

专题 22 圆锥曲线中的定点、定值、定值线问题

微点 2 圆锥曲线中的定值问题

【微点综述】

在解析几何中，有些几何量，如斜率、距离、面积、比值、角度等基本量与参变量无关，这类问题统称为定值问题.对学生逻辑思维能力计算能力等要求很高，这些问题重点考查学生方程思想、函数思想、转化与化归思想的应用.

一、探索圆锥曲线的定值问题常见方法有两种：

解决定值问题的基本方法是函数方法.可以用变量表示题目中的点的坐标、直线方程、数量积、比例关系等.对于定值问题，有时也可以从特殊情况出发，确定所要证明的具体定值.也可以根据要分析的结论直接验算化简，利用方程组、韦达定理、点在曲线上（点的坐标满足曲线的方程）等条件，分析变量之间的关系，并确定消参的思路，可以将要求解的量看作某个变量的函数，化简消去变量即得定值.

①从特殊入手，先根据特殊位置和数值求出定值，再证明这个值与变量无关；

②直接推理、计算，并在计算推理的过程中消去变量，从而得到定值.

解答的关键是认真审题，理清问题与题设的关系，建立合理的方程或函数，利用等量关系统一变量，最后消元得出定值.

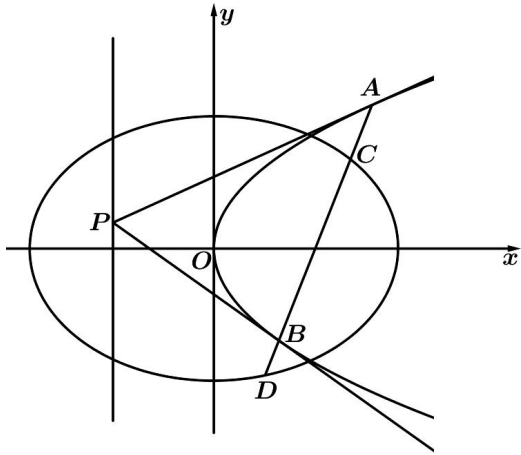
二、常考题型例析

（一）与斜率有关的定值问题

例 1.

（2022 全国）

1. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ ，抛物线 C_2 与椭圆 C_1 有相同的焦点，抛物线 C_2 的顶点为原点，点 P 是抛物线 C_2 的准线上任意一点，过点 P 作抛物线 C_2 的两条切线 PA 、 PB ，其中 A 、 B 为切点，设直线 PA ， PB 的斜率分别为 k_1 ， k_2 .



- (1) 求抛物线 C_2 的方程及 $k_1 k_2$ 的值;
- (2) 若直线 AB 交椭圆 C_1 于 C 、 D 两点, S_1 、 S_2 分别是 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PCD$ 的面积, 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最小值.

例 2

(2022 安徽合肥·高三月考)

2. 已知抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 上的动点 M 到直线 $x = -1$ 的距离比到抛物线 E 的焦点 F 的距离大 $\frac{1}{2}$.

- (1) 求抛物线 E 的标准方程;
- (2) 设点 Q 是直线 $x = -1 (y \neq 0)$ 上的任意一点, 过点 $P(1, 0)$ 的直线 l 与抛物线 E 交于 A 、 B 两点, 记直线 AQ 、 BQ 、 PQ 的斜率分别为 k_{AQ} 、 k_{BQ} 、 k_{PQ} , 证明: $\frac{k_{AQ} + k_{BQ}}{k_{PQ}}$ 为定值.

(二) 与面积有关的定值问题

例 3

(2022 安徽高三月考)

3. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 过点 $P\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

- (1) 求椭圆 C 的标准方程;
- (2) 设点 A 、 B 分别是椭圆 C 的左顶点和上顶点, M 、 N 为椭圆 C 上异于 A 、 B 的两点, 满足 $AM \parallel BN$, 求证: $\triangle OMN$ 面积为定值.

例 4

(2022 广东高三月考)

4. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 双曲线 C 的右顶点 A 在圆 $O: x^2 + y^2 = 2$ 上, 且 $\vec{AF_1} \cdot \vec{AF_2} = -2$.

(1) 求双曲线 C 的标准方程;

(2) 动直线 l 与双曲线 C 恰有 1 个公共点, 且与双曲线 C 的两条渐近线分别交于点 M, N , 问 $\triangle OMN$ (O 为坐标原点) 的面积是否为定值? 若为定值, 求出该定值; 若不为定值, 试说明理由.

(三) 与线段关系、距离有关的定值问题

例 5

5. 已知直线 $l: x = t$ 与椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 相交于 A, B 两点, M 是椭圆 C 上一点

(1) 当 $t = 1$ 时, 求 $\triangle MAB$ 面积的最大值;

(2) 设直线 MA 和 MB 与 x 轴分别相交于点 E, F , O 为原点. 证明: $|OE| \cdot |OF|$ 为定值.

例 6

(2022 全国高三月考)

6. 在平面直角坐标系中, 焦点在 x 轴上的椭圆和双曲线有共同的顶点 $(2, 0)$, 且双曲线的焦点到渐近线的距离为 $2\sqrt{3}$, 双曲线的渐近线与椭圆的一个公共点的横坐标为 $\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

(1) 求双曲线的离心率;

(2) 求椭圆的方程;

(3) 过椭圆的左焦点 F 作直线 l (直线 l 的斜率不为零) 与椭圆交于 M, N 两点, 弦 MN 的垂

直平分线交 x 轴于点 P , 求证: $\frac{|FP|}{|MN|}$ 为定值.

例 7

(2022 安徽安庆·高三月考)

7. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 直线 $y = x + \sqrt{3}$ 经过椭圆 C 的左焦点.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 若经过右焦点 F 的直线 $l: y = kx + m (k > 0, m < 0)$ 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 且与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 相切, 试探究 $\triangle ABF$ 的周长是否为定值, 若是求出定值; 若不是请说明

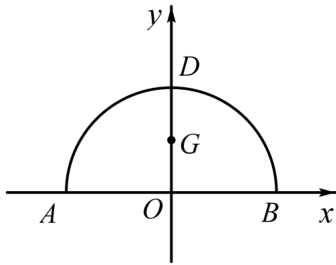
理由.

(四) 与向量有关的定值问题

例 8

(2022 江西上饶市·高三二模)

8. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, AB 为半圆 ADB 的直径, O 为圆心, 且 $A(-4,0)$, $B(4,0)$, G 为线段 OD 的中点; 曲线 C 过点 G , 动点 P 在曲线 C 上运动且保持 $|PA|+|PB|$ 的值不变.



(1) 求曲线 C 的方程;

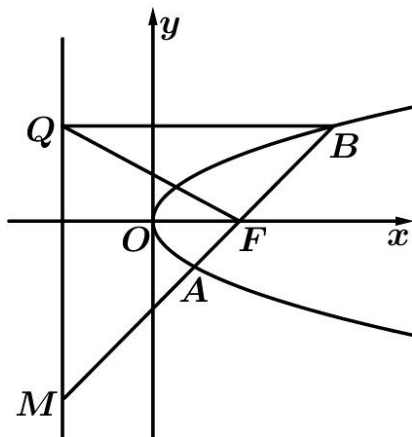
(2) 过点 B 的直线 l 与曲线 C 交于 M 、 N 两点, 与 OD 所在直线交于 E 点, $\overline{EM} = \lambda_1 \overline{MB}$,

$\overline{EN} = \lambda_2 \overline{NB}$, 求证: $\lambda_1 + \lambda_2$ 为定值.

例 9

(2022 宁波市北仑中学高三开学考试)

9. 如图, 已知 $F(1,0)$, 直线 $l: x = -1$, P 是平面上的动点, 过点 P 作 l 的垂线, 垂足为点 Q , 且 $\overline{QP} \cdot \overline{QF} = \overline{FP} \cdot \overline{FQ}$.



(1) 求动点 P 的轨迹 C 的方程;

(2) 过点 F 的直线交轨迹 C 于 A 、 B 两点, 交直线 l 于点 M ;

① 已知 $\overline{MA} = \lambda_1 \overline{AF}$, $\overline{MB} = \lambda_2 \overline{BF}$, 求 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的值;

②求 $|\overrightarrow{MA}| \cdot |\overrightarrow{MB}|$ 的最小值.

(五) 与角度有关的定值问题

例 10

10. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左顶点为 A , 右焦点为 F , 动点 B 在 C 上, 当 $BF \perp AF$ 时, $|AF| = |BF|$.

(1) 求 C 的离心率;

(2) 若 B 在第一象限, 证明: $\angle BFA = 2\angle BAF$.

(六) 与坐标关系有关的定值问题

例 11

11. 已知 P 为圆 $F_1: (x + \sqrt{3})^2 + y^2 = 16$ 上一动点, 点 F_2 坐标为 $(\sqrt{3}, 0)$, 线段 F_2P 的垂直平分线交直线 F_1P 于点 Q .

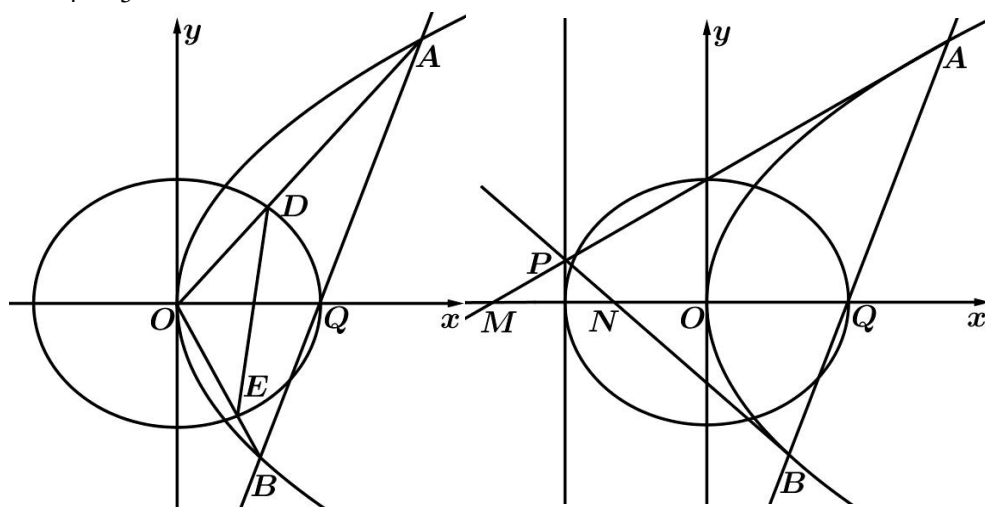
(1) 求点 Q 的轨迹 C 方程;

(2) 已知 $B(0, -1)$, 过点 $(0, 2)$ 作与 y 轴不重合的直线 l 交轨迹 C 于 E, F 两点, 直线 BE, BF 分别与 x 轴交于 M, N 两点. 试探究 M, N 的横坐标的乘积是否为定值, 并说明理由.

例 12

12. 已知直线 $y = 2x$ 与抛物线 $\Gamma: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 交于 G_1, G_2 两点, 且 $|G_1G_2| = \sqrt{5}$, 过椭圆

$C_1: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的右顶点 Q 的直线 l 交于抛物线 Γ 于 A, B 两点.



(1) 求抛物线 Γ 的方程;

(2) 若射线 OA, OB 分别与椭圆 C_1 交于点 D, E , 点 O 为原点, $\triangle ODE, \triangle OAB$ 的面积

分别为 S_1, S_2 , 问是否存在直线 l 使 $S_2 = 3S_1$? 若存在求出直线 l 的方程, 若不存在, 请说明理由;

(3) 若 P 为 $x = -2$ 上一点, PA, PB 与 x 轴相交于 M, N 两点, 问 M, N 两点的横坐标的乘积 $x_M \cdot x_N$ 是否为定值? 如果是定值, 求出该定值, 否则说明理由.

(七) 与参数有关的定值问题

例 13

(2022 湖北武汉·高三开学考试)

13. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 点 $A(0, -1)$ 是椭圆 E 短轴的一个四等分点.

(1) 求椭圆 E 的标准方程;

(2) 设过点 A 且斜率为 k_1 的动直线与椭圆 E 交于 M, N 两点, 且点 $B(0, 2)$, 直线 BM, BN 分别交 $\odot C: x^2 + (y-1)^2 = 1$ 于异于点 B 的点 P, Q , 设直线 PQ 的斜率为 k_2 , 求实数 λ , 使得 $k_2 = \lambda k_1$, 恒成立.

例 14.

14. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 $A(0, -\sqrt{3})$, 直线 AF_2 的倾斜角为 60° , 原点 O 到直线 AF_2 的距离是 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

(1) 求 E 的方程;

(2) 过 E 上任一点 P 作直线 PF_1, PF_2 分别交 E 于 M, N (异于 P 的两点), 且 $\overrightarrow{F_1M} = m\overrightarrow{PF_1}$, $\overrightarrow{F_2N} = n\overrightarrow{PF_2}$, 探究 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 是否为定值? 若是, 求出定值; 若不是, 请说明理由.

【强化训练】

15. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的点到它的两个焦点的距离之和为 4, 以椭圆 C 的短轴为直径的圆 O 经过这两个焦点, 点 A, B 分别是椭圆 C 的左、右顶点.

(1) 求圆 O 和椭圆 C 的方程;

(2) 已知 P, Q 分别是椭圆 C 和圆 O 上的动点 (P, Q 位于 y 轴两侧), 且直线 PQ 与 x 轴平行, 直线 AP, BP 分别与 y 轴交于点 M, N . 求证: $\angle MQN$ 为定值.

16. 已知椭圆 C 的两个顶点分别为 $A(-2,0)$, $B(2,0)$, 焦点在 x 轴上, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 点 D 为 x 轴上一点, 过 D 作 x 轴的垂线交椭圆 C 于不同的两点 M, N , 过 D

作 AM 的垂线交 BN 于点 E . 求证: $\triangle BDE$ 与 $\triangle BDN$ 的面积之比为 $4:5$.

17. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $A(a,0)$, $B(0,b)$, $O(0,0)$, $\triangle OAB$ 的面积为 1.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 P 是椭圆 C 上一点, 直线 PA 与 y 轴交于点 M , 直线 PB 与 x 轴交于点 N , 求证:

$|AN| \cdot |BM|$ 为定值.

(2022 湖北高三开学考试)

18. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , $P(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 是 C 上一点, 且 PF_2 与 x 轴垂直.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若过点 $Q(-\frac{\sqrt{6}}{3}, 0)$ 的直线 l 交 C 于 A, B 两点, 证明: $\frac{1}{|AQ|^2} + \frac{1}{|BQ|^2}$ 为定值.

(2022 双峰县第一中学高三开学考试)

19. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右顶点为 A , 上顶点为 B , O 为坐标原点, 直线 AB 的斜率为 $-\frac{1}{2}$, $\triangle OAB$ 的面积为 1.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 椭圆上有两点 M, N (异于椭圆顶点, 且 MN 与 x 轴不垂直), 证明: 当 $\triangle OMN$ 的面积最大时, 直线 OM 与 ON 的斜率之积为定值.

(2022 永州市第四中学高三月考)

20. 已知直线 l_1 与 l_2 是分别过椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点 F_1, F_2 的两条相交但不重合的动直线. l_1 与椭圆相交于点 A, B , l_2 与椭圆相交于点 C, D , O 为坐标原点. 直线 OA, OB, OC, OD 的斜率分别为 k_A, k_B, k_C, k_D , 且满足 $k_A + k_B = k_C + k_D$.

(1) 若 l_1 与 x 轴重合. $|AB| = 2\sqrt{3}, |CD| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. 试求椭圆 E 的方程:

(2) 在 (1) 的条件下, 记直线 $l_1 \cap l_2 = P$. 试问: 是否存在定点 M, N , 使得 $|PM| + |PN|$ 为

定值？若存在，求出定值和定点 M, N 的坐标；若不存在，请说明理由。

(2022 渝中·重庆巴蜀中学高三月考)

21. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $A_1(-2, 0), A_2(2, 0)$ ，点 B 为椭圆 E 的上顶点，且直线 A_1B 与直线 $2x + \sqrt{3}y = 0$ 相互垂直。

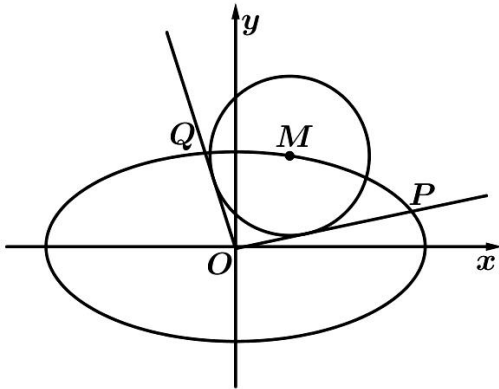
(1) 求椭圆 E 的方程；

(2) 若不垂直 x 轴的直线 l 过椭圆 E 的右焦点 F_2 ，交椭圆于 C, D 两点 (C 在 x 轴上方)，直线

A_1C, A_2D 分别与 y 轴交于 S, T 两点， O 为坐标原点，求证： $\frac{|OS|}{|OT|} = \frac{1}{3}$ 。

(2022 沙坪坝·重庆八中)

22. 在平面直角坐标系 xOy 中，设点 $M(x_0, y_0)$ 是椭圆 $C: \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ 上一点，以 M 为圆心的一个半径 $r = 2$ 的圆，过原点作此圆的两条切线分别与椭圆 C 交于点 P, Q 。



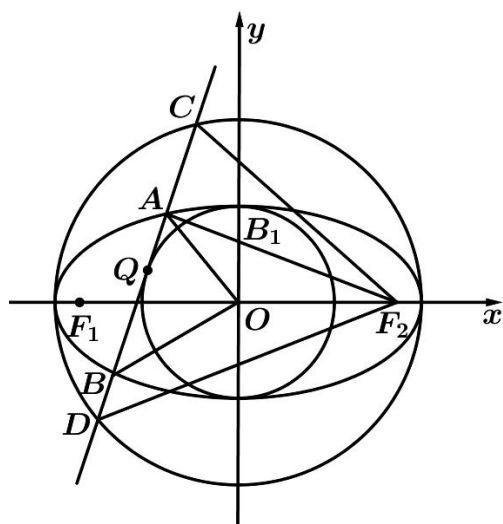
(1) 若点 M 在第一象限且直线 OP, OQ 互相垂直，求圆 M 的方程；

(2) 若直线 OP, OQ 的斜率都存在，且分别记为 k_1, k_2 。求证： $k_1 k_2$ 为定值；

(3) 探究 $|OP|^2 + |OQ|^2$ 是否为定值，若是，则求出 $|OP| \cdot |OQ|$ 的最大值；若不是，请说明理由。

(2022 沙坪坝·重庆南开中学)

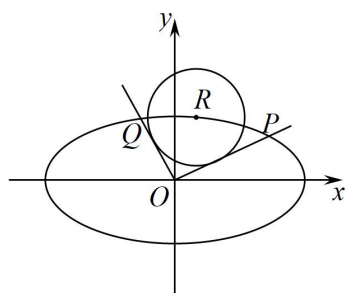
23. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点为 F_1, F_2 ，离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，过圆 $C_1: x^2 + y^2 = b^2$ 上一点 Q (Q 在 y 轴左侧) 作该圆的切线，分别交椭圆 E 于 A, B 两点，交圆 $C_2: x^2 + y^2 = a^2$ 于 C, D 两点 (如图所示)。当切线 AB 与 x 轴垂直时， $\triangle CDF_2$ 的面积为 $3 + \sqrt{3}$ 。



- (1) 求椭圆 E 的标准方程;
- (2) (i) 求 $\triangle ABO$ 的面积的最大值;
- (ii) 求证: $|AC| + |AF_2|$ 为定值, 并求出这个定值.

(2022 上海高三模拟预测)

24. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一焦点与短轴的两个端点组成的三角形是等边三角形, 直线 $y=1$ 与椭圆 C 的两交点间的距离为 8.



- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 如图, 设 $R(x_0, y_0)$ 是椭圆 C 上的一动点, 由原点 O 向圆 $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = 4$ 引两条切线, 分别交椭圆 C 于点 P, Q , 若直线 OP, OQ 的斜率均存在, 并分别记为 k_1, k_2 , 求证: $k_1 \cdot k_2$ 为定值;
- (3) 在 (2) 的条件下, 试问 $|OP|^2 + |OQ|^2$ 是否为定值? 若是, 求出该值; 若不是, 请说明理由.

(2021 全国高考真题)

25. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $F_1(-\sqrt{17}, 0)$ 、 $F_2(\sqrt{17}, 0)$, $|MF_1| - |MF_2| = 2$, 点 M 的轨迹为 C .

(1) 求 C 的方程;

(2) 设点 T 在直线 $x = \frac{1}{2}$ 上, 过 T 的两条直线分别交 C 于 A 、 B 两点和 P 、 Q 两点, 且 $|TA| \cdot |TB| = |TP| \cdot |TQ|$, 求直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和.

(2022 江苏淮安·高三三模)

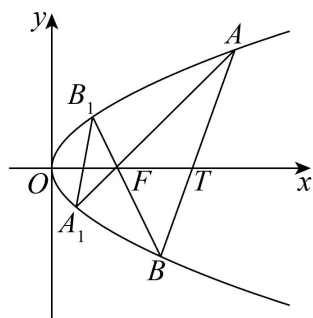
26. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 2, F 为双曲线 C 的右焦点, M 为双曲线 C 上的任一点, 且点 M 到双曲线 C 的两条渐近线距离的乘积为 $\frac{3}{4}$,

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 设过点 F 且与坐标轴不垂直的直线 l 与双曲线 C 相交于点 P 、 Q , 线段 PQ 的垂直平分线与 x 轴交于点 B , 求 $\frac{PQ}{BF}$ 的值.

(2022 安徽蚌埠·高三开学考试)

27. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 点 O 为坐标原点, 直线 l 过定点 $T(t, 0)$ (其中 $t > 0$, $t \neq 1$) 与抛物线 C 相交于 A, B 两点 (点 A 位于第一象限).



(1) 当 $t = 4$ 时, 求证: $OA \perp OB$;

(2) 如图, 连接 AF, BF 并延长交抛物线 C 于两点 A_1, B_1 , 设 $\triangle ABF$ 和 $\triangle A_1B_1F$ 的面积分别为 S_1 和 S_2 , 则 $\frac{S_1}{S_2}$ 是否为定值? 若是, 求出其值; 若不是, 请说明理由.

(2022 山东高三三模)

28. 已知三点 $O(0, 0)$, $A(1, -2)$, $B(1, 2)$, $M(x, y)$ 为曲线 C 上任意一点, 满足

$$|\overline{MA} + \overline{MB}| = \overline{OM} \cdot (\overline{OA} + \overline{OB}) + 2.$$

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 已知点 $P(1,2)$, R, S 为曲线 C 上的不同两点, 且 $PR \perp PS$, $PD \perp RS$, D 为垂足, 证明: 存在定点 Q , 使 $|DQ|$ 为定值.

参考答案:

1. (1) 抛物线 C_2 的方程为: $y^2 = 4x$, $k_1 k_2 = -1$;

(2) 最小值为 $\sqrt{3}$.

【分析】(1) 依题意得抛物线 C_2 的焦点坐标为 $(1,0)$, 进而可得其方程为 $y^2 = 4x$; 设过点 $P(-1,t)$ 与抛物线 C_2 相切的直线方程为 $y-t=k(x+1)$ ($k \neq 0$), 代入 $y^2 = 4x$, 由 $\Delta = 0$ 得 $k^2 + tk - 1 = 0$, 进而可得 $k_1 k_2$;

(2) 先证得直线 AB 恒过定点 $(1,0)$, 且斜率不为零, 故设直线 AB 的方程为 $x = my + 1$, 将其与抛物线联立, 由弦长公式求得 $|AB|$, 再将其与椭圆联立, 由弦长公式求得 $|CD|$, 进而得

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{|AB|}{|CD|}, \text{ 从而可得结果.}$$

【详解】(1) 依题意可得抛物线 C_2 的焦点坐标为 $(1,0)$, 又抛物线 C_2 的顶点为原点, 所以抛物线 C_2 的方程为 $y^2 = 4x$.

设 $P(-1,t)$, 过点 P 与抛物线 C_2 相切的直线方程为 $y-t=k(x+1)$ ($k \neq 0$), 将其代入 $y^2 = 4x$

$$\text{得 } y^2 - \frac{4}{k}y + \frac{4t}{k} + 4 = 0,$$

由 $\Delta = 0$ 得 $\frac{1}{k^2} - \frac{t}{k} - 1 = 0$, 即 $k^2 + tk - 1 = 0$, 所以 $k_1 k_2 = -1$.

(2) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 由 (1) 知 $y_1 = \frac{2}{k_1}$, $y_2 = \frac{2}{k_2}$, 即 $k_1 = \frac{2}{y_1}$, $k_2 = \frac{2}{y_2}$,

则以 A 为切点的切线方程为 $y - y_1 = \frac{2}{y_1}(x - x_1)$, 即 $y_1 y = 2(x + x_1)$,

同理, 以 B 为切点的切线方程为 $y_2 y = 2(x + x_2)$,

因为两切线均过点 $P(-1,t)$, 所以 $ty_1 = 2(x_1 - 1)$, $ty_2 = 2(x_2 - 1)$,

则切点弦 AB 的方程为 $ty = 2(x - 1)$, 所以直线 AB 恒过定点 $(1,0)$.

设点 P 到直线 AB 的距离为 d , 则 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}d \cdot |AB|}{\frac{1}{2}d \cdot |CD|} = \frac{|AB|}{|CD|}$,

因为直线 AB 恒过定点 $(1,0)$, 且斜率不为零, 故设直线 AB 的方程为 $x = my + 1$.

联立 $\begin{cases} x = my + 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 得 $y^2 - 4my - 4 = 0$, 则 $\begin{cases} y_1 + y_2 = 4m \\ y_1 y_2 = -4 \end{cases}$,

则 $|AB| = \sqrt{1+m^2} |y_1 - y_2| = 4(1+m^2)$;

联立 $\begin{cases} x = my + 1 \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$ 得 $(3+2m^2)y^2 + 4my - 4 = 0$, 设 $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$, 则 $\begin{cases} y_3 + y_4 = \frac{-4m}{3+2m^2} \\ y_3 y_4 = \frac{-4}{3+2m^2} \end{cases}$,

则 $|CD| = \sqrt{1+m^2} |y_3 - y_4| = \frac{4\sqrt{3}(1+m^2)}{3+2m^2}$,

则 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{4(1+m^2)}{\frac{4\sqrt{3}(1+m^2)}{3+2m^2}} = \frac{3+2m^2}{\sqrt{3}} \geq \sqrt{3}$,

故当 $m = 0$ 时, $\frac{S_1}{S_2}$ 有最小值 $\sqrt{3}$.

【点睛】 关键点点睛: 第(2)问的关键点是: 证得直线 AB 恒过定点 $(1, 0)$.

2. (1) $y^2 = 2x$; (2) 证明见解析.

【分析】 (1) 根据抛物线的定义求解即可;

(2) 设 $Q(-1, y_0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 设直线 l 的方程为 $x = ty + 1$, 联立抛物线方程得出韦

达定理, 再表达出 $\frac{k_{AQ} + k_{BQ}}{k_{PQ}}$ 关于 $Q(-1, y_0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 坐标的表达式, 结合韦达定理

化简即可

【详解】 (1) 由题意可知抛物线 E 的准线方程为 $x = -\frac{1}{2}$

所以 $-\frac{p}{2} = -\frac{1}{2}$, 即 $p = 1$, 故抛物线 E 的标准方程为 $y^2 = 2x$

(2) 证明: 设 $Q(-1, y_0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

因为直线 l 的斜率为显然不为 0, 故可设直线 l 的方程为 $x = ty + 1$

联立 $\begin{cases} x = ty + 1 \\ y^2 = 2x \end{cases}$, 消去 x 得 $y^2 - 2ty - 2 = 0$

所以 $y_1 + y_2 = 2t$, $y_1 y_2 = -2$, $k_{PQ} = -\frac{y_0}{2}$

又 $k_{AQ} + k_{BQ} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 + 1} + \frac{y_2 - y_0}{x_2 + 1}$

$= \frac{(y_1 - y_0)(x_2 + 1) + (y_2 - y_0)(x_1 + 1)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}$

$= \frac{(y_1 - y_0)(ty_2 + 2) + (y_2 - y_0)(ty_1 + 2)}{(ty_1 + 2)(ty_2 + 2)}$

$$= \frac{2ty_1y_2 + (2-ty_0)(y_1+y_2) - 4y_0}{t^2y_1y_2 + 2t(y_1+y_2) + 4}$$

$$= \frac{2t \cdot (-2) + (2-ty_0) \cdot 2t - 4y_0}{t^2 \cdot (-2) + 2t \cdot 2t + 4}$$

$$= \frac{-y_0(t^2+2)}{t^2+2} = -y_0$$

所以, $\frac{k_{AQ} + k_{BQ}}{k_{PQ}} = \frac{-y_0}{-\frac{y_0}{2}} = 2$ (定值)

3. (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; (2) 证明见解析.

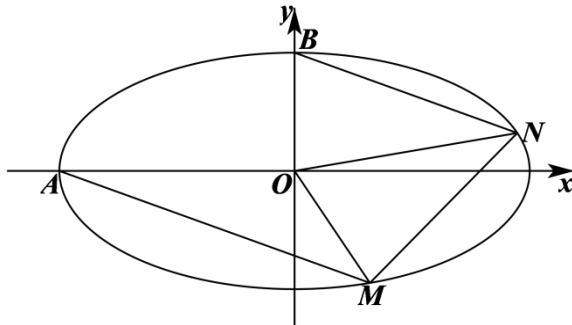
【分析】(1) 根据已知条件可得出关于 a 、 b 、 c 的方程组, 结合这三个量的值, 由此可得出椭圆 C 的标准方程;

(2) 设直线 AM 的方程为 $y = k(x+2)$, 设直线 BN 的方程为 $y = kx+1$, 将这两条直线分别与椭圆 C 的方程联立, 求出点 M 、 N 的坐标, 求出 $|OM|$ 以及点 N 到直线 OM 的距离, 利用三角形的面积公式可求得结果.

【详解】(1) 由已知条件可得
$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = \sqrt{3} \end{cases}$$

即椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$;

(2) 设 $M(x_1, y_1)$ 、 $N(x_2, y_2)$, 由题意直线 AM 、 BN 的斜率存在,



设直线 AM 的方程为 $y = k(x+2)$ ①, 设直线 BN 的方程为 $y = kx+1$ ②,

由 (1) 椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ③,

联立①③得 $(4k^2 + 1)x^2 + 16k^2x + 16k^2 - 4 = 0$,

解得 $x_1 = \frac{2-8k^2}{4k^2+1}$, 即 $M\left(\frac{2-8k^2}{4k^2+1}, \frac{4k}{4k^2+1}\right)$,

联立②③, 得 $(4k^2+1)x^2 + 8kx = 0$, 所以, $x_2 = -\frac{8k}{4k^2+1}$, 即 $N\left(\frac{-8k}{4k^2+1}, \frac{1-4k^2}{4k^2+1}\right)$,

易知 $|OM| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$,

直线 OM 的方程为 $y_1x - x_1y = 0$, 点 N 到直线 OM 的距离为 $d = \frac{|x_2y_1 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$,

所以 $S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2}|OM| \cdot d = \frac{|x_2y_1 - x_1y_2|}{2} = \frac{1}{2} \left| \frac{-8k}{4k^2+1} \cdot \frac{4k}{4k^2+1} - \frac{1-4k^2}{4k^2+1} \cdot \frac{2-8k^2}{4k^2+1} \right| = 1$,

故 $\triangle OMN$ 面积为定值 1.

【点睛】 方法点睛: 求定值问题常见的方法有两种:

- (1) 从特殊入手, 求出定值, 再证明这个值与变量无关;
- (2) 直接推理、计算, 并在计算推理的过程中消去变量, 从而得到定值.

4. (1) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$; (2) 是定值, 定值 2.

【分析】 (1) 由题得关于 a, b, c 的方程组, 解方程组即得解;

(2) 先证明当直线 l 的斜率在存在时, $S_{\triangle OMN} = 2$; 当直线 l 的斜率存在时, 设其方程为

$y = kx + m$, 显然 $k \neq 0$, 联立直线和双曲线的方程得到 $m^2 = 2(k^2 - 1)$, 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

求出 $|y_1 - y_2|$ 即得解.

【详解】 解: (1) 设双曲线 C 的半焦距为 c ,

由点 $A(a, 0)$ 在圆 $O: x^2 + y^2 = 2$ 上, 得 $a = \sqrt{2}$,

由 $\vec{AF}_1 \cdot \vec{AF}_2 = (-c - \sqrt{2}, 0) \cdot (c - \sqrt{2}, 0) = 2 - c^2 = -2$, 得 $c = 2$,

所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 2$,

所以双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 设直线 l 与 x 轴相交于点 D , 双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm x$

当直线 l 的斜率在存在时, 直线 l 为 $x = \pm\sqrt{2}$, $|OD| = \sqrt{2}$, $|MN| = 2\sqrt{2}$, 得

$$S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} |MN| \cdot |OD| = 2$$

当直线 l 的斜率存在时, 设其方程为 $y = kx + m$, 显然 $k \neq 0$, 则 $D\left(-\frac{m}{k}, 0\right)$

把直线 l 的方程与 $C: x^2 - y^2 = 2$ 联立得 $(k^2 - 1)x^2 + 2kmx + m^2 + 2 = 0$,

由直线 l 与轨迹 C 有且只有一个公共点, 且与双曲线 C 的两条渐近线分别相交可知直线 l 与双曲线的渐近线不平行, 所以 $k^2 - 1 \neq 0$, 且 $m \neq 0$,

$$\text{于是得} \begin{cases} \Delta = 4k^2m^2 - 4(k^2 - 1)(m^2 + 2) = 0 \\ k^2 - 1 \neq 0 \end{cases},$$

得 $m^2 = 2(k^2 - 1) > 0$, 得 $k > 1$ 或 $k < -1$,

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

$$\text{由} \begin{cases} y = kx + m \\ y = x \end{cases}, \text{得 } y_1 = \frac{m}{1 - k},$$

同理得 $y_2 = \frac{m}{1 + k}$,

$$\text{所以 } S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} |OD| |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} \left| \frac{m}{k} \right| \left| \frac{m}{1 - k} - \frac{m}{1 + k} \right| = \left| \frac{m^2}{1 - k^2} \right| = 2.$$

综上, $\triangle OMN$ 的面积恒为定值 2.

【点睛】方法点睛: 定值问题的处理常见的方法有: (1) 特殊探究, 一般证明. (2) 直接求题目给定的对象的值, 证明其结果是一个常数.

$$5. (1) \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

(2) 证明见解析

【分析】(1) 将 $x = 1$ 代入椭圆方程, 求出 $|AB|$, 求出点 M 到直线 $x = 1$ 的距离的最大值, 进而可求得 $\triangle MAB$ 面积的最大值;

(2) 设 A, B 两点坐标分别为 $A(t, n), B(t, -n)$, 设 $M(x_0, y_0)$, 则 $x_0 \neq t, y_0 \neq \pm n$, 求出点 E, F 的坐标, 结合椭圆方程可计算得出 $|OE| \cdot |OF|$ 为定值.

【详解】(1) 解: 当 $t = 1$ 时, 将 $x = 1$ 代入 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, 解得 $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$, $\therefore |AB| = \sqrt{6}$.

当 M 为椭圆 C 的顶点 $(-2, 0)$ 时, M 到直线 $x = 1$ 的距离取得最大值 3,

$\therefore \triangle MAB$ 面积的最大值是 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

(2) 证明: 设 A、B 两点坐标分别为 $A(t, n)$ 、 $B(t, -n)$, 从而 $t^2 + 2n^2 = 4$.

设 $M(x_0, y_0)$, 则有 $x_0^2 + 2y_0^2 = 4$, $x_0 \neq t$, $y_0 \neq \pm n$.

直线 MA 的方程为 $y - n = \frac{y_0 - n}{x_0 - t}(x - t)$, 令 $y = 0$, 得 $x = \frac{ty_0 - nx_0}{y_0 - n}$, 从而 $|OE| = \left| \frac{ty_0 - nx_0}{y_0 - n} \right|$.

直线 MB 的方程为 $y + n = \frac{y_0 + n}{x_0 - t}(x - t)$, 令 $y = 0$, 得 $x = \frac{ty_0 + nx_0}{y_0 + n}$, 从而 $|OF| = \left| \frac{ty_0 + nx_0}{y_0 + n} \right|$.

所以 $|OE| \cdot |OF| = \left| \frac{ty_0 - nx_0}{y_0 - n} \right| \cdot \left| \frac{ty_0 + nx_0}{y_0 + n} \right| = \left| \frac{t^2 y_0^2 - n^2 x_0^2}{y_0^2 - n^2} \right| = \left| \frac{(4 - 2n^2)y_0^2 - n^2(4 - 2y_0^2)}{y_0^2 - n^2} \right| = 4$,

$\therefore |OE| \cdot |OF|$ 为定值.

6. (1)2; (2) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; (3)证明见解析.

【分析】(1)根据双曲线的几何性质即可求解; (2)根据题意并结合双曲线的渐近线方程即可求解; (3)设出直线 l 的方程, 与椭圆方程联立, 根据韦达定理求出点 M , N 的横坐标关系, 即可证明.

【详解】(1) 设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,

由题可得 $a = 2$.

因为双曲线的焦点到渐近线的距离为 $2\sqrt{3}$,

所以 $b = 2\sqrt{3}$,

所以双曲线的离心率 $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = 2$.

(2) 由已知可设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{m^2} = 1 (0 < m < 2)$, 由(1)可知双曲线的渐近线方程为

$y = \pm\sqrt{3}x$. 因为双曲线的渐近线与椭圆的一个公共点的横坐标为 $\frac{2\sqrt{13}}{13}$, 所以代入渐近线方

程可得 $x^2 = \frac{4}{13}$, $y^2 = \frac{12}{13}$,

代入椭圆的方程可得 $m = 1$, 所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(3) 证明: 由已知可得, 椭圆的左焦点 $F(-\sqrt{3}, 0)$, 直线 l 的斜率不为零.

设直线 $l: y = k(x + \sqrt{3})$, 直线 l 与椭圆的交点 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

MN 的中点 $Q\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = k(x + \sqrt{3}), \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 并化简得 } (1+4k^2)x^2 + 8\sqrt{3}k^2x + 12k^2 - 4 = 0,$$

$$\Delta = (8\sqrt{3}k^2)^2 - 4(1+4k^2)(12k^2 - 4) = 16k^2 + 16,$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-8\sqrt{3}k^2}{1+4k^2}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{12k^2 - 4}{1+4k^2},$$

$$\text{则 } |MN| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \frac{4(1+k^2)}{1+4k^2}, \quad Q\left(-\frac{4\sqrt{3}k^2}{1+4k^2}, \frac{\sqrt{3}k}{1+4k^2}\right).$$

$$\text{直线 } PQ \text{ 的方程为 } y - \frac{\sqrt{3}k}{1+4k^2} = -\frac{1}{k}\left(x + \frac{4\sqrt{3}k^2}{1+4k^2}\right), \text{ 则 } P\left(\frac{-3\sqrt{3}k^2}{1+4k^2}, 0\right),$$

$$\text{所以 } |FP| = \left| \sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}k^2}{1+4k^2} \right| = \frac{\sqrt{3}(1+k^2)}{1+4k^2},$$

$$\text{所以 } \frac{|FP|}{|MN|} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \text{ 即 } \frac{|FP|}{|MN|} \text{ 为定值.}$$

【点睛】 求定值问题常见的方法有两种:

(1) 从特殊入手, 求出定值, 再证明这个值与变量无关.

(2) 直接推理、计算, 并在计算推理的过程中消去变量, 从而得到定值.

7. (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; (2) $\triangle ABF$ 的周长为定值 4.

【分析】 (1) 先由直线方程, 得到左焦点坐标, 得出 $c = \sqrt{3}$; 再由离心率, 集合椭圆性质, 求出 a, b , 进而可得椭圆方程;

(2) 根据直线与圆相切, 得到 $m^2 = 1 + k^2$; 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 联立直线与椭圆方程, 根据韦达定理, 以及弦长公式, 表示出 $|AB|$; 根据两点间距离公式, 分别表示出 $|AF|$, $|BF|$, 三角形三边求和, 即可得出结果.

【详解】 (1) 因为直线 $y = x + \sqrt{3}$ 经过椭圆 C 的左焦点,

所以椭圆 C 的左焦点坐标为 $(-\sqrt{3}, 0)$, 故 $c = \sqrt{3}$.

又 $\because e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore a = 2$, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 1$,

故椭圆的标准方程为: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$;

(2) 是定值, 理由如下:

因为直线 $l: y = kx + m (k < 0, m > 0)$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切,

所以 $\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} = 1$, 即 $m^2 = 1 + k^2$,

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 联立 $\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$,

消去 y 整理得 $(4k^2 + 1)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0$, 所以 $\Delta = 16(4k^2 - m^2 + 1) = 48k^2 > 0$,

$x_1 + x_2 = -\frac{8km}{4k^2 + 1}$, $x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 4}{4k^2 + 1}$,

所以 $|AB| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2}$
 $= \sqrt{1+k^2} \sqrt{\left(\frac{8km}{4k^2+1}\right)^2 - 4\frac{4m^2-4}{4k^2+1}} = 4\frac{\sqrt{k^2+1}}{4k^2+1} \sqrt{4k^2-m^2+1}$,

又 $m^2 = 1 + k^2$, 所以 $|AB| = \frac{-4\sqrt{3}km}{4k^2+1}$.

由于 $k > 0$, $m < 0$, 所以 $0 < x_1 < 2$, $0 < x_2 < 2$,

因为 $|AF| = \sqrt{(x_1 - \sqrt{3})^2 + y_1^2} = \sqrt{(x_1 - \sqrt{3})^2 + 1 - \frac{x_1^2}{4}} = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_1$, 同理 $|BF| = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2$,

所以 $|AF| + |BF| = 4 - \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 + x_2) = 4 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{8km}{4k^2+1} = 4 + \frac{4\sqrt{3}km}{4k^2+1}$,

所以 $|AF| + |BF| + |AB| = 4 + \frac{4\sqrt{3}km}{4k^2+1} - \frac{4\sqrt{3}km}{4k^2+1} = 4$,

故 $\triangle ABF$ 的周长为定值 4.

【点睛】 思路点睛:

求解椭圆中的定值问题时, 一般需要联立直线与椭圆方程, 结合韦达定理、弦长公式, 以及题中条件等, 进行求解即可.

8. (1) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$; (2) 证明见解析.

【分析】 (1) 根据动点 P 在曲线 C 上运动且保持 $|PA| + |PB|$ 的值不变, 且点 G 在曲线 C 上,

得到 $|PA|+|PB|>|AB|$ ，利用椭圆的定义求解；

(2) 设 $E(0, y_0)$ ， $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ， $B(4, 0)$ ，由 $\overline{EM} = \lambda_1 \overline{MB}$ ， $\overline{EN} = \lambda_2 \overline{NB}$ ，分别求得点 M 、 N 的坐标，点 M 、 N 在椭圆上，代入椭圆方程求解。

【详解】(1) 因为动点 P 在曲线 C 上运动且保持 $|PA|+|PB|$ 的值不变，且点 G 在曲线 C 上，

$$\therefore |PA|+|PB|=|GA|+|GB|=2\sqrt{5}+2\sqrt{5}=4\sqrt{5}>|AB|=8,$$

$\therefore P$ 的轨迹是以 A 、 B 为焦点的椭圆，

$$\text{且 } a=2\sqrt{5}, c=4,$$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 4,$$

所以曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$ 。

(2) 设 $E(0, y_0)$ ， $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ， $B(4, 0)$ ，

$$\text{由 } \overline{EM} = \lambda_1 \overline{MB} \text{ 得 } (x_1, y_1 - y_0) = \lambda_1 (4 - x_1 - y_1),$$

$$\therefore x_1 = \frac{4\lambda_1}{1+\lambda_1}, y_1 = \frac{y_0}{1+\lambda_1},$$

$$\text{由于点 } M \text{ 在椭圆上，故 } \left(\frac{4\lambda_1}{1+\lambda_1}\right)^2 + 5\left(\frac{y_0}{1+\lambda_1}\right)^2 = 20,$$

$$\text{整理得 } 4\lambda_1^2 + 40\lambda_1 + 20 - 5y_0^2 = 0,$$

$$\text{由 } \overline{EN} = \lambda_2 \overline{NB} \text{ 同理可得 } 4\lambda_2^2 + 40\lambda_2 + 20 - 5y_0^2 = 0,$$

$\therefore \lambda_1, \lambda_2$ 是方程 $4x^2 + 40x + 20 - 5y_0^2 = 0$ 的两个根，

$$\therefore \lambda_1 + \lambda_2 = -10.$$

【点睛】关键点点睛：本题第二问关键是由 $\overline{EM} = \lambda_1 \overline{MB}$ ， $\overline{EN} = \lambda_2 \overline{NB}$ ，分别求得点 M 、 N 的坐标，由点 M 、 N 在椭圆上，代入椭圆方程，构造方程，利用韦达定理而得解。

9. (1) $y^2 = 4x$; (2) ①0; ②16.

【分析】(1) 可设出点 P 的坐标 (x, y) ，由直线 $l: x = -1$ ，过 P 作直线 l 的垂线，垂足为点 Q ，则 $Q(-1, y)$ ，则我们根据 $\overline{QP} \cdot \overline{QF} = \overline{FP} \cdot \overline{FQ}$ ，构造出一个关于 x, y 的方程，化简后，即可得到所求曲线的方程；

(2) ①由过点 F 的直线交轨迹 C 于 A 、 B 两点，交直线 l 于点 M ，我们可以设出直线的点斜式方程，联立直线方程后，利用设而不求的思想，结合一元二次方程根与系数关系，易求 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的值。

②根据平面向量数量积的性质，结合基本不等式进行求解即可。

【详解】(1) 设点 $P(x, y)$ ，则 $Q(-1, y)$ ，由 $\overline{QP} \cdot \overline{QF} = \overline{FP} \cdot \overline{FQ}$ ，

得 $(x+1, 0) \cdot (2, -y) = (x-1, y) \cdot (-2, y)$ ，化简得曲线 C 的方程为 $y^2 = 4x$ ；

(2) 由于直线 AB 不能垂直于 y 轴，且又过 x 轴上的定点，

设直线 AB 的方程为 $x = my + 1 (m \neq 0)$ ，则 $M\left(-1, -\frac{2}{m}\right)$ ，

设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，联立方程组 $\begin{cases} y^2 = 4x, \\ x = my + 1, \end{cases}$

消去 x 得 $y^2 - 4my - 4 = 0$ ， $\Delta = (-4m)^2 + 16 > 0$ ，故 $\begin{cases} y_1 + y_2 = 4m, \\ y_1 y_2 = -4. \end{cases}$

由 $\overline{MA} = \lambda_1 \overline{AF}$ ， $\overline{MB} = \lambda_2 \overline{BF}$ ，得 $\left(x_1 + 1, y_1 + \frac{2}{m}\right) = \lambda_1(1 - x_1, -y_1)$

$\left(x_2 + 1, y_2 + \frac{2}{m}\right) = \lambda_2(1 - x_2, -y_2)$

利用对应的纵坐标相等，得 $y_1 + \frac{2}{m} = -\lambda_1 y_1$ ， $y_2 + \frac{2}{m} = -\lambda_2 y_2$ ，整理得 $\lambda_1 = -1 - \frac{2}{my_1}$ ，

$\lambda_2 = -1 - \frac{2}{my_2}$ ，

所以 $\lambda_1 + \lambda_2 = -2 - \frac{2}{m} \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}\right) = -2 - \frac{2}{m} \frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2} = -2 - \frac{2}{m} \frac{4m}{-4} = 0$ 。

②因为 $\overline{MA} = \left(x_1 + 1, y_1 + \frac{2}{m}\right)$ ， $\overline{MB} = \left(x_2 + 1, y_2 + \frac{2}{m}\right)$ ，所以有：

$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = (x_1 + 1)(x_2 + 1) + \left(y_1 + \frac{2}{m}\right)\left(y_2 + \frac{2}{m}\right) = x_1 x_2 + 1 + x_1 + x_2 + y_1 y_2 + \frac{4}{m^2} + (y_1 + y_2) \cdot \frac{2}{m}$ ，由上可

知： $\begin{cases} y_1 + y_2 = 4m, \\ y_1 y_2 = -4. \end{cases}$ ，

因此有 $x_1 x_2 = \frac{y_1^2 \cdot y_2^2}{16} = 1$ ， $x_1 + x_2 = m(y_1 + y_2) + 2 = 4m^2 + 2$ ，

所以 $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \frac{4}{m^2} + 4m^2 + 8 \geq 2\sqrt{\frac{4}{m^2} \cdot 4m^2} + 8 = 16$ ，当且仅当 $\frac{4}{m^2} = 4m^2$ 时取等号，即当 $m = \pm 1$

时取等号，

因此 $|\overline{MA}| \cdot |\overline{MB}| \geq \overline{MA} \cdot \overline{MB} = 16$ 。

【点睛】关键点睛：结合基本不等式，利用平面向量数量积的运算性质是解题的关键。

10. (1)2;

(2)证明见解析。

【分析】(1) 运用代入法，结合双曲线的离心率公式进行求解即可；

(2) 根据直线斜率公式，结合二倍角的正切公式进行证明即可。

【详解】(1) 设双曲线的离心率为 e ，焦距为 $2c$ ， $F(c,0)$ ，

在 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 中令 $x=c$ ，则 $\frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，解得 $y = \pm \frac{b^2}{a}$ ，若 $|AF|=|BF|$ ，则 $a+c = \frac{b^2}{a}$ ，

所以 $a^2 + ac = b^2 = c^2 - a^2$ ，所以 $e^2 - e - 2 = 0$ ，解得 $e=2$ 或 $e=-1$ （舍去），所以 $e=2$ ；

(2) 因为 $e=2$ ，所以 $\frac{c}{a} = 2 \Rightarrow c^2 = 4a^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 4a^2 \Rightarrow b^2 = 3a^2$ ，

所以 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1$ ， $A(-a,0)$ ，设 $B(x, y)$ ($x>0, y>0$)，

$k_{AB} = \frac{y}{x+a}$ ， $k_{BF} = \frac{y}{x-c}$ ，设 $\angle BAF = \theta$ ，则 $\tan \theta = \frac{y}{x+a}$ ，

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2 \times \frac{y}{x+a}}{1 - \left(\frac{y}{x+a}\right)^2} = \frac{2(x+a)y}{(x+a)^2 - y^2} = \frac{2(x+a)y}{(x+a)^2 - 3a^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} = \frac{2(x+a)y}{-2x^2 + 2ax + 4a^2} =$$

$$\frac{y}{2a-x} = \frac{y}{c-x} = -k_{BF} = \tan \angle BFA，\text{所以 } \angle BFA = 2\angle BAF.$$

【点睛】关键点睛：利用二倍角的正切公式是解题的关键。

11. (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ；(2) 是定值，理由见解析。

【解析】(1) 由中垂线可知 $QF_1 + QF_2 = QF_1 + QP = 4$ ，所以 Q 点的轨迹为椭圆；

(2) 设 E, F 两点的坐标，利用直线方程用 E, F 两点坐标表示 M, N 的横坐标；再把直线 l 代入椭圆方程消元，韦达定理，整理 M, N 的横坐标的乘积可得结论。

【详解】由已知线段 F_2P 的垂直平分线交直线 F_1P 于点 Q ，得 $QF_2 = QP$ ，

又 P 为圆 $F_1: (x + \sqrt{3})^2 + y^2 = 16$ 上一动点，

所以 $QF_1 + QF_2 = QF_1 + QP = F_1P = 4$ ，

Q 点的轨迹为以 F_1, F_2 为焦点，长轴为 4 的椭圆

椭圆方程： $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/465133334333012002>