

2023 届福建省龙岩一中高考押题预测卷（数学试题理）试卷

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

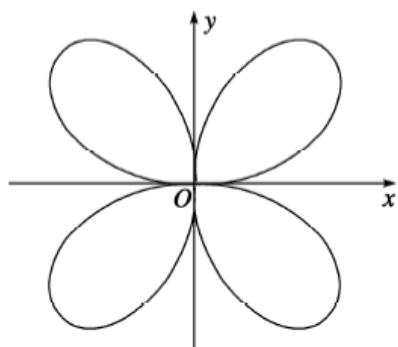
1. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率是 3，焦点到渐近线的距离为 $\sqrt{2}$ ，则双曲线 C 的焦距为 ()

- A. 3 B. $3\sqrt{2}$ C. 6 D. $6\sqrt{2}$

2. 对于定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $y = f(x)$ ，若下列说法中有且仅有一个是错误的，则错误的一个是 ()

- A. $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上是减函数 B. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数
C. $f(x)$ 不是函数的最小值 D. 对于 $x \in \mathbb{R}$ ，都有 $f(x+1) = f(1-x)$

3. 数学中的数形结合，也可以组成世间万物的绚丽画面.一些优美的曲线是数学形象美、对称美、和谐美的结合产物，曲线 $C: (x^2 + y^2)^3 = 16x^2y^2$ 恰好是四叶玫瑰线.



给出下列结论：①曲线 C 经过 5 个整点（即横、纵坐标均为整数的点）；②曲线 C 上任意一点到坐标原点 O 的距离都不超过 2；③曲线 C 围成区域的面积大于 4π ；④方程 $(x^2 + y^2)^3 = 16x^2y^2$ ($xy < 0$) 表示的曲线 C 在第二象限和第四象限其中正确结论的序号是 ()

- A. ①③ B. ②④ C. ①②③ D. ②③④

4. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ， O 为坐标原点， P 为双曲线在第一象限上的点，直线 PO ， PF_2 分别交双曲线 C 的左、右支于另一点 M, N ，若 $|PF_1| = 3|PF_2|$ ，且 $\angle MF_2N = 60^\circ$ ，则双曲线的离心率为 ()

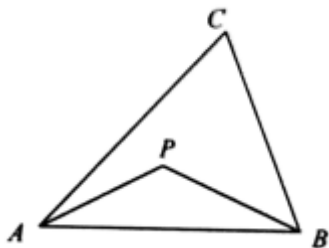
A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

B. 3

C. 2

D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

5. 如图, 设 P 为 $\triangle ABC$ 内一点, 且 $\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}$, 则 $\triangle ABP$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比为



A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{1}{6}$

6. 已知三棱锥 $P-ABC$ 中, $\triangle ABC$ 是等边三角形, $AB = 4\sqrt{3}$, $PA = PC = 2\sqrt{5}$, $PA \perp BC$, 则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 ()

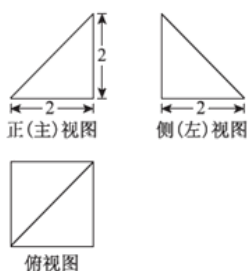
A. 25π

B. 75π

C. 80π

D. 100π

7. 某四棱锥的三视图如图所示, 记 S 为此棱锥所有棱的长度的集合, 则 () .



A. $2\sqrt{2} \notin S$, 且 $2\sqrt{3} \notin S$

B. $2\sqrt{2} \notin S$, 且 $2\sqrt{3} \in S$

C. $2\sqrt{2} \in S$, 且 $2\sqrt{3} \notin S$

D. $2\sqrt{2} \in S$, 且 $2\sqrt{3} \in S$

8. 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 AC 的中点, E 为 AB 上靠近点 B 的三等分点, 且 BD , CE 相交于点 P , 则 $\vec{AP} =$ ()

A. $\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$

B. $\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}$

C. $\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$

D. $\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$

9. 已知定义在 R 上的偶函数 $f(x)$, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x - \frac{x^2 + 2x}{2}$, 设 $a = f(\ln \sqrt{2})$, $b = f(\sqrt{2})$, $c = f(\ln \frac{\sqrt{2}}{2})$,

则 ()

A. $b > a > c$

B. $b > a = c$

C. $a = c > b$

D. $c > a > b$

10. 已知 $\sin(\pi + \alpha) = \frac{4}{5}$, 且 $\sin 2\alpha < 0$, 则 $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ 的值为 ()

- A. 7 B. -7 C. $\frac{1}{7}$ D. $-\frac{1}{7}$

11. 复数 $\frac{5i}{1+2i}$ 的虚部是 ()

- A. i B. -i C. 1 D. -1

12. 已知函数 $f(x) = x^3 + a \sin x, x \in R$, 若 $f(-1) = 2$, 则 $f(1)$ 的值等于 ()

- A. 2 B. -2 C. $1+a$ D. $1-a$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. “北斗三号”卫星的运行轨道是以地心为一个焦点的椭圆. 设地球半径为 R , 若其近地点、远地点离地面的距离大约分别是 $\frac{2}{3}R, 4R$, 则“北斗三号”卫星运行轨道的离心率为_____.

14. 若向量 $\vec{a} = (x^2, 2), \vec{b} = (1, x)$ 满足 $\vec{a} \cdot \vec{b} < 3$, 则实数 x 的取值范围是_____.

15. 能说明“在数列 $\{a_n\}$ 中, 若对于任意的 $m, n \in N^+$, $a_{m+n} > a_m + a_n$, 则 $\{a_n\}$ 为递增数列”为假命题的一个等差数列是_____. (写出数列的通项公式)

16. 经过椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 中心的直线与椭圆相交于 M, N 两点 (点 M 在第一象限), 过点 M 作 x 轴的垂线, 垂足为点 E . 设直线 NE 与椭圆的另一个交点为 P . 则 $\cos \angle NMP$ 的值是_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 百年大计, 教育为本. 某校积极响应教育部号召, 不断加大拔尖人才的培养力度, 为清华、北大等排名前十的名校输送更多的人才. 该校成立特长班进行专项培训. 据统计有如下表格. (其中 x 表示通过自主招生获得降分资格的学生人数, y 表示被清华、北大等名校录取的学生人数)

年份 (届)	2014	2015	2016	2017	2018
x	41	49	55	57	63
y	82	96	108	106	123

- (1) 通过画散点图发现 x 与 y 之间具有线性相关关系, 求 y 关于 x 的线性回归方程; (保留两位有效数字)
- (2) 若已知该校 2019 年通过自主招生获得降分资格的学生人数为 61 人, 预测 2019 年高考该校考入名校的人数;
- (3) 若从 2014 年和 2018 年考入名校的学生中采用分层抽样的方式抽取出 5 个人回校宣传, 在选取的 5 个人中再选取 2 人进行演讲, 求进行演讲的两人是 2018 年毕业的人数 x 的分布列和期望.

参考公式：
$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}$$

参考数据： $\bar{x} = 53$, $\bar{y} = 103$, $\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 27797$, $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 14325$

18. (12分) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F_2(3, 0)$, 离心率为 e .

(1) 若 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 求椭圆的方程;

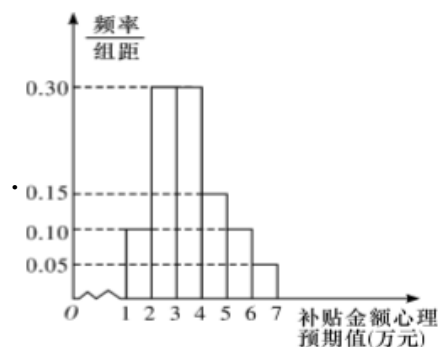
(2) 设直线 $y = kx$ 与椭圆相交于 A 、 B 两点, M 、 N 分别为线段 AF_2 、 BF_2 的中点, 若坐标原点 O 在以 MN 为直径的圆上, 且 $\frac{\sqrt{2}}{2} < e \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 k 的取值范围.

19. (12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且过点 $(1, \frac{\sqrt{6}}{2})$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设 Q 是椭圆 C 上且不在 x 轴上的一个动点, O 为坐标原点, 过右焦点 F 作 OQ 的平行线交椭圆于 M 、 N 两个不同的点, 求 $\frac{|MN|}{|OQ|^2}$ 的值.

20. (12分) 购买一辆某品牌新能源汽车, 在行驶三年后, 政府将给予适当金额的购车补贴. 某调研机构对拟购买该品牌汽车的消费者, 就购车补贴金额的心理预期值进行了抽样调查, 其样本频率分布直方图如图所示



(1) 估计拟购买该品牌汽车的消费群体对购车补贴金额的心理预期值的方差 (同一组中的数据用该组区间的中点值作代表);

(2) 将频率视为概率, 从拟购买该品牌汽车的消费群体中随机抽取 4 人, 记对购车补贴金额的心理预期值高于 3 万元的人数为 X , 求 X 的分布列和数学期望;

(3) 统计最近5个月该品牌汽车的市场销售量，得其频数分布表如下：

月份	2018.11	2018.12	2019.01	2019.02	2019.03
销售量（万辆）	0.5	0.6	1.0	1.4	1.7

试预计该品牌汽车在2019年4月份的销售量约为多少万辆？

附：对于一组样本数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，其回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别

$$\text{为 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

21. (12分) 在直角坐标系 xOy 中，已知点 $P(1, 0)$ ，若以线段 PQ 为直径的圆与 y 轴相切。

(1) 求点 Q 的轨迹 C 的方程；

(2) 若 C 上存在两动点 A, B (A, B 在 x 轴异侧) 满足 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 32$ ，且 $\triangle PAB$ 的周长为 $2|AB| + 2$ ，求 $|AB|$ 的值。

22. (10分) 在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$ (t 为参数)。以坐标原点为极点， x 轴的正半

轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 + 2\rho \cos \theta - 8 = 0$ 。

(1) 求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程；

(2) 若点 P 是直线 l 的一点，过点 P 作曲线 C 的切线，切点为 Q ，求 $|PQ|$ 的最小值。

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

根据焦点到渐近线的距离，可得 b ，然后根据 $b^2 = c^2 - a^2, e = \frac{c}{a}$ ，可得结果。

【详解】

由题可知：双曲线的渐近线方程为 $bx \pm ay = 0$

取右焦点 $F(c, 0)$ ，一条渐近线 $l: bx - ay = 0$

则点 F 到 l 的距离为 $\frac{|bc|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \sqrt{2}$ ，由 $b^2 + a^2 = c^2$

所以 $b = \sqrt{2}$ ，则 $c^2 - a^2 = 2$

又 $\frac{c}{a} = 3 \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = 9 \Rightarrow a^2 = \frac{c^2}{9}$

所以 $c^2 - \frac{c^2}{9} = 2 \Rightarrow c = \frac{3}{2}$

所以焦距为： $2c = 3$

故选：A

【点睛】

本题考查双曲线渐近线方程，以及 a, b, c, e 之间的关系，识记常用的结论：焦点到渐近线的距离为 b ，属基础题.

2、B

【解析】

根据函数对称性和单调性的关系，进行判断即可.

【详解】

由 $f(x+1) = f(1-x)$ 得 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称，

若关于 $x=1$ 对称，则函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上不可能是单调的，

故错误的可能是 B 或者是 D ，

若 D 错误，

则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上是减函数，在 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数，则 $f(0)$ 为函数的最小值，与 C 矛盾，此时 C 也错误，
不满足条件.

故错误的是 B ，

故选：B.

【点睛】

本题主要考查函数性质的综合应用，结合对称性和单调性的关系是解决本题的关键.

3、B

【解析】

利用基本不等式得 $x^2 + y^2 \leq 4$ ，可判断②； $x^2 + y^2 = 4$ 和 $(x^2 + y^2)^3 = 16x^2y^2$ 联立解得 $x^2 = y^2 = 2$ 可判断①③；
由图可判断④。

【详解】

$$(x^2 + y^2)^3 = 16x^2y^2 \leq 16\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2,$$

解得 $x^2 + y^2 \leq 4$ （当且仅当 $x^2 = y^2 = 2$ 时取等号），则②正确；

将 $x^2 + y^2 = 4$ 和 $(x^2 + y^2)^3 = 16x^2y^2$ 联立，解得 $x^2 = y^2 = 2$ ，

即圆 $x^2 + y^2 = 4$ 与曲线 C 相切于点 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ， $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ， $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ， $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ，

则①和③都错误；由 $xy < 0$ ，得④正确。

故选：B.

【点睛】

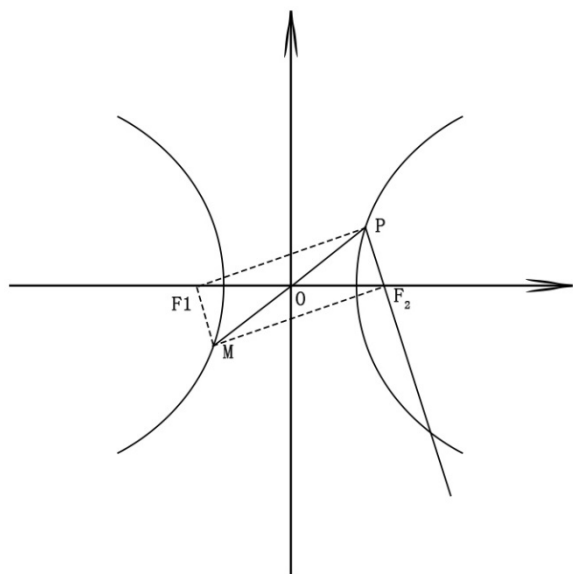
本题考查曲线与方程的应用，根据方程，判断曲线的性质及结论，考查学生逻辑推理能力，是一道有一定难度的题。

4、D

【解析】

本道题结合双曲线的性质以及余弦定理，建立关于 a 与 c 的等式，计算离心率，即可。

【详解】



结合题意，绘图，结合双曲线性质可以得到 $PO=MO$ ，而 $F_1O = F_2O$ ，结合四边形对角线平分，可得四边形 PF_1MF_2

为平行四边形，结合 $\angle MF_2N = 60^\circ$ ，故 $\angle F_1MF_2 = 60^\circ$

对三角形 F_1MF_2 运用余弦定理，得到， $F_1M^2 + F_2M^2 - F_1F_2^2 = 2 \cdot MF_1 \cdot MF_2 \cdot \cos \angle F_1MF_2$

而结合 $|PF_1| = 3|PF_2|$ ，可得 $|MF_1| = a, |MF_2| = 3a$ ， $F_1F_2 = 2c$ ，代入上式子中，得到

$$a^2 + 9a^2 - 4c^2 = 3a^2, \text{ 结合离心率满足 } e = \frac{c}{a}, \text{ 即可得出 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{2}, \text{ 故选 D.}$$

【点睛】

本道题考查了余弦定理以及双曲线的性质，难度偏难.

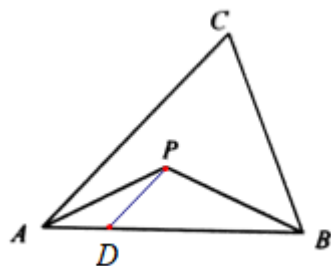
5、A

【解析】

作 $PD \parallel AC$ 交 AB 于点 D ，根据向量比例，利用三角形面积公式，得出 $S_{\triangle ADP}$ 与 $S_{\triangle ABC}$ 的比例，再由 $S_{\triangle ADP}$ 与 $S_{\triangle APB}$ 的比例，可得到结果.

【详解】

如图，作 $PD \parallel AC$ 交 AB 于点 D ，



则 $\vec{AP} = \vec{AD} + \vec{DP}$ ，由题意， $\vec{AD} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ ， $\vec{DP} = \frac{1}{4}\vec{AC}$ ，且 $\angle ADP + \angle CAB = 180^\circ$ ，

$$\text{所以 } S_{\triangle ADP} = \frac{1}{2} |\vec{AD}| |\vec{DP}| \sin \angle ADP = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} |\vec{AB}| \times \frac{1}{4} |\vec{AC}| \sin \angle CAB = \frac{1}{12} S_{\triangle ABC}$$

$$\text{又 } \vec{AD} = \frac{1}{3}\vec{AB}, \text{ 所以, } S_{\triangle APB} = 3S_{\triangle ADP} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}, \text{ 即 } \frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{4},$$

所以本题答案为 A.

【点睛】

本题考查三角函数与向量的结合，三角形面积公式，属基础题，作出合适的辅助线是本题的关键.

6、D

【解析】

根据底面为等边三角形，取 BC 中点 M ，可证明 $BC \perp$ 平面 PAM ，从而 $BC \perp PM$ ，即可证明三棱锥 $P-ABC$

为正三棱锥.取底面等边 $\triangle ABC$ 的重心为 O' ，可求得 P 到平面 ABC 的距离，画出几何关系，设球心为 O ，即可由球的性质和勾股定理求得球的半径，进而得球的表面积.

【详解】

设 M 为 BC 中点， $\triangle ABC$ 是等边三角形，

所以 $AM \perp BC$ ，

又因为 $PA \perp BC$ ，且 $PA \cap AM = A$ ，

所以 $BC \perp$ 平面 PAM ，则 $BC \perp PM$ ，

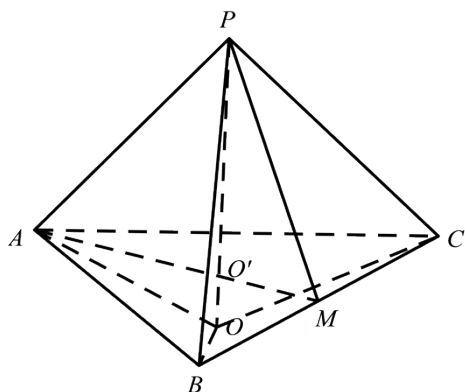
由三线合一性质可知 $PB = PA = PC$ ，

所以三棱锥 $P-ABC$ 为正三棱锥， $AB = 4\sqrt{3}$ ， $PA = PB = PC = 2\sqrt{5}$ ，

设底面等边 $\triangle ABC$ 的重心为 O' ，

可得 $AO' = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \times 6 = 4$ ， $PO' = \sqrt{PA^2 - AO'^2} = \sqrt{20 - 16} = 2$ ，

所以三棱锥 $P-ABC$ 的外接球球心在面 ABC 下方，设为 O ，如下图所示：



由球的性质可知， $PO \perp$ 平面 ABC ，且 P, O', O 在同一直线上，设球的半径为 R ，

在 $Rt\triangle AOO'$ 中， $AO^2 = AO'^2 + OO'^2$ ，

即 $R^2 = 16 + (R - 2)^2$ ，

解得 $R = 5$ ，

所以三棱锥 $P-ABC$ 的外接球表面积为 $S = 4\pi R^2 = 4\pi \times 25 = 100\pi$ ，

故选：D.

【点睛】

本题考查了三棱锥的结构特征和相关计算，正三棱锥的外接球半径求法，球的表面积求法，对空间想象能力要求较高，属于中档题.

7、D

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/465124101343011133>