概率密度函数

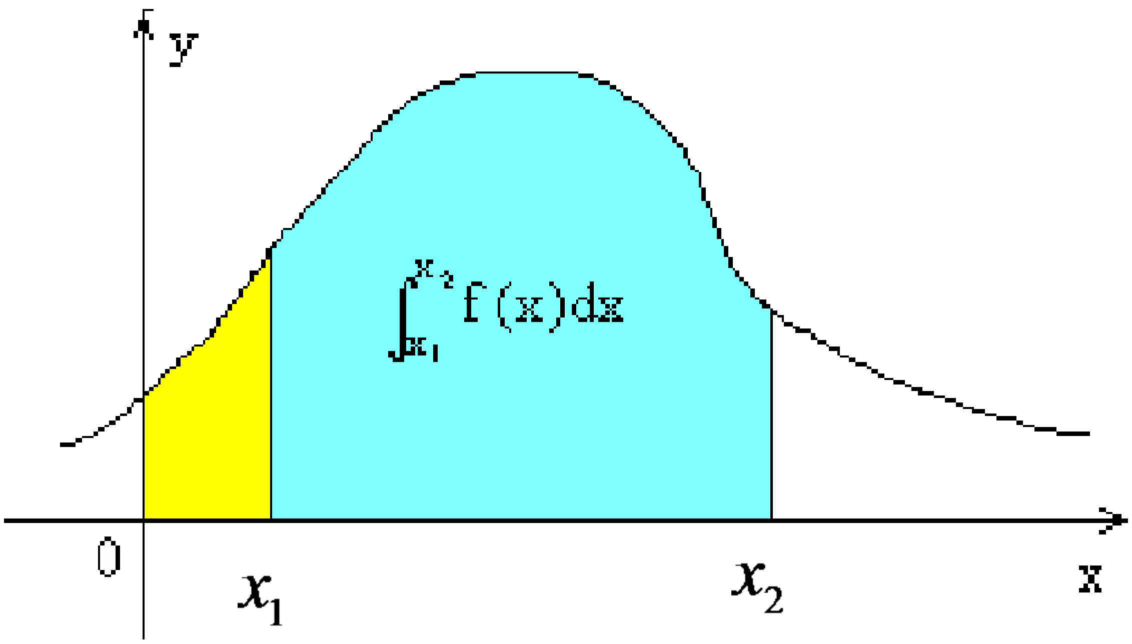
定义 设X为一随机变量，若存在非负实函数 $f(x)$，使对任意实数 a < b，有

$$P\{a \le x < b\} = \int_a^b f(x)dx$$

则称X为连续型随机变量，$f(x)$ 称为X 的概率密度函数,简称概率密度或密度函数.

分布函数 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

$$P\{x_1 \le X < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$



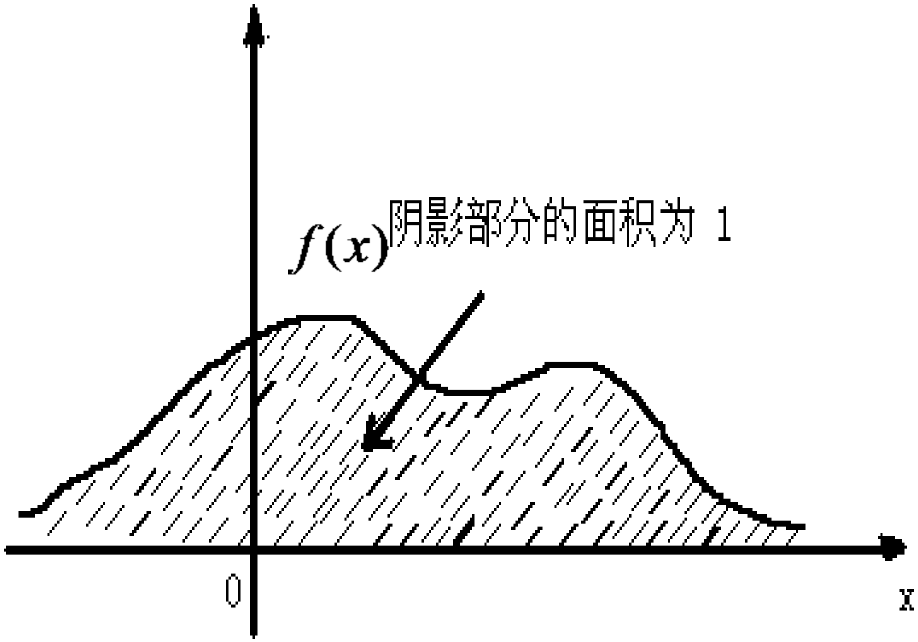
概率密度函数的性质

(1) 非负性

$$f(x) \geq 0, \ \forall x \in (-\infty, +\infty)$$

(2) 规范性

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$



$$P\{-\infty < x < +\infty\} = 1$$

密度函数和分布函数的关系

积分关系

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx$$

$$F(x)=P\{X<x\}=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx$$

导数关系

若$f(x)$在x处连续，则$F'(x)=f(x)$

连续型随机变量的分布函数的性质

连续型随机变量的分布函数在实数域内到处连续

所以，连续型随机变量取任意指定实数值a的概率为0

$$P(X=a)=0$$

$$P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b) = P(a < X < b)$$

$$= \int_a^b f(x)dx$$

X取值在某区间的概率等于密度函数在此区间上的定积分

已知密度函数求概率

例 随机变量 X 的概率密度为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x & |x| \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求 $P(0 \le X \le \dfrac{\pi}{4})$

解 利用密度函数的性质求出 a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos x dx = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

$$P(0 \le X \le \frac{\pi}{4}) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cos x dx = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

例 设随机变量X具有概率密度 $f(x)=\begin{cases} a\cos x & |x|<\dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

求：（1）常数a；（2）$P\left\{0<X<\dfrac{\pi}{4}\right\}$

（3）X的分布函数$F(x)$

解

（1）由概率密度的性质可知

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos x dx=2a$$

所以 $a=1/2$

(2) $P\left\{0<X<\dfrac{\pi}{4}\right\}$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cos x dx=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

(3) $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

当$x<-\dfrac{\pi}{2}$时 $\quad F(x)=0$

当$-\dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{\pi}{2}$时 $\quad F(x)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\dfrac{1}{2}\cos x dx=\dfrac{1}{2}(1+\sin x)$

当$x\ge\dfrac{\pi}{2}$时 $\quad F(x)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{2}\cos x dx=1$

于是X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{2}(1+\sin x) & -\dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{\pi}{2} \\ 1 & x\ge\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

已知分布函数求密度函数

例 随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x^2 & 0<x\le 1\\ 1 & x>1\end{cases}$$

(1) 求 $P(0.3<X<0.7)$

(2) X 的密度函数

解

(1) $P(0.3<X<0.7)=F(0.7)-F(0.3)=0.7^2-0.3^2=0.4$

（2）密度函数为

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

Ex:已知连续型随机变量X的概率密度为

$$f(x)=Ae^{-|x|}$$

(1) 求 $P(-1<X<1)$ （2） 求 X 的分布函数

均匀分布

定义 若连续型随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

则称X在区间（a，b）上服从均匀分布．记为 **X ~ U (a, b)**

分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1, & b\le x\end{cases}$$

意义

X“等可能”地取区间（a,b）中的值，这里的“等可能”理解为：X落在区间（a,b)中任意等长度的子区间内的可能性是相同的。或者说它落在子区间内的概率只依赖于子区间的长度而与子区间的位置无关。

$$P\{c < X \leq d\} = \int_c^d f(x)dx$$

$$= \int_c^d \frac{1}{b-a}dx = \frac{d-c}{b-a}$$

例 设ξ在[-1，5]上服从均匀分布，求方程

$$x^2+2\xi x+1=0$$

有实根的概率。

解 方程有实数根 $\Longleftrightarrow$ $4\xi^2-4\geq 0$

即 $|\xi|\geq 1$

而 ξ 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6} & (-1\leq x\leq 5)\\ 0 & 其它\end{cases}$

所求概率为 $P\{|\xi|\geq 1\}=\int_{-\infty}^{-1}f(x)dx+\int_{1}^{+\infty}f(x)dx=\dfrac{2}{3}$

指数分布

定义　　若连续型随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\quad (\lambda>0\text{为常数})$$

则称X服从参数为 λ 的指数分布.

$$X \sim E(\lambda)$$

分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1-e^{-\lambda x} & x>0\end{cases}$$

*f(x)*和*F(x)*可用图形表达