为波节。试求出 A、B 之间所允许的电磁波的角频率。类似地, 求出 B、C 之间所允许的电磁波的角频率。

(2) 由于量子效应, 一个振动角频率为  $\omega$  的简谐振子的基态能量为  $\frac{1}{2} \hbar \omega$ 。类似的, 真空中角频率为  $\omega$  的电磁波的一个模式所贡献的真空电磁场能量 (零点能) 为  $\frac{1}{2} \hbar \omega$ 。试写出 A、C 之间真空电磁场总能量的表达式。(提示: 表达式可能是发散的, 即不是有限的。)

(3) 推导出导体板 B 所受到的电磁相互作用力的表达式。

(4) 自然界真实力的大小总是有限的。我们导出的结果之所以发散, 是因为采用了过于简化的假设。例如, 实际的导体板不是理想导体, 频率足够高的电磁波总能够穿过导体薄板, 因而不受驻波条件的约束。所以这些高频电磁波模式几乎不受导体板位置的影响, 也不会对我们想要计算的电磁力产生贡献。为了将这一效应考虑在内, 可以采取如下方法: 我们仍然保留第 (1) 问中求得的驻波条件, 但假设每一个电磁波模式对电磁场总能量的有效贡献是  $\frac{1}{2} \hbar \omega e^{-\frac{\omega}{\Lambda}}$ 。这里  $\Lambda$  与  $\omega$  的量纲相同, 且满足  $\frac{\Lambda a}{c} \gg 1$ 。试计算在  $L \rightarrow \infty$ 、 $\Lambda \rightarrow \infty$  的极限下导体板 B 受到的电磁力。

(5) 第 (4) 问中, 用一个特定的指数函数来控制高频电磁波的贡献, 得到了一个有限的电磁力; 但是, 这个电磁力的大小不依赖于具体函数形式的选取。因此, 考虑一个更一般的函数  $f(x)$ , 它只需要满足两个条件:

A.  $f(0) = 1$ ,

B. 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $|f(x)|$  以比  $\frac{1}{x}$  更快的速度趋于零;

每一个电磁波模式对电磁场总能量的贡献为  $\frac{1}{2} \hbar \omega f(\frac{\omega}{\Lambda})$ 。试计算在  $L \rightarrow \infty$ 、 $\Lambda \rightarrow \infty$  的极限下导体板 B 受到的电磁力, 并说明结果不依赖于函数  $f(x)$  的具体形式。

(提示: 欧拉-麦克劳林公式如下

$$\sum_{n=1}^N F(n) - \int_0^N F(n) dn = \frac{F(N) - F(0)}{2} + \frac{F'(N) - F'(0)}{12} + \cdots + B_j \frac{F^{(j-1)}(N) - F^{(j-1)}(0)}{j!} + \cdots$$

这里  $F^{(j)}$  是  $F$  的  $j$  阶导数,  $B_j$  是伯努利数。如需用到该公式, 可只取前两项。)

# 第 41 届全国中学生物理竞赛决赛理论试题解答与评分标准

## 一、(50 分)

(1) 依题意, 母核  ${}_Z^A\text{P}$  到子核  ${}_{Z+1}^A\text{D}$  的  $\beta^-$  衰变可表述为

$${}_Z^A\text{P} \rightarrow {}_{Z+1}^A\text{D} + e^- + \cdots$$

记母核的静止质量为  $m_p$ 、子核的静止质量为  $m_D$  和电子的静止质量为  $m_e$ , 假设衰变前母核处于静止状态, 由能量守恒知, 该衰变过程的衰变能 (包括衰变后除  ${}_{Z+1}^A\text{D}$ 、电子  $e^-$  外的其它粒子的能量) 可由母核、子核和电子的静止质量表述为

$$Q_{\beta^-} = [m_p - (m_D + m_e)]c^2 \quad (1)$$

依题意, 相应于母核的原子、相应于子核的原子的静止质量分别为  $M_p$ 、 $M_D$ , 有

$$m_p = M_p - Zm_e, \quad (2)$$

$$m_D = M_D - (Z+1)m_e \quad (3)$$

于是,  $\beta^-$  衰变的衰变能  $Q_{\beta^-}$  可以表示为:

$$Q_{\beta^-} = (M_p - M_D)c^2 \quad (4)$$

此  $\beta^-$  衰变的发生的条件是

$$Q_{\beta^-} > 0, \quad (5)$$

由①②③式, 发生  $\beta^-$  衰变的条件⑤可表述为

$$M_p(Z, A) > M_D(Z+1, A) \quad (6)$$

这就是说, 对于原子序数分别为  $Z$  和  $Z+1$  的两个同量异位素, 只有在前者的原子质量大于后者的原子质量的情况下, 才能发生  $\beta^-$  衰变。

(2) 如果在这个衰变过程中不产生新的粒子, 那么在原子核的层次上它就是

$$\text{P} \rightarrow \text{D} + e^-$$

$\text{P}$  的总能量是  $E_p = m_p c^2$ , 记  $\text{D}$  的总能量为  $E_D$ , 动量为  $\boldsymbol{p}_D$ , 电子的总能量为  $E_e$ , 动量为  $\boldsymbol{p}_e$ , 则能量守恒和动量守恒分别是

$$m_p c^2 = E_D + E_e \quad (7)$$

$$0 = \boldsymbol{p}_D + \boldsymbol{p}_e \quad (8)$$

由⑧式得

$$|\boldsymbol{p}_D| = |\boldsymbol{p}_e| \equiv p \quad (9)$$

利用⑨式, ⑦式成为

$$\frac{p^2}{2m_D} + K_e = (m_p - m_D - m_e)c^2 \quad (10)$$

这里

$$\frac{p^2}{2m_D} = E_D - m_D c^2 \quad (11)$$

$$K_e = E_e - m_e c^2 \quad (12)$$

由相对论能量-动量关系有

$$E_e = \sqrt{(pc)^2 + m_e^2 c^4} \quad (13)$$

将(13)式代入(12)式得

$$p^2 = \frac{1}{c^2} K_e (K_e + 2m_e c^2) \quad (14)$$

由(10)(14)式消去  $p$  得  $K_e$  满足方程

$$K_e^2 + 2 m_D + m_e c^2 K_e - 2m_D(m_p - m_D - m_e)c^4 = 0 \quad (15)$$

(15)式的解

$$\begin{aligned} K_e &= \left[ - m_D + m_e + \sqrt{m_D + m_e^2 + 2m_D(m_p - m_D - m_e)} \right] c^2 \\ &= \left[ \sqrt{m_D(2m_p - m_D) + m_e^2} - m_D + m_e \right] c^2 \\ &= \left[ \sqrt{(M_D - Z_D m_e)[2(M_p - Z_p m_e) - (M_D - Z_D m_e)] + m_e^2} - [(M_D - Z_D m_e) + m_e] \right] c^2 \\ &= \sqrt{M_D(2M_p - M_D) + 2[M_D - Z_D M_p]m_e + Z_p^2 m_e^2 - M_D + Z_p m_e} c^2 \end{aligned} \quad (16)$$

负根已舍去，且利用了忽略电子在原子中的结合能后的近似关系

$$M_p = m_p + Z_p m_e \quad (17)$$

$$M_D = m_D + Z_D m_e \quad (18)$$

以及

$$Z_p = Z_D - 1 \quad (19)$$

将题给数据代入(16)式得

$$\begin{aligned} K_e &= [209.982883 \times (2 \times 209.984130 - 209.982883) + 2 \times 209.982883 - 84 \times 209.984130 \\ &\times \frac{0.511}{931.494} + (83 \times \frac{0.511}{931.494})^2]^{1/2} - 209.982883 + 83 \times \frac{0.511}{931.494} \times 931.494 \text{MeV} \approx 1.161 \text{MeV} \end{aligned} \quad (20)$$

【另解：

忽略电子在原子中的结合能， $^{210}_{83}\text{Bi}$  核的质量为

$$m_p = M_p - 83m_e = 209.984130 - 83 \times 0.000549 = 209.938563 \text{ amu} \quad (16)'$$

它在 $\beta^-$ 衰变后生成的核 $^{210}_{84}\text{Po}$ 的质量为

$$m_D = M_D - 84m_e = 209.982883 - 84 \times 0.000549 = 209.936767 \text{ amu} \quad (17)'$$

(15)式的正根为

$$\begin{aligned} K_e &= \left( \sqrt{(m_D + m_e)^2 + 2m_D(m_p - m_D - m_e)} - m_D - m_e \right) c^2 \\ &= \left( \sqrt{m_D(2m_p - m_D) + m_e^2} - m_D - m_e \right) c^2 \\ &= \left( \sqrt{m_p^2 - (m_p - m_D)^2 + m_e^2} - m_D - m_e \right) c^2 \end{aligned} \quad (18)'$$

这里，

$$\frac{(m_p - m_D)^2}{m_p^2} \sim 10^{-10}, \quad \frac{m_e^2}{m_p^2} \sim 10^{-11}$$

所以，(18)式为

$$K_e = (m_p - m_D - m_e)c^2 \quad (19)'$$

这个式子的物理意义非常清楚： $^{210}_{84}\text{Po}$ 核比电子重得太多了，所以它的反冲动能 $\frac{p^2}{2m_D}$ 比起电子的动能 $K_e$ 来可以忽略不计。代入数值即得

$$\begin{aligned} K_e &= 209.938563 - 209.936767 - 0.000549 \text{ amu} \cdot c^2 \\ &= 0.001247 \text{ amu} \cdot c^2 = 1.161 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (20)'$$

事实上，再回到原子质量（而不是核质量），它正是

$$\begin{aligned} K_e &= [M(^{210}_{83}\text{Bi}) - M(^{210}_{84}\text{Po})]c^2 = 209.984130 - 209.982883 \text{ amu} \cdot c^2 \\ &= 0.001247 \text{ amu} \cdot c^2 = 1.161 \text{ MeV} \end{aligned}$$

】

(3) 按照假设  $P \rightarrow D + e^-$  而得到的衰变后电子的动能, 与实验中看到的电子动能的最大值相当。所以第三个粒子 (中微子) 的静止质量应该非常接近于 0 ( $\leq 0.03 \text{ MeV}/c^2$ , 接近此值的都算对), (\*) 否则的话实验测得的电子的动能分布谱中的动能最大值就应该明显小于图中的最大值。 (\*\*)

(4) 由题设知,  $\beta^-$  衰变的元过程为:

$$n \rightarrow p + e^- + X \quad (21)$$

中子、质子和电子的电荷分别为

$$Q_n = 0, \quad Q_p = +1, \quad Q_{e^-} = -1 \quad (22)$$

由衰变前后电荷守恒知, X 的电荷为

$$Q_X = Q_n - (Q_p + Q_{e^-}) = 0 \quad (23)$$

依题意, 衰变前系统的角动量即中子的自旋, 有

$$I_i = S_n = \frac{1}{2}h \quad (24)$$

假定衰变后的粒子只有质子 p 和电子  $e^-$ 。质子和电子的自旋都为

$$S_p = \frac{1}{2}h, \quad S_{e^-} = \frac{1}{2}h$$

根据题给的两个角动量的合成法则, 质子和电子的总自旋, 即衰变后产物的总角动量

$$L_f = S = S_p + S_{e^-} \quad (25)$$

可取的所有可能值为

$$I_f = S_p - S_{e^-}, \quad S_p + S_{e^-} \quad (26)$$

②⑥式中的第一个可能值对应于质子和电子的自旋反向叠加, 总自旋为

$$I_f = S = 0 \quad (27)$$

②⑥式中的第二个可能值对应于质子和电子的自旋同向叠加, 总自旋为

$$I_f = S = 1h \quad (28)$$

两个可能值②⑦②⑧都不等于其初始值②④, 与角动量守恒矛盾。为保证系统的总角动量守恒, 则一定存在粒子 X, 且其自旋为  $\frac{1}{2}h$

$$S_X = \frac{1}{2}h \quad (29)$$

$$\frac{3}{2}h \quad (\text{尚不排除}) \quad (30)$$

综合上述,  $\beta^-$ 衰变的产物除了质子和电子之外, 如果还产生一个粒子, 这个粒子一定是电中性的、自旋为 $\frac{1}{2}h$  (尚不排除 $\frac{3}{2}h$ ) 的粒子, 也就是一定存在电中性的费米子【即人们常说的中微子 (如果 $S_x = \frac{1}{2}h$ ), 更严格地, 是电子型反中微子 $\bar{\nu}_e$ 】。

**评分标准 (共 50 分):**

第 (1) 问 13 分, ①3 分, ②③各 1 分, ④2 分, ⑤⑥各 3 分;

第 (2) 问 19 分, ⑦⑧各 3 分, ⑨1 分, ⑩2 分, ⑪⑫⑬⑭各 1 分; ⑮2 分, ⑯2 分, ⑰2 分;

第 (3) 问 5 分, (\*) 3 分, (\*\*) 2 分;

第 (4) 问 13 分, ⑱⑲⑳各 2 分, ㉑2 分, ㉒⑳各 1 分, ㉓2 分, ㉔1 分。

二、(50 分)

(1) 为方便起见, 设 $x_0 = x_{2N}$ ,  $x_{2N+1} = x_1$ , 容易写出系统的运动方程为:

$$0 = M\ddot{x}_{2i-1} + k(2x_{2i-1} - x_{2i} - x_{2i-2}), \quad (i = 1, \dots, N) \quad (1)$$

$$0 = m\ddot{x}_{2i} + k(2x_{2i} - x_{2i+1} - x_{2i-1}), \quad (i = 1, \dots, N) \quad (2)$$

(2) 按题意, 当弹簧环按本征模式做微振动时, 所有珠子振动的角频率都相同, 设为 $\omega$ 。环上所有珠子的微振动都是稳定的, 它们之间的差别应该只是振幅和相位的不同。根据对称性, 大珠子振动的振幅应该相同, 设为 $A$ ; 同理, 小珠子振动的振幅也应该相同, 设为 $B$ 。同样, 根据对称性, 相邻珠子之间的振动相位差应该相同, 设为 $\alpha$ 。于是解的形式可取为

$$x_{2i-1} = A\cos[\omega t + \varphi_0 + 2(i-1)\alpha], \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

$$x_{2i} = B\cos[\omega t + \varphi_0 + (2i-1)\alpha], \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

式中 $\varphi_0$ 是一个任意常量。由③式知

$$x_1 = A\cos\omega t. \quad (5)$$

由于解需要满足条件

$$x_0 = x_{2N} \quad (6)$$

因此有

$$2N\alpha = 2n\pi, \quad n \in Z \quad (7)$$

式中 $Z$ 表示整数集合。由于 $\alpha$ 的取值有 $2\pi$ 周期性, 因此独立的取值范围可取为

$$-\pi < \alpha \leq \pi \quad (8)$$

对应的,  $n$ 共有 $2N$ 种取法:

$$n = -N+1, -N+2, \dots, N-1, N \quad (9)$$

将解③④代入运动方程①得

$$\cos \alpha = \frac{2k - M\omega^2}{2k} \frac{A}{B} \quad (10)$$

将解③④代入运动方程②得

$$\cos \alpha = \frac{2k - m\omega^2}{2k} \frac{B}{A} \quad (11)$$

从⑩⑪式得

$$mM\omega^4 - 2k(m+M)\omega^2 + 4k^2 \sin^2 \alpha = 0 \quad (12)$$

由⑫式解得本征频率 $\omega$ 为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{mM} \left[ (m+M) \pm \sqrt{(m-M)^2 + 4mM \cos^2 \alpha} \right]} \quad (13)$$

由⑦式代入⑬式得

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{mM} \left[ (m+M) \pm \sqrt{(m-M)^2 + 4mM \cos^2 \frac{n\pi}{N}} \right]}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (14)$$

已注意到，互为相反数的一对 $n$ 给出的频率是相同的。(14)式给出了所有可能的本征频率。

(学生解答中排除 $n = 0$ 的解与否都算对。)

(3)

(3.1) 上面的试探解就给出了一组满足要求的解。将方程(10)(11)两边相除，得到一个关于 $\frac{A}{B}$ 的二次代数方程，

$$\left(\frac{A}{B}\right)^2 = \frac{2k - m\omega^2}{2k - M\omega^2} \quad (15)$$

它有两个根。由于 $A$ 和 $B$ 都是振幅，舍去负根，得

$$\frac{A}{B} = \sqrt{\frac{2k - m\omega^2}{2k - M\omega^2}} \quad (16)$$

(3.2) 显然，所考虑的弹簧环是一个保守系统。系统的总能量 $E$ 不随时间变化，它等于一个振荡周期内的平均能量 $E = \langle E \rangle$ ，而后者是易求的。首先，平均动能为：

$$\langle E_k \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} M \frac{1}{T} \int_0^T dt \dot{x}_{2i-1}^2(t) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \frac{1}{T} \int_0^T dt \dot{x}_{2i}^2(t) \quad (17)$$

将(3)(4)式代入(17)式得

$$\langle E_k \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} M \omega^2 A^2 \frac{1}{T} \int_0^T dt \sin^2[\omega t + (2i-1)\alpha] + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \omega^2 B^2 \frac{1}{T} \int_0^T dt \sin^2[\omega t + 2(i-1)\alpha] \quad (18)$$

利用

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} \quad (19)$$

这里 $\varphi$ 可以是任意相位。将(19)式代入(18)式得

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{4} N \omega^2 (MA^2 + mB^2) \quad (20)$$

该系统的平均势能 $\langle E_p \rangle$ 与平均动能 $\langle E_k \rangle$ 相等

$$\langle E_p \rangle = \langle E_k \rangle \quad (21)$$

因此，总能量 $E_{\text{tot}}$ 为

$$E_{\text{tot}} = \langle E_p \rangle + \langle E_k \rangle = 2\langle E_k \rangle \quad (22)$$

由(15)(20)(22)式得

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} N \omega^2 (MA^2 + mB^2) = \frac{(m+M)k - mM\omega^2}{2k - m\omega^2} N \omega^2 A^2 \quad (23)$$

由(22)(23)式得

$$\langle E_k \rangle = \frac{(m+M)k - mM\omega^2}{2(2k - m\omega^2)} N \omega^2 A^2 \quad (24)$$

(4) 这种情形相当于引入了的边界条件

$$x_1 = 0 \quad (25)$$

为了找到满足边界条件(25)的解，注意到满足方程(1)(2)的解(3)(4)实际上是沿圆环运动的行波的分段表示

$$x_{2i-1} = A \cos[\omega t + \varphi_0 + k_n l_{2i-1}] \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (26)$$

$$x_{2i} = B \cos[\omega t + \varphi_0 + k_n l_{2i}] \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (27)$$

式中  $k_n$  是波数,  $\alpha$  由(7)式定出

$$\alpha = \frac{n\pi}{N} \quad (28)$$

且

$$k_n l_{2i-1} = [(2i-1) - 1]\alpha \quad (29)$$

$$k_n l_{2i} = (2i-1)\alpha \quad (30)$$

取  $n$  为一对相反数 (因而  $n \neq 0$ )、向相反方向传播的两列行波的合成波

$$x_{2i-1} = A \{ \cos[\omega t + \varphi_0 - k_n l_{2i-1}] - \cos[\omega t + \varphi_0 + k_n l_{2i-1}] \} \quad (31)$$

$$x_{2i} = B \{ \cos[\omega t + \varphi_0 - k_n l_{2i}] - \cos[\omega t + \varphi_0 + k_n l_{2i}] \} \quad (32)$$

它显然满足边界条件(25)。由(28)(29)(30)(31)(32)式得

$$x_{2i-1} = 2A \sin[2(i-1)\alpha] \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (33)$$

$$x_{2i} = 2B \sin[(2i-1)\alpha] \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (34)$$

由(16)(34)得

$$x_{2i} = 2A \sqrt{\frac{2k - M\omega^2}{2k - m\omega^2}} \sin[(2i-1)\alpha] \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (35)$$

将解(33)(34)代入运动方程(1)(2),

所得的关于本征频率的结果如(14)式所示, 只是  $n \neq 0$  (即  $\alpha \neq 0$ )。 (\*)

(5) 在不依赖于  $\mu$  的本征振动模式里, 1 号珠子不应该振动, 而这等价于第(4)问的情形。 (\*)

因此, 答案与第(4)问的相同。 (\*\*)

**评分标准 (共 50 分):**

第(1)问 4 分, (1)(2)各 2 分;

第(2)问 15 分, (3)(4)各 2 分, (6)(7)各 1 分; (10)(11)(12)(13)各 2 分, (14)1 分;

第(3)问 12 分, (15)1 分, (16)2 分, (17)1 分, (18)(19)(20)(21)(22)各 1 分, (23)2 分, (24)1 分;

第(4)问 17 分, (25)(26)(27)1 分, (29)2 分, (30)1 分, (31)(32)各 2 分, (\*) 2 分, (33)(34)各 2 分, (35)1 分;

第(5)问 2 分, (\*) 1 分, (\*\*) 1 分。

**三、(50 分)**

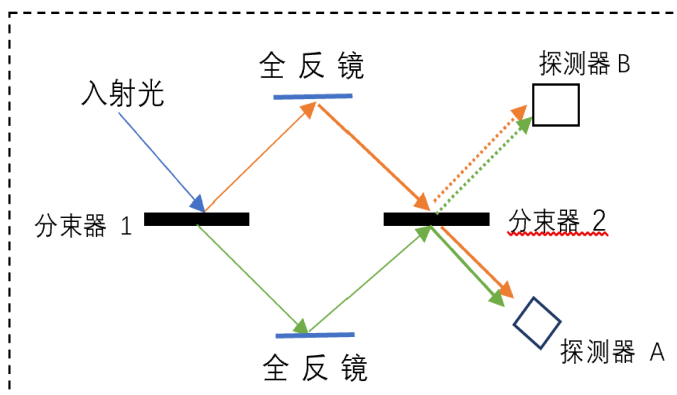
(1)(1.1)干涉仪完整光路示意图如题解图 3a 所示, 当经过分束器 2 后向下传播的光相干抵消使得探测器 A 光强为 0; 还有经过分束器 2 后向上传播的相干加强的光, 这路光按照能量守恒其光强必然最大, 即探测器 B 会有最大光强。

(\*)

(1.2)在探测器 A 能量最低时, 能量集中在探测器 B 的光路里。

解法一:

沿着光路考虑各个场的位相变化 (因为振幅都是一样的, 集中考虑位相)。  $\vec{E}_1$ 、 $\vec{E}_2$  表示沿上路和下路传播的光经第二个分束器向下进入探测器 A 的光场, 有



题解图 3a

$$\tilde{E}_1 = \exp[i(\delta_r + \delta_m + \delta_t + kl_{\text{top}})] \quad (1)$$

$$\tilde{E}_2 = \exp[i(\delta_t + \delta_m + \delta_r + kl_{\text{bottom}})] \quad (\text{只写出位相, 振幅一样大}) \quad (2)$$

$\delta_r$ 和 $\delta_t$ 分别是经过分束器反射和透射带来的位相增加,  $\delta_m$ 是全反镜反射带来的位相增加。 $\tilde{E}'_1$ 、 $\tilde{E}'_2$ 表示沿上路和下路传播的光经第二个分束器后向上进入探测器 B 的光场。同样有

$$\tilde{E}'_1 = \exp i(\delta_r + \delta_m + \delta_r + kl_{\text{top}}) \quad (3)$$

$$\tilde{E}'_2 = \exp i(\delta_t + \delta_m + \delta_t + kl_{\text{bottom}}) \quad (4)$$

当进入探测器 A 的光场相互抵消时, 有 $\tilde{E}_1$ 、 $\tilde{E}_2$ 的位相差为

$$kl_{\text{top}} - kl_{\text{bottom}} = k\Delta l = \pi \quad (5)$$

$$(\Delta l = l_{\text{top}} - l_{\text{bottom}})$$

此时 $\tilde{E}'_1$ 、 $\tilde{E}'_2$ 相互增强,  $\tilde{E}'_1$ 、 $\tilde{E}'_2$ 位相差应为 0: (6)

$$2(\delta_r - \delta_t) + k\Delta l = 0 \quad (7)$$

由此可得

$$\delta_r - \delta_t = -\phi = -\frac{\pi}{2} \quad (8) \quad 1 \text{ 分};$$

(依题给公式:  $\phi = \delta_t - \delta_r$ )

$$\frac{t}{r} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad (9)$$

【解法二

或者更简洁地, 进入下面探测器 A 的两路光场叠加后为:

$$rt + rte^{ik\Delta l} \quad (\text{略去 } E_0)$$

进入上面探测器 B 的两路光叠加后为:

$$r^2 + t^2 e^{ik\Delta l} = R + Te^{i2\phi} e^{ik\Delta l} \quad (R = r^2; T = t^2)$$

若探测器 A 上相干抵消:

$$k\Delta l = \pi,$$

上面探测器 B:

$$|R - Te^{i2\phi}| = 1,$$

由

$$R + T = 1,$$

可知

$$\phi = \frac{\pi}{2}$$

】

上述计算适用于 P、S 各分量。

(2) 对于入射的 S 偏振, 反射、透射也只有 S; 即 P、S 分量不会混肴。因而对角矩阵

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} \tilde{r}_P & 0 \\ 0 & \tilde{r}_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_P e^{i\delta_P} & 0 \\ 0 & r_S e^{i\delta_S} \end{pmatrix} \quad (10)$$

为分束器反射矩阵。利用⑨式得

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} i\tilde{r}_P & 0 \\ 0 & i\tilde{r}_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ir_P e^{i\delta_P} & 0 \\ 0 & ir_S e^{i\delta_S} \end{pmatrix} \quad (11)$$

为分束器透射矩阵。

### (3) 全反镜改变偏振态的矩阵 $\tilde{M}$

入射光场在全反镜面要满足电磁场边界条件：光场（即电场）沿镜面切线方向连续；即入射场和反射场在全反镜面的切向分量和应为 0。因此，若入射光在镜面处的 P、S 分量分别沿图 3b(b) 中入射光 P、S 正方向，反射后光分别在规定的反射光 P、S 正方向上的分量为：+1、-1，即有

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

### (4) 1/4 波片矩阵 $\tilde{Q}$

其快轴沿 -45 度方向，如题解图 3b，建立快-慢轴坐标系。

根据定义，P 分量通过 1/4 波片后的偏振态的矢量表示就是  $\tilde{Q}$  的第一列；将 S 分量通过 1/4 波片的偏振态矢量，得到的矩阵为其第二列。

假设未知  $2 \times 2$  矩阵

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \quad (13)$$

作用在基矢量

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

上：

$$\tilde{Q}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{c} \end{pmatrix} \quad (15)$$

下面  $\hat{1}, \hat{2}$  表示沿着 P 和 S 方向的基矢量； $\hat{1}', \hat{2}'$  表示沿快-慢轴的基矢量，在  $\hat{1}, \hat{2}$  基矢下面，

$$\hat{1}' = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{2}' = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{1}' + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{2}' \quad (17)$$

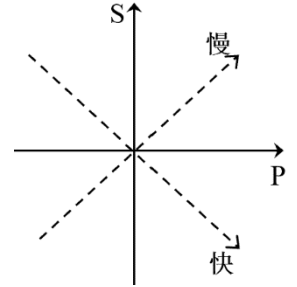
$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ -\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = -\frac{\sqrt{2}}{2} \hat{1}' + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{2}' \quad (18)$$

P 偏振（基矢量  $\hat{1}$ ，水平偏振）经过该 1/4 波片后的偏振形式（在原来的 P-S 基矢量的表达式）：

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\phi_{\text{快}}} \hat{1}' + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\phi_{\text{慢}}} \hat{2}' &= \frac{1}{2} e^{i\phi_{\text{快}}} (\hat{1} - \hat{2}) + \frac{1}{2} e^{i\phi_{\text{慢}}} (\hat{1} + \hat{2}) = \frac{1}{2} e^{i\phi_{\text{快}}} (\hat{1} - \hat{2}) + \frac{1}{2} e^{i\phi_{\text{快}}} e^{i(\phi_{\text{慢}} - \phi_{\text{快}})} (\hat{1} + \hat{2}) \\ &= \frac{1}{2} e^{i\phi_{\text{快}}} (1+i) \hat{1} + \frac{1}{2} e^{i\phi_{\text{快}}} (i-1) \hat{2} = \frac{1}{2} e^{i\phi_{\text{快}}} \begin{pmatrix} 1+i \\ i-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} e^{i\phi_{\text{快}}} \sqrt{2} \begin{pmatrix} e^{i\pi/4} \\ e^{i3\pi/4} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\phi_{\text{快}}} e^{i\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

同理，S 偏振（基矢量  $\hat{2}$ ，竖直偏振）经过 1/4 波片：

$$\begin{aligned} -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\phi_{\text{快}}} \hat{1}' + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\phi_{\text{慢}}} \hat{2}' &= -\frac{1}{2} e^{i\phi_{\text{快}}} (\hat{1} - \hat{2}) + \frac{1}{2} e^{i\phi_{\text{慢}}} (\hat{1} + \hat{2}) = -\frac{1}{2} e^{i\phi_{\text{快}}} (\hat{1} - \hat{2}) + \frac{1}{2} e^{i\phi_{\text{快}}} e^{i(\phi_{\text{慢}} - \phi_{\text{快}})} (\hat{1} + \hat{2}) \\ &= \frac{1}{2} e^{i\phi_{\text{快}}} (i-1) \hat{1} + \frac{1}{2} e^{i\phi_{\text{快}}} (i+1) \hat{2} = \frac{1}{2} e^{i\phi_{\text{快}}} \begin{pmatrix} i-1 \\ i+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} e^{i\phi_{\text{快}}} \sqrt{2} \begin{pmatrix} e^{i3\pi/4} \\ e^{i\pi/4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$



题解图 3b

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\phi_{\text{快}}} e^{i\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

因而波片矩阵：

$$\tilde{Q} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\phi_{\text{快}}} e^{i\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

按照题目要求的标准形式：

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\phi_{\text{快}} + \frac{\pi}{4})}, \quad b = i, c = i, d = 1$$

前面的共有位相因子并不重要，因此下列写法都算正确（即所列 3 种写法都得分）：

$$\tilde{Q} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \tilde{Q} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

（5） 对于透光方向水平的线偏振片，按照（4）中作用于基矢的方法。

$\tilde{L}_H$  作用在 P 偏振（基矢量 1，水平偏振）后（即 P 偏振经过水平偏振片），依然得到 P 偏振  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ；而作用在 S 偏振（基矢量 2，竖直偏振）后，结果为 0，即  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ；因而：

$$\tilde{L}_H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

同理对竖直通光线偏振片：

$$\tilde{L}_V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

对于通光 +45° 方向线偏振片，P 光（水平偏振，振幅为 1）经过它后，得到振幅为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  的 +45° 线偏振；归一化的 +45° 线偏振基矢的矩阵表达（在 P-S 基中）：

$$\mathbf{U}_{+45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

因此

$$\tilde{L}_{+45^\circ} \mathbf{P} = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{U}_{+45^\circ} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

这就是矩阵的第一列；同理对于 S 偏振经过 45° 线偏振片：

$$\tilde{L}_{+45^\circ} \mathbf{S} = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{U}_{+45^\circ} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

这是矩阵第二列；因此：

$$\tilde{L}_{+45^\circ} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (26)$$

（6） 首先写出经过 1 路和 2 路到达探测器 A 的光场：

这里采用矩阵的形式。经过入射起偏后的光称之为入射场，矢量形式为（即振幅为  $E_0$  的垂直偏振）：

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/465000320304012112>