【北京卷中考数学压轴题模拟预测】

专题 3 函数综合压轴大题模拟预测题强化训练

（尖子生难题突破）

一、解答题

1．（2022·北京朝阳·二模） 在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线

$y = x^2 + (a+2)x + 2a$．

(1)求抛物线的对称轴（用含 a 的式子表示）；

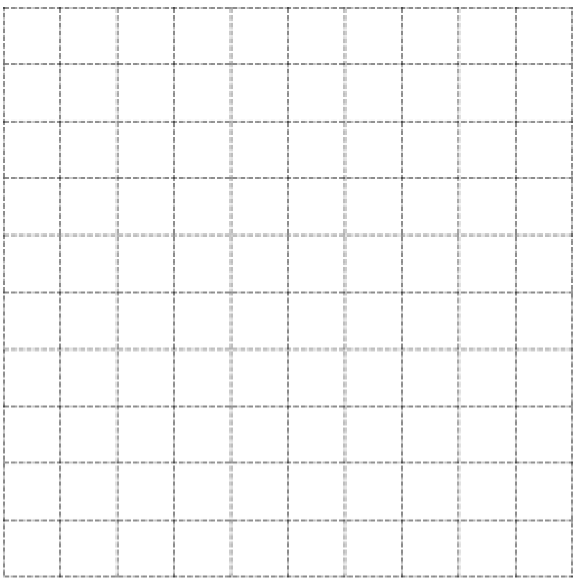
(2)若点（－1，y_1），（a，y_2），（1，y_3）在抛物线上，且 $y_1 < y_2 < y_3$，求 a 的取值范围．

2．（2022·北京朝阳·二模） 某公园在垂直于湖面的立柱上安装了一个多孔喷头，从喷头每个孔喷出的水柱形状都相同，可以看作是抛物线的一部分，当喷头向四周同时喷水时，形成一个环状喷泉，安装后，通过测量其中一条水柱，获得如下数据，在距立柱水平距离为 d 米的地点，水柱距离湖面的高度为 h 米，

请解决以下问题：

d（米）	0	1.0	3.0	5.0	7.0
h（米）	3.2	4.2	5.0	4.2	1.8

(1)在网格中建立适当的平面直角坐标系，根据已知数据描点，并用平滑的曲线连接；

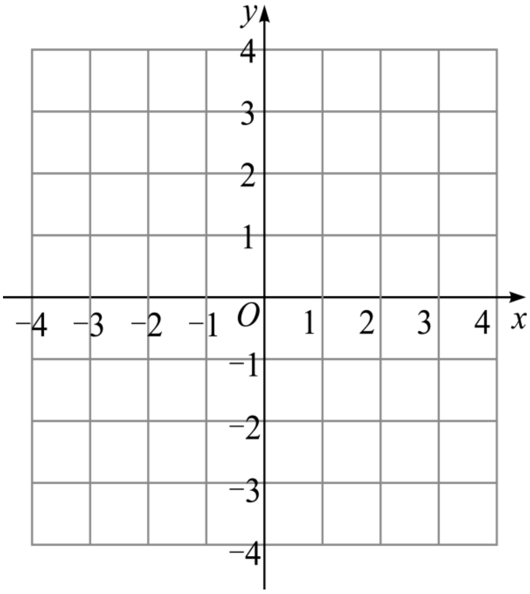


(2)结合表中所给数据或所画图象，直接写出这条水柱最高点距离湖面的高度；

(3)求所画图象对应的函数表达式；

(4)从安全的角度考虑，需要在这个喷泉外围设立一圈正方形护栏，这个喷泉的任何一条水柱在湖面上的落点到护栏的距离不能小于 1 米，请通过计算说明公园至少需要准备多少米的护栏（不考虑接头等其他因素）.

3．（2022·北京东城·二模）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 经过点 $A(2,-1)$，直线 l： $y=-2x+b$ 经过点 $B(2,-2)$．



(1)求 k,b 的值；

(2)过点 $P(n,0)\left(n>0\right)$ 作垂直于 x 轴的直线，与双曲线 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 交于点 C，与直线 l 交于点 D．

①当 $n=2$ 时，判断 CD 与 CP 的数量关系；

②当 $CD\leq CP$ 时，结合图象，直接写出 n 的取值范围.

4．（2022·北京东城·二模）小强用竹篱笆围一个面积为 $\dfrac{9}{4}$ 平方米的矩形小花园，他考虑至少需要几米长的竹篱笆（不考虑接缝），根据学习函数的经验，他做了如下的探究，请你完善他的思考过程.

(1)建立函数模型：

设矩形小花园的一边长为 x 米，则矩形小花园的另一边长为__________米（用含 x 的代数式表示）；若总篱笆长为 y 米，请写出总篱笆长 y（米）关于边长 x（米）的函数关系式__________；

(2)列表：

根据函数的表达式，得到了 x 与 y 的几组对应值，如下表：

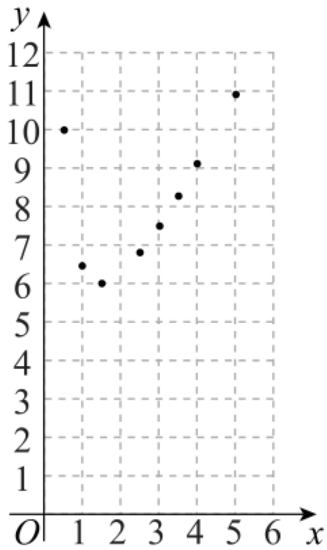
x	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5

y	10	$\frac{13}{2}$	6	a	$\frac{34}{5}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{58}{7}$	$\frac{73}{8}$	b	$\frac{109}{10}$

表中$a=$________，$b=$ ________；

(3)描点、画出函数图象：

如图，在平面直角坐标系xOy中，将表中未描出的点$(2,a)$，$(\frac{9}{2},b)$补充完整，并根据描出的点画出该函数的图象；



(4)解决问题：

根据以上信息可得，当$x=$__________时，y有最小值．由此，小强确定篱笆长至少为_________米．

5．（2022·北京东城·二模）在平面直角坐标系xOy中，抛物线$y=ax^2+bx+1(a\neq 0)$的对称轴是直线$x=3$．

(1)直接写出抛物线与y轴的交点坐标；

(2)求抛物线的顶点坐标（用含a的式子表示）；

(3)若抛物线与x轴相交于A,B两点，且$AB\leq 4$，求a的取值范围．

6．（2022·北京平谷·二模）在平面直角坐标系xOy中，点$\left(-1,y_1\right)$、$\left(1,y_2\right)$、$\left(3,y_3\right)$是抛物线$y=x^2+bx+1$上三个点．

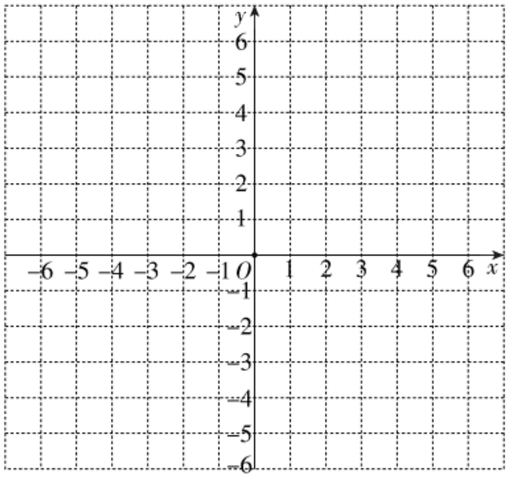
(1)直接写出抛物线与y轴的交点坐标；

(2)当$y_1=y_3$时，求b的值；

(3)当$y_3>y_1>1>y_2$时，求b的取值范围．

7．（2022·北京平谷·二模）在平面直角坐标系xOy中，一次函数$y=kx+b\left(k\neq 0\right)$

的图象由函数 $y=\frac{1}{2}x$ 平移得到，且过点 $(0,-1)$.



(1)求这个一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的表达式；

(2)当 $x>-2$ 时，对于 x 的每一个值，函数 $y=mx+1$ 的值大于一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的值，求 m 的取值范围.

8．（2022·北京市燕山教研中心一模）在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2+bx+3a(a\neq 0)$ 与 x 轴的交点为点 $A(1,0)$ 和点 B.

(1)用含 a 的式子表示 b；

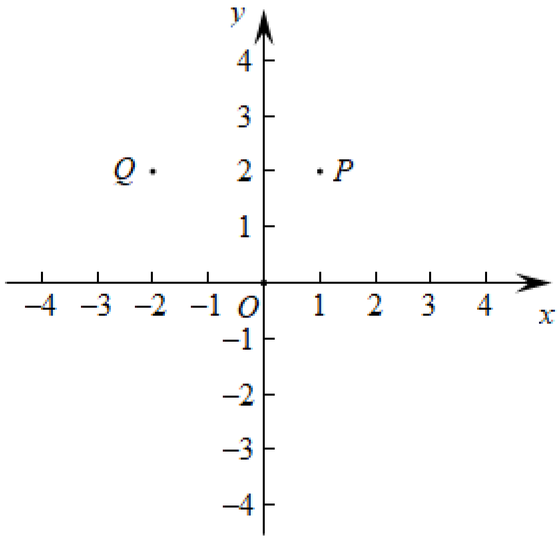
(2)求抛物线的对称轴和点 B 的坐标；

(3)分别过点 $P(t,0)$ 和点 $Q(t+2,0)$ 作 x 轴的垂线，交抛物线于点 M 和点 N，记抛物线在 M，N 之间的部分为图象 G（包括 M，N 两点）．记图形 G 上任意一点的纵坐标的最大值是 m，最小值为 n.

①当 $a=1$ 时，求 $m-n$ 的最小值；

②若存在实数 t，使得 $m-n=1$，直接写出 a 的取值范围.

9．（2022·北京市十一学校二模）在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $P(1,2)$，$Q(-2,2)$，函数 $y=\frac{m}{x}$.



(1)当函数 $y=\dfrac{m}{x}$ 的图象经过点 Q 时，求 m 的值并画出直线 $y=-x-m$.

(2)若 P，Q 两点中恰有一个点的坐标（x，y）满足不等式组 $\begin{cases} y>\dfrac{m}{x} \\ y<-x-m \end{cases}$ （m<0），求 m 的取值范围.

10．（2022·北京市十一学校二模）在平面直角坐标系 xOy 中，点 A（t，2）（t≠0）在二次函数 $y=ax^2+bx+2(a\neq 0)$ 的图象上.

(1)当 $t=4$ 时，求抛物线对称轴的表达式；

(2)若点 $B(5-t,0)$ 也在这个二次函数的图象上.

①当这个函数的最小值为 0 时，求 t 的值；

②若在 $0\le x\le 1$ 时，y 随 x 的增大而增大，求 t 的取值范围.

11．（2022·北京东城·一模）在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=x^2-2mx+m^2+1$ 与 y 轴交于点 A．点 $B\left(x_1,y_1\right)$ 是抛物线上的任意一点，且不与点 A 重合，直线 $y=kx+b(k\neq 0)$ 经过 A，B 两点.

(1)求抛物线的顶点坐标（用含 m 的式子表示）；

(2)若点 $C(m-2,a)$，$D(m+2,b)$ 在抛物线上，则 a________b（用"<"，"="或">"填空）；

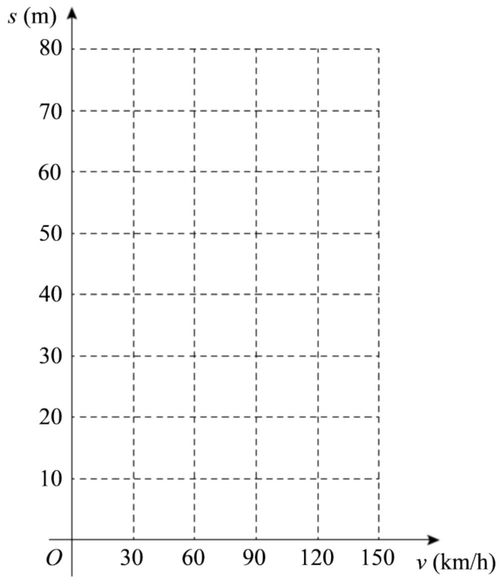
(3)若对于 $x_1<-3$ 时，总有 $k<0$，求 m 的取值范围.

12．（2022·北京海淀·二模）由于惯性的作用，行驶中的汽车在刹车后还要继续向前滑行一段距离才能停止，这段距离称为"刹车距离"．某公司设计了一款新型汽车，现在对它的刹车性能（车速不超过 150 km/h）进行测试，测得数据如下表：

车速 v（km/h）	0	30	60	90	120	150

刹车距离 s（m）	0	7.8	19.2	34.2	52.8	75

(1)以车速 v 为横坐标，刹车距离 s 为纵坐标，在坐标系中描出表中各组数值所对应的点，并用平滑曲线连接这些点；



(2)由图表中的信息可知：

①该型汽车车速越大，刹车距离越________（填"大"或"小"）；

②若该型汽车某次测试的刹车距离为 40 m，估计该车的速度约为________km/h；

(3)若该路段实际行车的最高限速为 120 km/h，要求该型汽车的安全车距要大于最高限速时刹车距离的 3 倍，则安全车距应超过________m.

13．（2022·北京海淀·二模）在平面直角坐标系 xOy 中，点（$m-2, y_1$），（m, y_2），（$2-m, y_3$）在抛物线 $y=x^2-2ax+1$ 上，其中 $m\neq1$ 且 $m\neq2$.

(1)直接写出该抛物线的对称轴的表达式（用含 a 的式子表示）；

(2)当 $m=0$ 时，若 $y_1=y_3$，比较 y_1 与 y_2 的大小关系，并说明理由；

(3)若存在大于 1 的实数 m，使 $y_1>y_2>y_3$，求 a 的取值范围.

14．（2022·北京市十一学校模拟预测）已知二次函数 $y=ax^2-4ax-3$ 的图象与 x 轴交于 A、B 两点（点 A 在点 B 的左侧），顶点为 D.

(1)直接写出函数图象的对称轴：_____；

(2)若△ABD 是等腰直角三角形，求 a 的值；

(3)当 $-1\leq x\leq k\left(2\leq k\leq 6\right)$ 时，y 的最大值 m 减去 y 的最小值 n 的结果不大于 3，求 a 的取值范围.

15．（2022·北京房山·二模）已知二次函数 $y=ax^2-4ax$.

(1)二次函数图象的对称轴是直线$x=$__________；

(2)当$0\le x\le 5$时，y的最大值与最小值的差为9，求该二次函数的表达式；

(3)若$a<0$，对于二次函数图象上的两点$P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$，当$t-1\le x_1\le t+1,x_2\ge 5$时，均满足$y_1\ge y_2$，请结合函数图象，直接写出$t$的取值范围．

16．（2022·北京平谷·一模）在平面直角坐标系xOy中，一次函数$y=kx+b$（$k\neq 0$）的图象经过点（﹣1，0），（0，2）．

(1)求这个一次函数的表达式；

(2)当$x>-2$时，对于x的每一个值，函数$y=mx$（$m\neq 0$）的值小于一次函数$y=kx+b$（$k\neq 0$）的值，直接写出m的取值范围．

17．（2022·北京门头沟·一模）某景观公园内人工湖里有一组喷泉，水柱从垂直于湖面的水枪喷出，水柱落于湖面的路径形状是一条抛物线．现测量出如下数据，在距水枪水平距离为d米的地点，水柱距离湖面高度为h米．

d（米）	0	d_1	1	2.0	3	d_2	…
h（米）	h_1	1.6	2.1	2.5	2.1	0	…

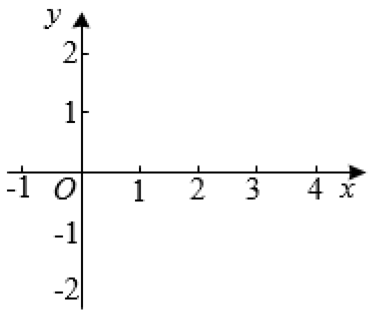
(1)在下边网格中建立适当平面直角坐标系，根据已知数据描点，并用平滑曲线连接．

(2)结合表中所给数据或所画的图象，直接写出水柱最高点距离湖面的高度；

(3)求水柱在湖面上的落点距水枪的水平距离是多少？

(4)现公园想通过喷泉设立一个新的游玩项目．准备通过调节水枪高度使得公园的平顶游船能从喷泉最高点的正下方通过（两次水柱喷出水嘴的初速度相同），如果游船宽度为3米，顶棚到水面的高度为2米，为了避免游船被淋到，顶棚到水柱的垂直距离不小于0.8米．问应如何调节水枪的高度才能符合要求？请通过计算说明理由．

18．（2022·北京十一学校一分校一模）在平面直角坐标系xOy中，已知抛物线M：$y=ax^2-4ax+4a+1(a<0)$和直线l：$y=x-3$．



(1)抛物线 M 的对称轴是直线 ________.

(2)若直线 $y=n$ 与抛物线 M 有两个公共点，它们的横坐标记为 x_1，x_2，直线 $y=n$ 与直线 l 的交点横坐标记为 x_3．若当 $-2<n<-1$ 时，总有 $x_1<x_3<x_2$，请结合函数图象，求 a 的取值范围．

19．（2022·北京朝阳·一模）在平面直角坐标系 xOy 中，点 $(-2,0),(-1,y_1),(1,y_2),(2,y_3)$ 在抛物线 $y=x^2+bx+c$ 上．

(1)若 $y_1=y_2$，求 y_3 的值；

(2)若 $y_2<y_1<y_3$，求 y_3 值的取值范围．

20．（2022·北京西城·一模）在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $l_1:y=kx+b$ 与坐标轴分别交于 $A(2,0)$，$B(0,4)$ 两点．将直线 l_1 在 x 轴上方的部分沿 x 轴翻折，其余的部分保持不变，得到一个新的图形，这个图形与直线 $l_2:y=m(x-4)(m\neq 0)$ 分别交于点 C，D．

(1)求 k，b 的值；

(2)横、纵坐标都是整数的点叫做整点．记线段 AC，CD，DA 围成的区域（不含边界）为 W．

①当 $m=1$ 时，区域 W 内有______个整点；

②若区域 W 内恰有 3 个整点，直接写出 m 的取值范围．

21．（2022·北京·东直门中学模拟预测）在平面直角坐标系 xOy 中，对于点 $P(x_1,y_1)$，给出如下定义：当点 $Q(x_2,y_2)$ 满足 $x_1+x_2=y_1+y_2$ 时，称点 Q 是点 P 的等和点．已知点 $P(2,0)$．

(1)在 $Q_1(0,2)$，$Q_2(-2,-1)$，$Q_3(1,3)$ 中，点 P 的等和点有______；

(2)点 A 在直线 $y=-x+4$ 上，若点 P 的等和点也是点 A 的等和点，求点 A 的坐标；

(3)已知点 $B(b,0)$ 和线段 MN，对于所有满足 $BC=1$ 的点 C，线段 MN 上总存在线段 PC 上每个点的等和点．若 MN 的最小值为 5，直接写出 b 的取值范围．

22．（2022·北京市第五中学分校模拟预测）在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2+bx+2$（$a\neq0$）经过点 A（1，﹣1），与 y 轴交于点 B．

(1)直接写出点 B 的坐标；

(2)点 P（m，n）是抛物线上一点，当点 P 在抛物线上运动时，n 存在最大值 N．

①若 $N=2$，求抛物线的表达式；

②若﹣9＜a＜﹣2，结合函数图象，直接写出 N 的取值范围．

23．（2022·北京市第五中学分校模拟预测）在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l_1：$y=ax$（$a\neq0$）过点 A（﹣2，1），直线 l_2：$y=mx+n$ 过点 B（﹣1，3）．

(1)求直线 l 的解析式；

(2)用含 m 的代数式表示 n；

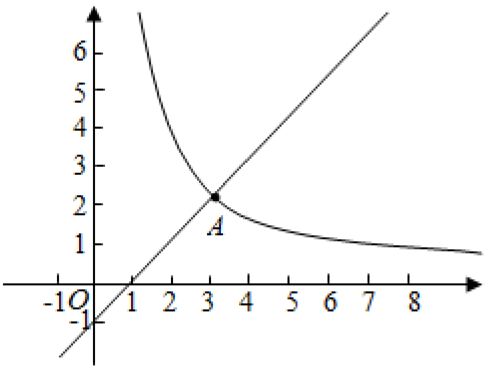
(3)当 x＜2 时，对于 x 的每一个值，函数 $y=ax$ 的值小于函数 $y=mx+n$ 的值，求 m 的取值范围．

24．（2022·北京市三帆中学模拟预测）在平面直角坐标系 xOy 中，点 $(-1,y_1)$，$(1,y_2)$，$(2,y_3)$ 在抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上．

(1)若 $a=-1$，$b=-2$，$c=0$，求该抛物线的对称轴并比较 y_1，y_2，y_3 的大小；

(2)已知抛物线的对称轴为 $x=t$，若 $y_2<c<y_3<y_1$，求 t 的取值范围．

25．（2022·北京·模拟预测）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l：$y=x-1$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（x＞0）的图象交于点 A（3，m）．



(1)求 m、k 的值；

(2)点 P（xp，0）是 x 轴上的一点，过点 P 作 x 轴的垂线，交直线 l 于点 M，交反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（x＞0）的图象于点 N．横、纵坐标都是整数的点叫做整点．记 $y=\frac{k}{x}$（x＞0）的图象在点 A，N 之间的部分与线段 AM，MN 围成的区域（不含边界）为 W．

①当 $xp=5$ 时，直接写出区域 W 内的整点的坐标为_____；

②若区域 W 内恰有 6 个整点，结合函数图象，求出 xp 的取值范围．

26．（2022·北京十一学校一分校模拟预测）在平面直角坐标系 xOy 中，点 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2）在抛物线 $y=-x^2+(2a-2)x-a^2+2a$ 上，其中 $x_1<x_2$．

(1)求抛物线的对称轴（用含 a 的式子表示）；

(2)①当 $x=a$ 时，求 y 的值；

②若 $y_1=y_2=0$，求 x_1 的值（用含 a 的式子表示）．

(3)若对于 $x_1+x_2<-4$，都有 $y_1<y_2$，求 a 的取值范围．

27．（2022·北京石景山·一模）在平面直角坐标 xOy 中，点 $(4,2)$ 在抛物线 $y=ax^2+bx+2(a>0)$ 上．

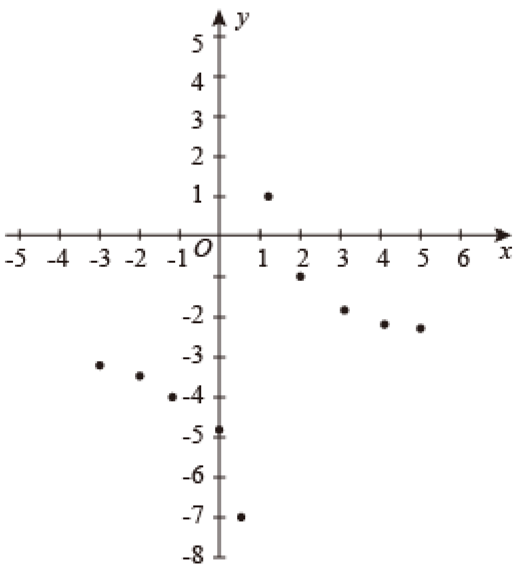
(1)求抛物线的对称轴；

(2)抛物线上两点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，且 $t<x_1<t+1$，$4-t<x_2<5-t$．

①当 $t=\dfrac{3}{2}$ 时，比较 y_1，y_2 的大小关系，并说明理由；

②若对于 x_1，x_2，都有 $y_1\neq y_2$，直接写出 t 的取值范围．

28．（2022·北京·中国人民大学附属中学分校一模）有这样一个问题：探究函数 $y=\dfrac{2}{x-1}-3$ 的图象与性质．小亮根据学习函数的经验，对函数 $y=\dfrac{2}{x-1}-3$ 的图象与性质进行了探究．下面是小亮的探究过程，请补充完整：



(1)函数 $y=\dfrac{2}{x-1}-3$ 中自变量 x 的取值范围是___；

(2)表格是 y 与 x 的几组对应值．

x	…	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	3	4	5	…
y	…	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{11}{3}$	-4	-5	-7	m	-1	-2	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{5}{2}$	…

直接写出 m 的值__________；

(3)在平面直角坐标系 xOy 中，描出了以上表中各对对应值为坐标的点，根据描出的点，画出该函数的图象；

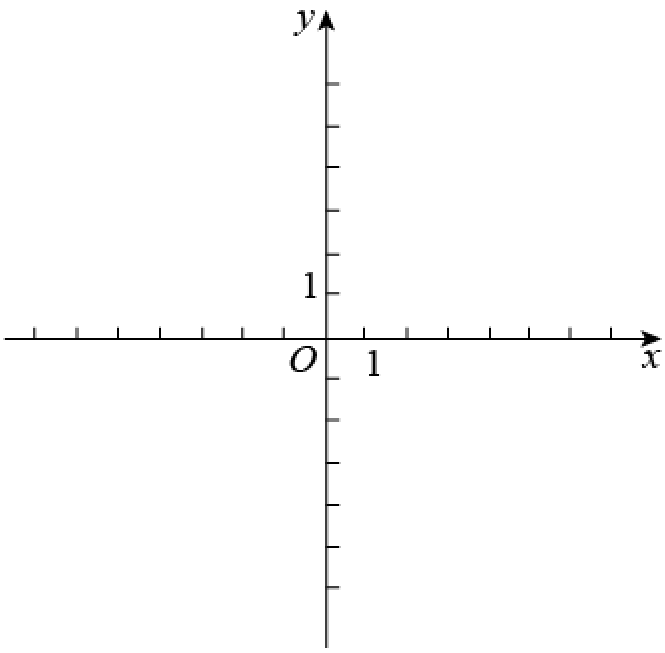
(4)根据画出的函数图象，发现下列特征：

①该函数的图象与直线 $x=1$ 越来越靠近而永不相交，该函数的图象还与直线______越来越靠近而永不相交.

②请再写出此函数的一条性质：__________.

(5)已知不等式 $kx+b<\frac{2}{x-1}-3$ 的解集为 $1<x<2$ 或 $x>4$，则 $k+b$ 的值为_______.

29．（2022·北京·中国人民大学附属中学分校一模）在平面直角坐标系 xOy 中，对于任意两点 $P_1(x_1,y_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2)$ 的“非常距离”，给出如下定义：若 $|x_1-x_2|\ldots|y_1-y_2|$，则点 P_1 与点 P_2 的“非常距离”为 $|x_1-x_2|$；若 $|x_1-x_2|<|y_1-y_2|$，则点 P_1 与点 P_2 的“非常距离”为 $|y_1-y_2|$.



(1)已知点 $A(-\frac{1}{2},0)$，B 为 y 轴上的一个动点，

①若点 A 与点 B 的“非常距离”为 4，直接写出点 B 的坐标：______；

②求点 A 与点 B 的“非常距离”的最小值；

(2)已知 C 是直线 $y=\frac{1}{2}x+2$ 上的一个动点，

①若点 D 的坐标是(0，1)，求点 C 与点 D 的“非常距离”的最小值及相应的点 C 的坐标；

②若点 E 是以原点 O 为圆心，1 为半径的圆上的一个动点，求点 C 与点 E 的“非常距离”的最小值及相应的点 E 和点 C 的坐标．

30．（2022·北京·中国人民大学附属中学朝阳学校一模）在平面直角坐标系 xOy 中，$M\left(a,y_1\right)$，$N\left(a+t,y_2\right)$ 为抛物线 $y=x^2+x$ 上两点，其中 $t>0$．

(1)求抛物线与 x 轴的交点坐标；

(2)若 $t=1$，点 M，N 在抛物线上运动，当 $\left|y_1-y_2\right|=1$ 时，求 a 的值；

(3)记抛物线在 M，N 两点之间的部分为图象 G（包含 M，N 两点），若图象 G 上最高点与最低点的纵坐标之差为 1，直接写出 t 的取值范围．

【北京卷中考数学压轴题模拟预测】
专题 3 函数综合压轴大题模拟预测题强化训练
（尖子生难题突破）

一、解答题

1．（2022·北京朝阳·二模）在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y=x^2+(a+2)x+2a$．

(1)求抛物线的对称轴（用含 a 的式子表示）；

(2)若点（－1，y_1），（a，y_2），（1，y_3）在抛物线上，且 $y_1<y_2<y_3$，求 a 的取值范围．

【答案】(1)直线 $x=-\frac{a+2}{2}$

(2) $-\frac{3}{2}<a<-1$ 或 $-\frac{1}{2}<a<1$

【解析】

【分析】

（1）直接根据函数表达式代入对称轴求解即可；

（2）分三种情况进行讨论分析：①当 $a<-1$ 时，②当 $-1<a<1$ 时，③当 $a>1$ 时，根据二次函数的基本性质及图象求解即可得出结果．

(1)

解：∵抛物线表达式为 $y=x^2+(a+2)x+2a$，

∴对称轴为直线 $x=-\frac{a+2}{2}$；

(2)

解：由题意可知抛物线开口向上．

①当 $a<-1$ 时，

由 $y_1<y_2$，得 $-\frac{a+2}{2}>\frac{a-1}{2}$．

解得 $a<-\frac{1}{2}$．

由 $y_2<y_3$，得 $-\frac{a+2}{2}<\frac{a+1}{2}$．

解得 $a>-\frac{3}{2}$．

∴ $-\frac{3}{2}<a<-1$．

②当 $-1<a<1$ 时，

由 $y_1<y_2$，得 $-\frac{a+2}{2}<\frac{a-1}{2}$．

解得$a>-\frac{1}{2}$.

由$y_2<y_3$，得$-\frac{a+2}{2}<\frac{a+1}{2}$.

解得$a>-\frac{3}{2}$.

$\therefore -\frac{1}{2}<a<1$.

③当$a>1$时，

由$y_1<y_2$，得$-\frac{a+2}{2}<\frac{a-1}{2}$.

解得$a>-\frac{1}{2}$.

由$y_2<y_3$，得$-\frac{a+2}{2}>\frac{a+1}{2}$.

解得$a<-\frac{3}{2}$.

无解.

综上，$-\frac{3}{2}<a<-1$或$-\frac{1}{2}<a<1$.

【点睛】

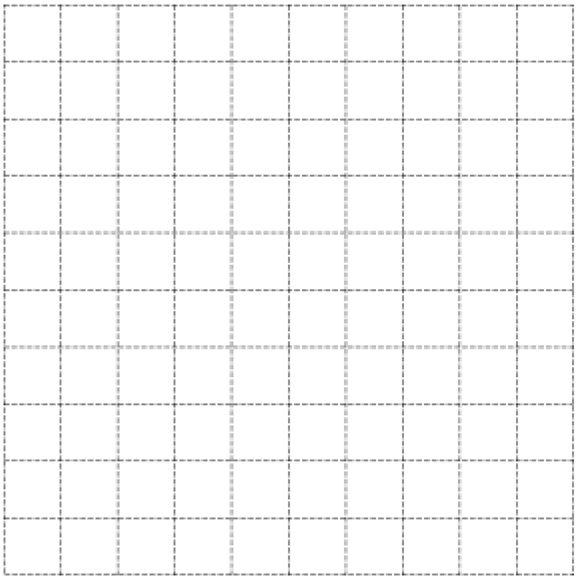
题目主要考查二次函数的基本性质及数形结合思想，理解题意，对a的值进行分类讨论是解题关键.

2．（2022·北京朝阳·二模）某公园在垂直于湖面的立柱上安装了一个多孔喷头，从喷头每个孔喷出的水柱形状都相同，可以看作是抛物线的一部分，当喷头向四周同时喷水时，形成一个环状喷泉，安装后，通过测量其中一条水柱，获得如下数据，在距立柱水平距离为d米的地点，水柱距离湖面的高度为h米，

请解决以下问题：

d（米）	0	1.0	3.0	5.0	7.0
h（米）	3.2	4.2	5.0	4.2	1.8

(1)在网格中建立适当的平面直角坐标系，根据已知数据描点，并用平滑的曲线连接；



(2)结合表中所给数据或所画图象，直接写出这条水柱最高点距离湖面的高度；

(3)求所画图象对应的函数表达式；

(4)从安全的角度考虑，需要在这个喷泉外围设立一圈正方形护栏，这个喷泉的任何一条水柱在湖面上的落点到护栏的距离不能小于 1 米，请通过计算说明公园至少需要准备多少米的护栏（不考虑接头等其他因素）.

【答案】(1)见解析

(2)5

(3)$h=-\frac{1}{5}\left(d-3\right)^{2}+5\left(0\le d\le 8\right)$

(4)72 米

【解析】

【分析】

（1）在表格中建立坐标系，然后描点、连线即可；

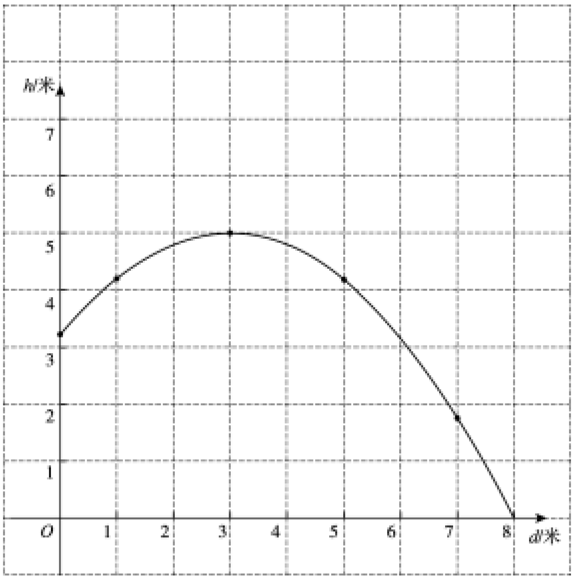
（2）观察图象即可；

（3）由表中点（1.0，4.2），(5.0，4.2)，可确定抛物线的对称轴及顶点坐标，则设抛物线解析式为顶点式即可，再找点（1.0，4.2）代入即可求得解析式；

（4）在求得的解析式中令 h=0，则可求得 d 的值，即可确定所需护栏的长度.

(1)

坐标系及图象如图所示.



(2)

由图象知，水柱最高点距离湖面的高度为 5 米.

(3)

∵抛物线经过点（1.0，4.2），（5.0，4.2），

∴抛物线的对称轴为$d=3$.

∴抛物线的顶点坐标为（3.0，5.0）.

设抛物线的函数表达式为$h=a\left(d-3\right)^2+5$.

把（1.0，4.2）代入，解得$a=-\frac{1}{5}$.

∴所画图象对应的函数表达式为$h=-\frac{1}{5}\left(d-3\right)^2+5\left(0\le d\le 8\right)$.

(4)

令$h=0$，解得$d_1=-2$（舍），$d_2=8$.

∴每条水柱在湖面上的落点到立柱的水平距离为 8 米.

∵这个喷泉的任何一条水柱在湖面上的落点到护栏的距离不能小于 1 米，

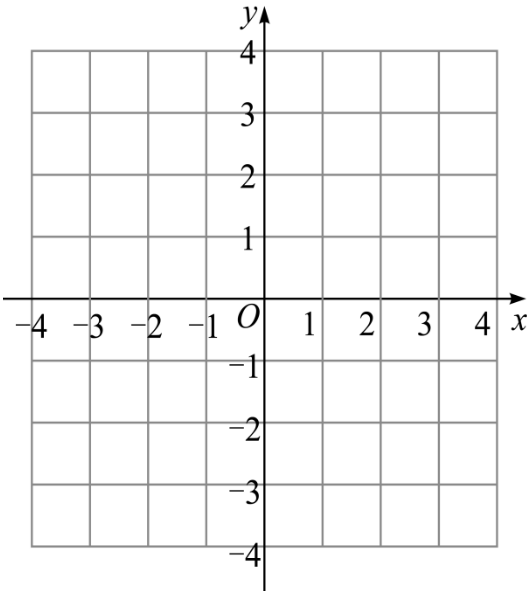
∴正方形护栏的边长至少为 18 米.

则公园至少需要准备 18×4=72（米）的护栏.

【点睛】

本题是二次函数的实际问题，考查了画二次函数图象，求二次函数解析式，二次函数与一元二次方程的关系等知识，二次函数的相关知识是解题的关键.

3．（2022·北京东城·二模）如图，在平面直角坐标系xOy中，双曲线$y=\frac{k}{x}(k\ne 0)$经过点$A(2,-1)$，直线l：$y=-2x+b$经过点$B(2,-2)$.



(1)求 k,b 的值；

(2)过点 $P(n,0)\left(n>0\right)$ 作垂直于 x 轴的直线，与双曲线 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 交于点 C，与直线 l 交于点 D.

①当 $n=2$ 时，判断 CD 与 CP 的数量关系；

②当 $CD\leq CP$ 时，结合图象，直接写出 n 的取值范围.

【答案】(1)k=-2，b=2；

(2)①CD=CP；②$1\leq n\leq 2$

【解析】

【分析】

（1）直接利用待定系数法即可确定这两个值；

（2）①过点 $P(n,0)(n>0)$作垂直于 x 轴的直线，与双曲线交于点 C，与直线 l 交于点 D，由（1）得，双曲线的解析式为 $y=-\dfrac{2}{x}$，直线的解析式为：y=-2x+2，得出 C(n，$-\dfrac{2}{n}$)，D（n，-2n+2），得出 DC=$\left|-\dfrac{2}{n}-\left(-2n+2\right)\right|=\left|2n-\dfrac{2}{n}-2\right|$，$CP$=$\left|-\dfrac{2}{n}\right|=\dfrac{2}{n}$，当 n=2 时，代入求解即可；

②考虑当 CD=CP 时，解方程确定 n 的值，然后作出函数图象，结合图象求解即可.

(1)

解：∵双曲线经过点 A(2,-1)，

∴k=2×(-1)=-2，

∵直线 l 经过点 B（2，-2），

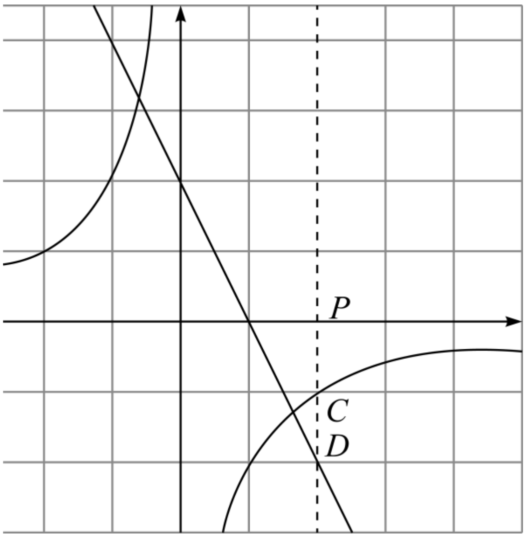
∴-2=-2×2+b，

解得 b=2，

即 k、b 的值分别为：-2；2；

(2)

①过点 $P(n,0)(n>0)$作垂直于 x 轴的直线，与双曲线交于点 C，与直线 l 交于点 D，由（1）得，双曲线的解析式为 $y=-\frac{2}{x}$，直线的解析式为：$y=-2x+2$，



∴$C(n，-\frac{2}{n})$，D（n，$-2n+2$）

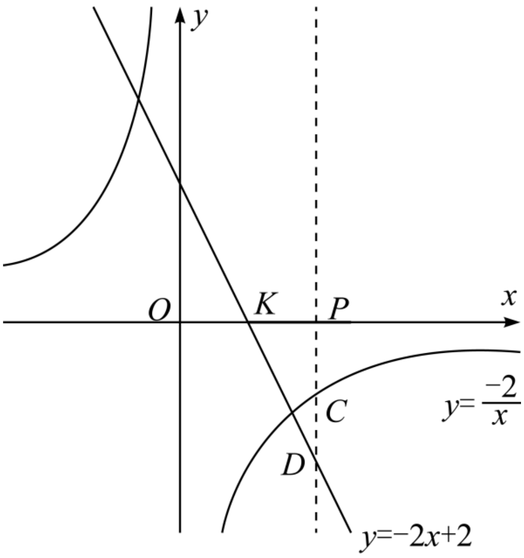
∴$DC=\left|-\frac{2}{n}-(-2n+2)\right|=\left|2n-\frac{2}{n}-2\right|$，$CP=\left|-\frac{2}{n}\right|=\frac{2}{n}$，

当 n=2 时，$P(2,0)$、$C(2,-1)$、$D(2,-2)$，此时点 C 与点 A 重合，点 D 与点 B 重合，

∴CD=-1-（-2）=1，CP=0-(-1)=1，

∴$CD=CP$；

②设直线 l：$y=-2x+2$ 与 x 轴交于 K，如图：



在 $y=-2x+2$ 中，令 $y=0$ 得 $x=1$，

∴K（1，0），

由图可知，当 P 位于 K 及右侧，（2，0）及左侧时，$CD\le CP$，

∴$1\le n\le 2$．

【点睛】

题目主要考查一次函数与反比例函数综合问题，包括待定系数法确定函数解析式，坐标系中两点间的距离及数形结合思想等，理解题意，综合运用这些知识点是解题关键．

4．（2022·北京东城·二模）小强用竹篱笆围一个面积为$\frac{9}{4}$平方米的矩形小花园，他考虑至少需要几米长的竹篱笆（不考虑接缝），根据学习函数的经验，他做了如下的探究，请你完善他的思考过程．

(1)建立函数模型：

设矩形小花园的一边长为 x 米，则矩形小花园的另一边长为__________米（用含 x 的代数式表示）；若总篱笆长为 y 米，请写出总篱笆长 y（米）关于边长 x（米）的函数关系式__________；

(2)列表：

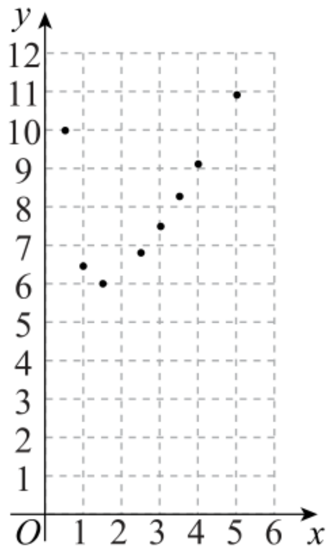
根据函数的表达式，得到了 x 与 y 的几组对应值，如下表：

x	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5
y	10	$\frac{13}{2}$	6	a	$\frac{34}{5}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{58}{7}$	$\frac{73}{8}$	b	$\frac{109}{10}$

表中 $a=$________，$b=$ ________；

(3)描点、画出函数图象：

如图，在平面直角坐标系xOy中，将表中未描出的点$(2,a)$，$(\frac{9}{2},b)$补充完整，并根据描出的点画出该函数的图象；



(4)解决问题：

根据以上信息可得，当$x=$__________时，y有最小值．由此，小强确定篱笆长至少为_________米．

【答案】(1)$\frac{9}{4x}$，$y=2x+\frac{9}{2x}$

(2)6.25，10

(3)见解析

(4)1.5，6

【解析】

【分析】

（1）根据矩形的面积公式，求得另一边的长，根据矩形的周长列出函数关系式；

（2）将$x=2$与$x=\frac{9}{2}$代入（1）中函数关系式即可求解；

（3）表中未描出的点$(2,6.25)$，$(\frac{9}{2},10)$补充完整，并根据描出的点画出该函数的图象；

（4）结合函数图像即可求解．

(1)

解：$\because$面积为$\frac{9}{4}$平方米的矩形小花园，设矩形小花园的一边长为x米，

则矩形小花园的另一边长为$\frac{\frac{9}{4}}{x}=\frac{9}{4x}$

若总篱笆长为y米，则$y=2\left(x+\frac{9}{4x}\right)=2x+\frac{9}{2x}\quad(x>0)$

故答案为：$\frac{9}{4x}$，$y=2x+\frac{9}{2x}$

(2)

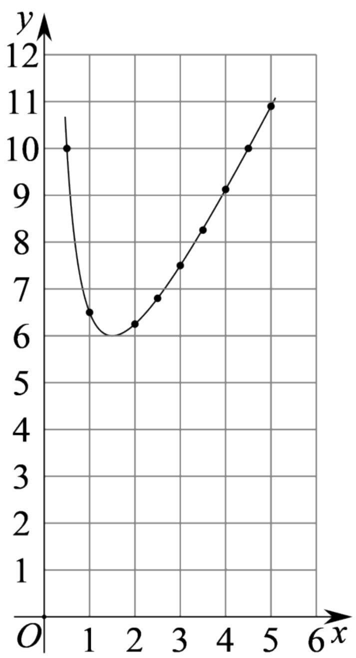
当$x=2$时，$a=2\times2+\frac{9}{4}=6.25$，

当$x=\frac{9}{2}$时，$b=2\times\frac{9}{2}+\frac{9}{2\times\frac{9}{2}}=10$

故答案为：6.25，10

(3)

在坐标系描出点$(2,6.25)$，$(\frac{9}{2},10)$，并用平滑的曲线连接点，如图，



(4)

根据以上信息可得，当$x=1.5$时，y有最小值为6．由此，小强确定篱笆长至少为6米．

故答案为：1.5，6

【点睛】

本题考查了描点法画函数图象，根据函数图象获取信息，求函数值，理解题意，掌握描点法画函数图象是解题的关键．

5．（2022·北京东城·二模）在平面直角坐标系xOy中，抛物线$y=ax^2+bx+1(a\neq0)$的对称轴是直线$x=3$．

(1)直接写出抛物线与y轴的交点坐标；

(2)求抛物线的顶点坐标（用含 a 的式子表示）；

(3)若抛物线与 x 轴相交于 A,B 两点，且 $AB\le 4$，求 a 的取值范围.

【答案】(1)（0，1）；

(2)（3，﹣ $9a+1$）；

(3)$\frac{1}{9}<a\le\frac{1}{5}$

【解析】

【分析】

（1）根据 y 轴上点的坐标特征，即可求出答案；

（2）根据抛物线的对称轴为直线 $x=3$，求出 $b=-6a$，进而得出抛物线解析式，最后将 $x=3$ 代入抛物线解析式求出顶点坐标的纵坐标，即可得出结论；

（3）①当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，不妨设点 A 在点 B 的左侧，由（1）知，抛物线 $y=ax^2+bx+1$ 与 y 轴的交点为（0，1），进而判断出 $xA<0$，$xB>6$，得出 $AB=|xB-xA|>6$，判断出此种情况不符合题意，

②当 $a>0$ 时，抛物线的开口向上，判断出在 x 轴上关于抛物线的对称轴 $x=3$ 对称且距离为 4 的两点的坐标为（1，0），（5，0），再由当 $x=1$ 时，得出 $a-6a+1\ge0$，求出 $a\le\frac{1}{5}$，再根据 $y_{顶点}=-9a+1<0$，即可得出答案.

(1)

针对于抛物线 $y=ax^2+bx+1$，

令 $x=0$，则 $y=1$，

∴抛物线与 y 轴的交点坐标为（0，1）；

(2)

∵抛物线 $y=ax^2+bx+1$（$a\neq0$）的对称轴是直线 $x=3$，

$\therefore -\frac{b}{2a}=3$，

$\therefore b=-6a$，

∴抛物线的解析式为 $y=ax^2-6ax+1$，

当 $x=3$ 时，$y=9a-18a+1=-9a+1$，

∴抛物线的顶点坐标为（3，﹣ $9a+1$）；

(3)

①当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，不妨设点 A 在点 B 的左侧，

由（1）知，抛物线 $y=ax^2+bx+1$ 与 y 轴的交点为（0，1），

∵抛物线 $y=ax^2+bx+1$ 的对称轴为直线 $x=3$，

$\therefore xA<0$，$xB>6$，

∴$AB=|xB-xA|>6$，

∵$AB\le 4$，

∴此种情况不符合题意，

②当 $a>0$ 时，抛物线的开口向上，

由（2）知，抛物线的解析式为 $y=ax^2-6ax+1$，

在 x 轴上关于抛物线的对称轴 $x=3$ 对称且距离为 4 的两点的坐标为（1，0），（5，0），

∵$AB\le 4$，

∴当 $x=1$ 时，$y=ax^2-6ax+1=a-6a+1\ge 0$，

∴$a\le\frac{1}{5}$，

∵抛物线与 x 轴有两个交点，

∴$y_{顶点}=-9a+1<0$，

∴$a>\frac{1}{9}$，

∴$\frac{1}{9}<a\le\frac{1}{5}$．

【点睛】

此题主要考查了二次函数的图像和性质，顶点坐标的求法，掌握二次函数的性质是解本题的关键．

6．（2022·北京平谷·二模）在平面直角坐标系 xOy 中，点$(-1,y_1)$、$(1,y_2)$、$(3,y_3)$是抛物线 $y=x^2+bx+1$上三个点．

(1)直接写出抛物线与 y 轴的交点坐标；

(2)当 $y_1=y_3$ 时，求 b 的值；

(3)当 $y_3>y_1>1>y_2$ 时，求 b 的取值范围．

【答案】(1)（0，1）；

(2)-2；

(3)-2＜b＜-1；

【解析】

【分析】

（1）令 x=0，代入抛物线求得 y 值即可解答；

（2）利用抛物线的对称性求得对称轴，再计算求值即可；

（3）根据 $y_2<1$，$y_1>1$，$y_3>y_1$ 将 x 的值代入抛物线解不等式，再求不等式的解的公共部分即可；

(1)

解：令 x=0，得：y=0+0+1=1，

∴抛物线 $y=x^2+bx+1$ 与 y 轴的交点坐标（0，1）；

(2)

解：当 $y_1=y_3$ 时，由点 $(-1,y_1)$，$(3,y_3)$ 可得抛物线对称轴为 x=1，

$\therefore x=-\dfrac{b}{2}=1$，

∴b=-2，

(3)

解：由 $y_2<1$ 可得：1+b+1＜1，b＜-1，

由 $y_1>1$ 可得：1-b+1＞1，b＜1，

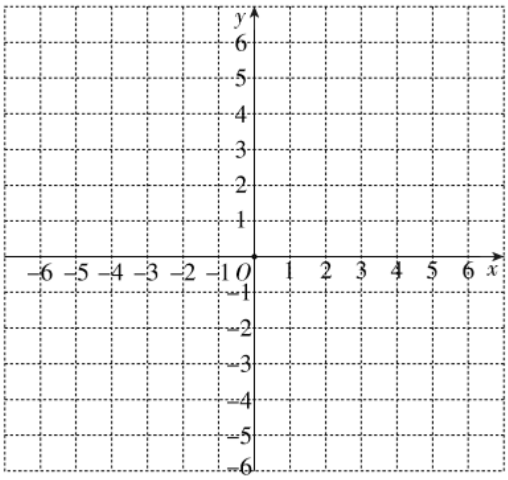
由 $y_3>y_1$ 可得：9+3b+1＞1-b+1，b＞-2，

∴当 $y_3>y_1>1>y_2$ 时，-2＜b＜-1；

【点睛】

本题考查了二次函数的综合，一元一次不等式的应用，掌握二次函数的性质是解题关键．

7．（2022·北京平谷·二模）在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的图象由函数 $y=\dfrac{1}{2}x$ 平移得到，且过点 $(0,-1)$．



(1)求这个一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的表达式；

(2)当 $x>-2$ 时，对于 x 的每一个值，函数 $y=mx+1$ 的值大于一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的值，求 m 的取值范围．

【答案】(1) $y=\dfrac{1}{2}x-1$

(2) $\dfrac{1}{2}\leq m\leq\dfrac{3}{2}$

【解析】

【分析】

（1）先根据一次函数图象的平移可得 $k = \frac{1}{2}$，再将点 $(0,-1)$ 代入即可得；

（2）先根据 $mx+1>\frac{1}{2}x-1$ 可得 $(m-\frac{1}{2})x+2>0$，从而问题可转化为当 $x>-2$ 时，函数 $y=(m-\frac{1}{2})x+2$ 的值大于 0，再分①$m=\frac{1}{2}$ 和②$m>\frac{1}{2}$ 两种情况，解不等式即可得．

(1)

解：$\because$ 一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的图象由函数 $y=\frac{1}{2}x$ 平移得到，

$\therefore k=\frac{1}{2}$，

$\because$ 一次函数 $y=\frac{1}{2}x+b$ 的图象经过点 $(0,-1)$，

$\therefore b=-1$，

则这个一次函数的表达式为 $y=\frac{1}{2}x-1$．

(2)

解：当 $x>-2$ 时，对于 x 的每一个值，函数 $y=mx+1$ 的值大于一次函数 $y=\frac{1}{2}x-1$ 的值，则

$m\geq\frac{1}{2}$，

$mx+1>\frac{1}{2}x-1$，即 $(m-\frac{1}{2})x+2>0$，

则所求问题可转化为当 $x>-2$ 时，函数 $y=(m-\frac{1}{2})x+2$ 的值大于 0，

①当 $m=\frac{1}{2}$ 时，$y=2>0$ 符合题意；

②当 $m>\frac{1}{2}$ 时，则 $-2(m-\frac{1}{2})+2\geq 0$，

解得 $m\leq\frac{3}{2}$，

所以此时 m 的取值范围为 $\frac{1}{2}<m\leq\frac{3}{2}$，

综上，m 的取值范围为 $\frac{1}{2}\leq m\leq\frac{3}{2}$．

【点睛】

本题考查了一次函数图象的平移、待定系数法、一元一次不等式的应用，较难的是题（2），正确将问题进行转化，并分两种情况讨论是解题关键．

8．（2022·北京市燕山教研中心一模）在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线

$y=ax^2+bx+3a\left(a\neq 0\right)$与 x 轴的交点为点 $A\left(1,0\right)$和点 B．

(1)用含 a 的式子表示 b；

(2)求抛物线的对称轴和点 B 的坐标；

(3)分别过点 $P\left(t,0\right)$和点 $Q\left(t+2,0\right)$作 x 轴的垂线，交抛物线于点 M 和点 N，记抛物线在 M，N 之间的部分为图象 G（包括 M，N 两点）．记图形 G 上任意一点的纵坐标的最大值是 m，最小值为 n．

①当 $a=1$ 时，求 $m-n$ 的最小值；

②若存在实数 t，使得 $m-n=1$，直接写出 a 的取值范围．

【答案】(1) $b=-4a$

(2) $x=2$，$\left(3,0\right)$

(3)①1；②$0<a\leq 1$或$-1\leq a<0$

【解析】

【分析】

（1）把点 $A(1,0)$ 代入 $y=ax^2+bx+3a$ 即可得 $b=-4a$；

（2）由对称轴公式可得抛物线的对称轴为直线 $x=-\dfrac{-4a}{2a}=2$，由抛物线对称性得点 B 坐标 $(3,0)$；

（3）①当 $a=1$ 时，$y=ax^2-4ax+3a=a(x-1)(x-3)=(x-1)(x-3)$，即得抛物线与 x 轴交点坐标为 $(1,0)$，$(3,0)$，与 y 轴交点坐标为 $(0,3)$，顶点坐标为 $(2,-1)$，当图象 G 为对称图形时 $m-n$ 有最小值，可得 $2-t=(t+2)-2$，$t=1$，即得 $m-n$ 的最小值为 $0-(-1)=1$；

②由（1）知抛物线为 $y=ax^2-4ax+3a$，得 $M(t,at^2-4at+3a)$，$N(t+2,a(t+2)^2-4a(t+2)+3a)$，顶点坐标为 $(2,-a)$，可分四种情况讨论 a 的取值：（Ⅰ）当 $a>0$，且 $t+2\leqslant 2$ 时，$at^2-4at+3a-[a(t+2)^2-4a(t+2)+3a]=1$，解得 $t=1-\dfrac{1}{4a}$，可得 $0<a\leqslant\dfrac{1}{4}$；（Ⅱ）当 $a>0$，且 $t\geqslant 2$ 时，$a(t+2)^2-4a(t+2)+3a-(at^2-4at+3a)=1$，可得 $0<a\leqslant\dfrac{1}{4}$，（Ⅲ）当 $a>0$，且 $0<t\leqslant 1$ 时，$at^2-4at+3a-(-a)=1$，可得 $\dfrac{1}{4}\leqslant a<1$；（Ⅳ）当 $a>0$，且 $1<t\leqslant 2$ 时，$a(t+2)^2-4a(t+2)+3a-(-a)=1$，可得 $\dfrac{1}{4}<a\leqslant 1$，即知当 $0<a\leqslant 1$ 时，$m-n=1$，同理可得：当 $a<0$ 时，$-1\leqslant a<0$ 也符合条件．

(1)

解：把点 $A(1,0)$ 代入 $y=ax^2+bx+3a$ 得：

$a+b+3a=0$，

$\therefore b=-4a$；

(2)

解：由（1）知抛物线为 $y=ax^2-4ax+3a$，

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=-\dfrac{-4a}{2a}=2$，

而 $A(1,0)$ 关于直线 $x=2$ 的对称点是 $(3,0)$，

由抛物线对称性得：点 B 坐标 $(3,0)$；

(3)

解：①如图：

当 $a=1$ 时，$y=ax^2-4ax+3a=a(x-1)(x-3)=(x-1)(x-3)$，

$\therefore$ 抛物线与 x 轴交点坐标为 $(1,0)$，$(3,0)$，与 y 轴交点坐标为 $(0,3)$，顶点坐标为 $(2,-1)$，

由图象知：当图象 G 为对称图形时 $m-n$ 有最小值，

又 $P(t, 0)$，$Q(t+2, 0)$，

$\therefore 2-t=(t+2)-2$，

$\therefore t=1$，

$\because$ 过点 $P(t,0)$ 和点 $Q(t+2,0)$ 作 x 轴的垂线，交抛物线于点 M 和点 N，

$\therefore M(1,0)$，$N(3,0)$，

$\because$ 顶点坐标为 $(2,-1)$，

$\therefore m-n$ 的最小值为 $0-(-1)=1$；

②$\because$ 点 $P(t,0)$ 和点 $Q(t+2,0)$ 作 x 轴的垂线，交抛物线于点 M 和点 N，

由（1）知抛物线为 $y=ax^2-4ax+3a$，

$\therefore M(t,at^2-4at+3a)$，$N(t+2, a(t+2)^2-4a(t+2)+3a)$，

又$\because$ 抛物线对称轴为直线 $x=2$，顶点坐标为 $(2,-a)$，

$\therefore$ 根据 M、N 点的相对位置和抛物线的开口方向可分以下四种情况讨论 a 的取值：

（Ⅰ）当 $a>0$，且 $t+2\leqslant 2$ 时，即图象 G 在对称轴左侧时，

此时 M 点的纵坐标最大，N 点的纵坐标最小，

$\therefore at^2-4at+3a-[a(t+2)^2-4a(t+2)+3a]=1$，

解得 $t=1-\dfrac{1}{4a}$，

又$\because t\leqslant 0$，$a>0$，

$\therefore 1-\dfrac{1}{4a}\leqslant 0$ 且 $a>0$，

$\therefore 0<a\leqslant\dfrac{1}{4}$；

（Ⅱ）当 $a>0$，且 $t\geqslant 2$ 时，即图象 G 在对称轴右侧时，

此时 N 点的纵坐标最大，M 点的纵坐标最小，

$\therefore a(t+2)^2-4a(t+2)+3a-(at^2-4at+3a)=1$,

解得 $t=1+\dfrac{1}{4a}$,

又 $\because t\geq 2$, $a>0$,

$\therefore 1+\dfrac{1}{4a}\geq 2$ 且 $a>0$,

$\therefore 0<a\leq \dfrac{1}{4}$,

(Ⅲ) 当 $a>0$, 且 $0<t\leq 1$ 时, 即最低点是抛物线顶点且 M 点纵坐标大时,

此时 $m=at^2-4at+3a$, $n=-a$,

$\therefore at^2-4at+3a-(-a)=1$,

解得 $t=2\pm\dfrac{\sqrt{a}}{a}$,

又 $\because 0<t\leq 1$, $a>0$,

$\therefore t=2-\dfrac{\sqrt{a}}{a}$,

$\therefore 0<2-\dfrac{\sqrt{a}}{a}\leq 1$,

$\therefore \dfrac{1}{4}<a\leq 1$;

(Ⅳ) 当 $a>0$, 且 $1<t\leq 2$ 时, 即最低点是抛物线顶点时且 N 点纵坐标大,

此时 $m=a(t+2)^2-4a(t+2)+3a$, $n=-a$,

$\therefore a(t+2)^2-4a(t+2)+3a-(-a)=1$,

解得 $t^2=\dfrac{1}{a}$,

又 $\because 1<t\leq 2$, $a>0$,

$\therefore 1<\dfrac{1}{a}\leq 4$,

$\therefore \dfrac{1}{4}\leq a<1$,

综上所述, 当 $0<a\leq 1$ 时, $m-n=1$,

同理可得: 当 $a<0$ 时, $-1\leq a<0$ 也符合条件,

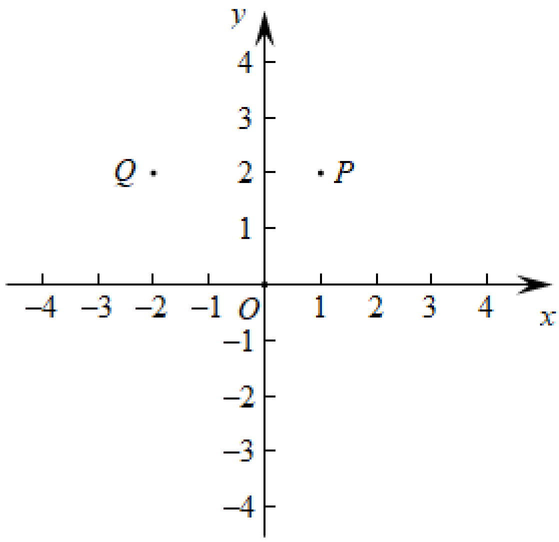
$\therefore a$ 的取值范围为 $0<a\leq 1$ 或 $-1\leq a<0$.

【点睛】

本题考查二次函数的综合应用, 难度较大, 解题的关键是分类讨论图象 G 上纵坐标的大小值.

9.(2022·北京市十一学校二模)在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $P(1,2)$, $Q(-2,2)$

，函数 $y=\frac{m}{x}$.



(1)当函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象经过点 Q 时，求 m 的值并画出直线 $y=-x-m$.

(2)若 P，Q 两点中恰有一个点的坐标（x，y）满足不等式组 $\begin{cases} y>\frac{m}{x} \\ y<-x-m \end{cases}$（$m<0$），求 m 的取值范围.

【答案】(1)$m=-4$，画图见解析

(2)$-3\le m<0$ 或 $m\le -4$

【解析】

【分析】

（1）根据待定系数法，将 Q 点坐标代入 $y=\frac{m}{x}$ 即可求值，进而画出直线的图象；

（2）不等式组表达含义为 P、Q 中的一点位于反比例函数图象上方，位于一次函数图象下方，根据 $m<0$ 的条件，数形结合即可求出 m 的取值范围.

(1)

解：∵函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象经过点 Q，

∴$m=-2\times 2=-4$，

一次函数的解析式为：$y=-x+4$，图象如下.

(2)

解：由题意知，P、Q 中的一点位于反比例函数图象上方，位于一次函数图象下方，

∵$m<0$，

∴反比例函数经过二、四象限，

故 P 点在反比例函数图象上方，

∴存在两种情况，

①Q 在反比例函数图象上方，在一次函数图象下方，P 在一次函数图象上或上方，

即：$\begin{cases} 2>\dfrac{m}{-2} \\ 2<2-m \\ -1-m\le 2 \end{cases}$，解得：$-3\le m<0$；

②Q 在反比例函数图象上或下方，P 在一次函数图象下方，

即：$\begin{cases} 2\le\dfrac{m}{-2} \\ -1-m>2 \end{cases}$，解得：$m\le-4$；

综上所述，m 的取值范围为：$-3\le m<0$ 或 $m\le-4$．

【点睛】

本题考查了待定系数法求反比例函数解析式，解决本题难点是分析出反比例函数、一次函数的图象与 P、Q 两点的位置关系，得到关于 m 的不等式组．

10．（2022·北京市十一学校二模）在平面直角坐标系 xOy 中，点 A（t，2）（$t\neq0$）在二次函数 $y=ax^2+bx+2(a\neq0)$ 的图象上．

(1)当 $t=4$ 时，求抛物线对称轴的表达式；

(2)若点 $B(5-t,0)$ 也在这个二次函数的图象上．

①当这个函数的最小值为 0 时，求 t 的值；

②若在 $0\le x\le1$ 时，y 随 x 的增大而增大，求 t 的取值范围．

【答案】(1)直线 $x=2$

(2)①$t=\dfrac{10}{3}$；②$2\le t<\dfrac{5}{2}$ 或 $t>5$

【解析】

【分析】

（1）根据二次函数解析式确定二次函数图象过点（0，2），再根据点 A 的坐标即可求出二次函数对称轴的表达式．

（2）①根据点（0，2）和点 A 坐标用 t 表示二次函数对称轴，再根据二次函数的最值情况列出方程并求解即可．

②根据二次函数开口方向进行分类讨论，根据二次函数的增减性和点 B 坐标列出不等式（组）并求解即可．

(1)

解：∵二次函数解析式为 $y=ax^2+bx+2(a\neq0)$，

∴当 $x=0$ 时，$y=2$．

∴二次函数图象经过点（0，2）.

∵t=4，

∴点 A（4，2）在二次函数 $y=ax^2+bx+2(a\neq 0)$ 的图象上.

∴二次函数图象的对称轴是直线 $x=\frac{0+4}{2}=2$.

(2)

解：①∵二次函数 $y=ax^2+bx+2(a\neq 0)$ 的图象经过点（0，2）和（t，2），

∴二次函数的对称轴为直线 $x=\frac{0+t}{2}=\frac{t}{2}$.

∴当 $x=\frac{t}{2}$ 时，二次函数取得最值.

∵二次函数的最小值为 0，且点 $B(5-t,0)$ 也在这个二次函数的图象上，

∴$\frac{t}{2}=5-t$.

∴$t=\frac{10}{3}$.

②当 a<0 时.

∵二次函数对称轴是直线 $x=\frac{t}{2}$，在 $0\leq x\leq 1$ 时，y 随 x 的增大而增大，

∴$\frac{t}{2}\geq 1$.

∴$t\geq 2$.

∵点 $B(5-t,0)$ 也在这个二次函数的图象上，

∴$5-t<0$ 或 $5-t>t$.

解得 t>5 或 $t<\frac{5}{2}$.

∴$2\leq t<\frac{5}{2}$ 或 t>5.

当 a>0 时.

∵二次函数对称轴是直线 $x=\frac{t}{2}$，在 $0\leq x\leq 1$ 时，y 随 x 的增大而增大，

∴$\frac{t}{2}\leq 0$.

∴$t\leq 0$.

∵点 $B(5-t,0)$ 也在这个二次函数的图象上，

∴$t<5-t<0$.

∴该不等式组无解.