根轨迹绘制八大法则之5-6

法则5-出射角和入射角

法则6-分离点与分离角

【法则五】根轨迹的出射角与入射角

(1) 出射角

根轨迹离开开环极点处的切线方向与实轴正方向的夹角，称为根轨迹的出射角。**q**重开环极点**p_k**处的出射角

$$\theta_{pk} = \frac{1}{q}\left[(2k+1)\pi + \sum_{j=1}^{m}\angle(p_k - z_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n}\angle(p_k - p_i)\right] \qquad (1)$$

(2) 入射角

根轨迹进入开环零点处的切线与实轴正方向的夹角称为根轨迹的入射角。 $\boldsymbol{q}$重开环零点$\boldsymbol{z_k}$处的入射角

$$\theta_{z_k} = \frac{1}{q}\left[(2k+1)\pi + \sum_{i=1}^{n} \angle(z_k - p_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{m} \angle(z_k - z_j)\right] \qquad (2)$$

证明： 如图1所示系统：

在无限靠近 p_2处的根轨迹上取 一点s_1，则p_2处的出射角

$$\theta_{p2} = \angle(s_1 - p_2)$$

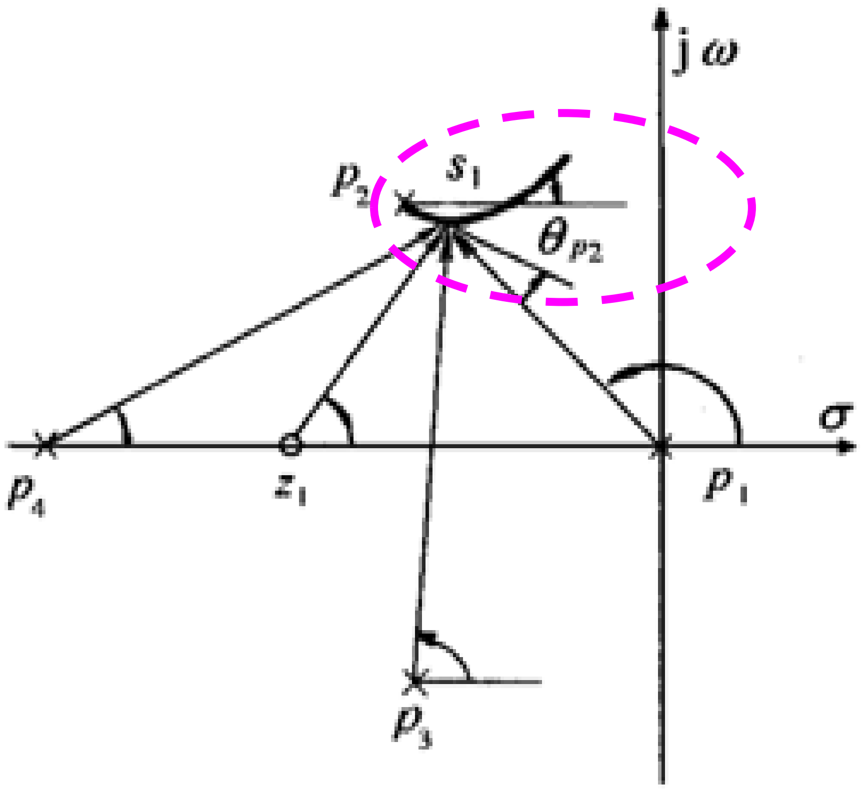

图1 开环极点处根轨迹的出射角

由于s_1为根轨迹上一点，满足相角条件方程：

θ_{p2}

$$\angle(s_1 - z_1) - \angle(s_1 - p_1) - \angle(s_1 - p_2) - \angle(s_1 - p_3) - \angle(s_1 - p_4) = (2k+1)\pi$$

$$\Rightarrow \quad \theta_{p2} = (2k+1)\pi + \angle(s_1 - z_1) - \angle(s_1 - p_1) - \angle(s_1 - p_3) - \angle(s_1 - p_4)$$

另外，由于$\boldsymbol{s}_1$和$\boldsymbol{p}_2$足够近，开环零点和其它的开环极点指向$\boldsymbol{s}_1$的向量均可看作指向$\boldsymbol{p}_2$的向量。所以

$$\theta_{p2}=(2k+1)\pi+\angle(p_2-z_1)-\angle(p_2-p_1)-\angle(p_2-p_3)-\angle(p_2-p_4) \qquad （3）$$

将式（3）推广到系统具有$\boldsymbol{n}$开环极点，$\boldsymbol{m}$个开环零点时，可以得到:

$$\theta_{pk}=(2k+1)\pi+\sum_{j=1}^{m}\angle(p_k-z_j)-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\angle(p_k-p_i)$$

入射角的证明方法与出射角类似，这里不再证明。

说明：

共轭复数的开环零、极点才需计算出射角和入射角，实数开环零、极点一般不需要，多为：0°，180°，±90°，±60°，±120°，±45°及±135°等。

【例1】 一负反馈系统的开环传递函数为

$$G_k(s)=\frac{K_g(s+2)}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$$

试确定根轨迹离开共轭复数极点的出射角。

解：系统的开环零点、极点为

$$p_{1.2}=-1\pm j, p_3=0, p_4=-3, z_1=-2$$

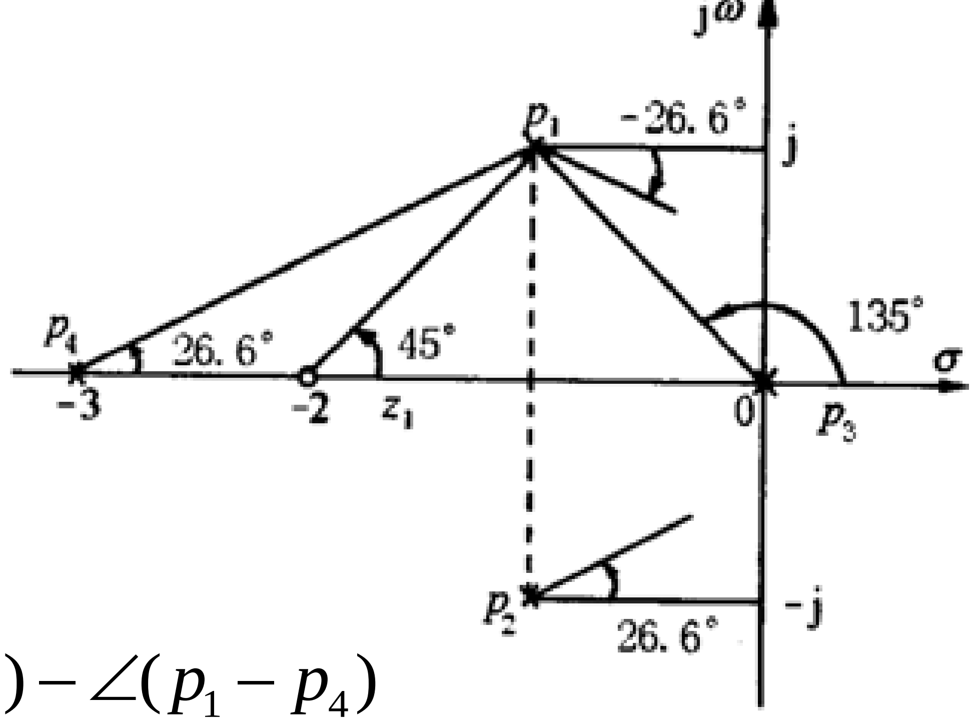

图2 例1系统开环零、极点分布图

开环极点P_1的出射角为

$$\theta_{p_1}=180^\circ+\angle(p_1-z_1)-\angle(p_1-p_2)-\angle(p_1-p_3)-\angle(p_1-p_4)$$

$$=180^\circ+45^\circ-135^\circ-90^\circ-26.6^\circ=-26.6^\circ$$

开环极点P_2的出射角为

$$\theta_{p2}=-\theta_{p1}=26.6^\circ$$

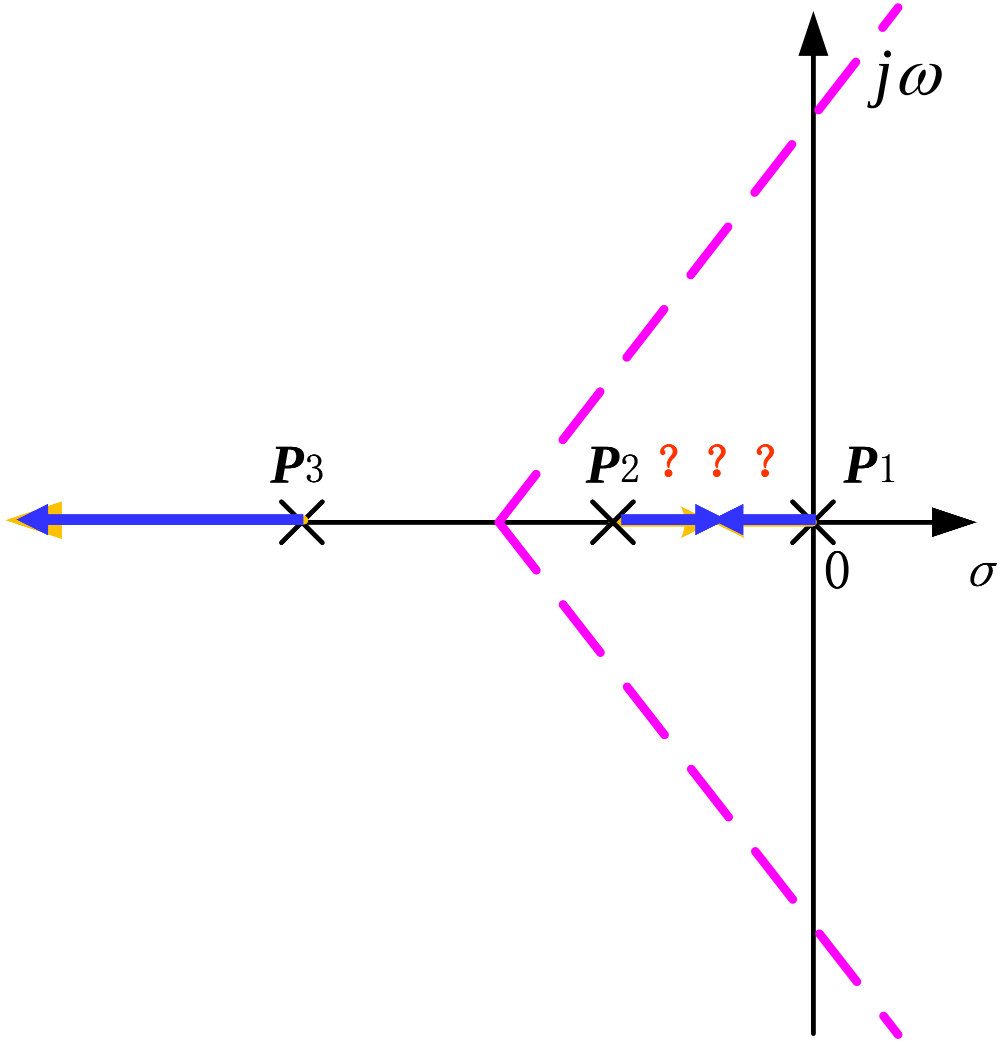

图3 某系统部分根轨迹图

分别从开环极点P_1、P_2出发的两条根轨迹分支会在哪个位置相遇呢？

【法则六】根轨迹的分离点(汇合点)

两条或两条以上根轨迹分支在s平面上相遇又分开的点称为根轨迹的分离点或汇合点，通常用s_d表示。

♣若根轨迹位于实轴上两相邻开环极点间（包括无穷远的极点），则至少有一个分离点；

♣若根轨迹位于实轴上两相邻开环零点间（包括无穷远的零点），则至少有一个分离点；

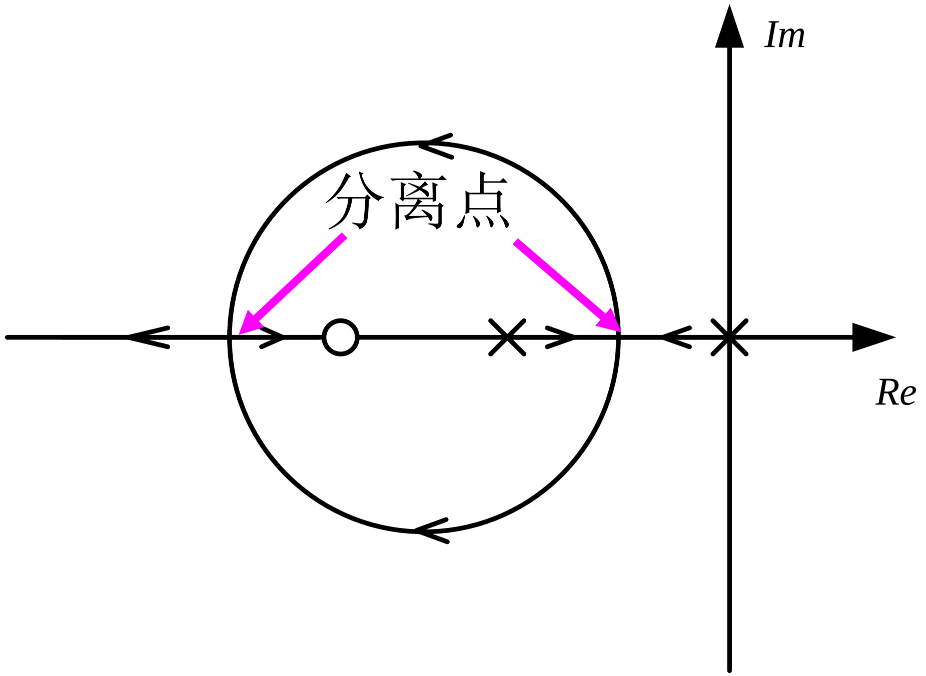

图4 相邻开环零、极点间的分离点

♣由于根轨迹的对称性，分离点多位于实轴上，也可能是一些共轭点（此情况较少）。

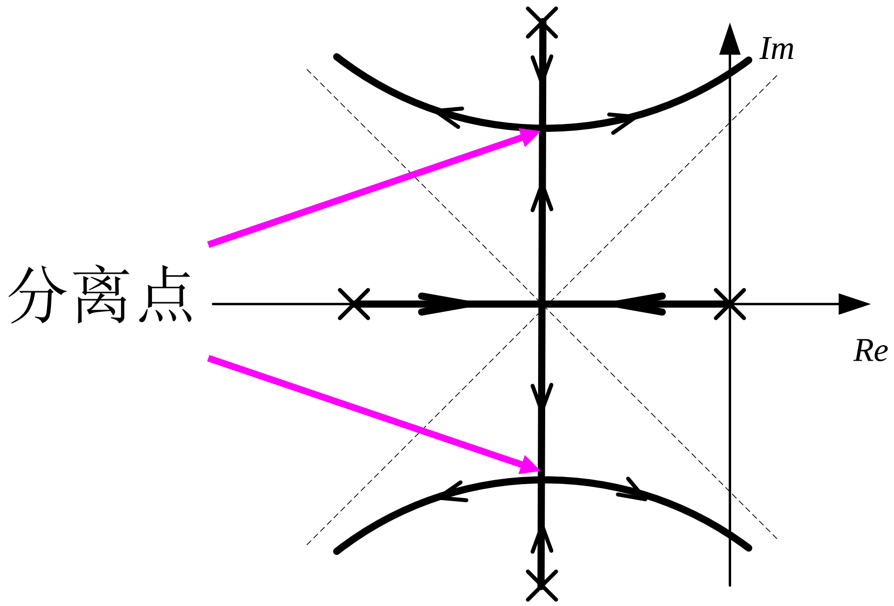

图5 共轭分离点

通常分离点处，需要解决以下问题：

1）分离点位置；

2）分离角；

3）分离点处根轨迹增益。