

宁夏大学附属中学 2024 年高考仿真卷数学试卷

请考生注意：

1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2. 答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在 $\triangle ABC$ 中， $|\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AB} - \vec{AC}|$ ， $AB = 4$ ， $AC = 3$ ，则 $\vec{BC}$ 在 $\vec{CA}$ 方向上的投影是（ ）
 A. 4 B. 3 C. -4 D. -3
2. 已知函数 $f(x) = me^{mx} - \ln x$ ，当 $x > 0$ 时， $f(x) > 0$ 恒成立，则 m 的取值范围为（ ）
 A. $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ B. $\left(\frac{1}{e}, e\right)$ C. $[1, +\infty)$ D. $(-\infty, e)$
3. 已知 $\triangle ABC$ 中， $|\vec{BC}| = 2$ ， $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = -2$ ，点 P 为 BC 边上的动点，则 $\vec{PC} \cdot (\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC})$ 的最小值为（ ）
 A. 2 B. $-\frac{3}{4}$ C. -2 D. $-\frac{25}{12}$
4. 已知数列 $\left\{\frac{1}{a_n} - 1\right\}$ 是公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列，且 $a_1 > 0$ ，若数列 $\{a_n\}$ 是递增数列，则 a_1 的取值范围为（ ）
 A. (1, 2) B. (0, 3) C. (0, 2) D. (0, 1)
5. 某公园新购进 3 盆锦紫苏、2 盆虞美人、1 盆郁金香，6 盆盆栽，现将这 6 盆盆栽摆成一排，要求郁金香不在两边，任两盆锦紫苏不相邻的摆法共（ ）种
 A. 96 B. 120 C. 48 D. 72
6. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F ，过右顶点 A 且与 x 轴垂直的直线交双曲线的一条渐近线于 M 点， MF 的中点恰好在双曲线 C 上，则 C 的离心率为（ ）
 A. $\sqrt{5} - 1$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{5}$
7. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角为 60° ， $|\vec{a}| = 1$ ， $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ ，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ （ ）
 A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. 0 C. 0 或 $-\frac{3}{2}$ D. $-\frac{3}{2}$
8. 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点 F 作直线交双曲线的两天渐近线于 A, B 两点，若 B 为线段 FA 的中点，且 $OB \perp FA$ (O 为坐标原点)，则双曲线的离心率为（ ）
 A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$

9. 我国古代数学著作《九章算术》有如下问题：“今有蒲生一日，长三尺莞生一日，长一尺蒲生日自半，莞生日自倍。问几何日而长倍？”意思是：“今有蒲草第1天长高3尺，莞草第1天长高1尺以后，蒲草每天长高前一天的一半，莞草每天长高前一天的2倍.问第几天莞草是蒲草的二倍？”你认为莞草是蒲草的二倍长所需要的天数是（ ）

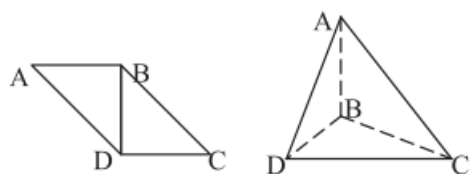
（结果采取“只入不舍”的原则取整数，相关数据： $\lg 3 \approx 0.4771$ ， $\lg 2 \approx 0.3010$ ）

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

10. 复数 $\frac{1+2i}{2-i} = (\quad)$.

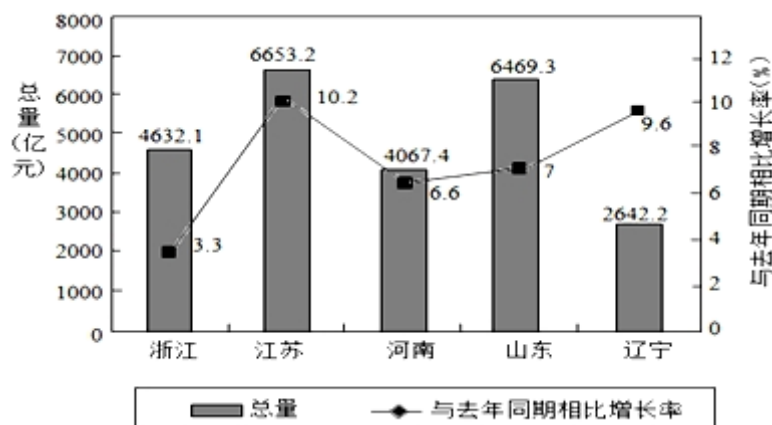
- A. i B. $1+i$ C. $-i$ D. $1-i$

11. 如图，将两个全等等腰直角三角形拼成一个平行四边形 $ABCD$ ，将平行四边形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折起，使平面 $ABD \perp$ 平面 BCD ，则直线 AC 与 BD 所成角余弦值为（ ）



- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

12. 如图是 2017 年第一季度五省 GDP 情况图，则下列陈述中不正确的是（ ）



- A. 2017 年第一季度 GDP 增速由高到低排位第 5 的是浙江省。
 B. 与去年同期相比，2017 年第一季度的 GDP 总量实现了增长。
 C. 2017 年第一季度 GDP 总量和增速由高到低排位均居同一位的省只有 1 个
 D. 去年同期河南省的 GDP 总量不超过 4000 亿元.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若向量 $\vec{a} = (x-1, 2)$ 与向量 $\vec{b} = (2, 1)$ 垂直，则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. $\frac{(2-x^2)^5}{x^3}$ 的展开式中 x 的系数为_____.

15. 棱长为 a 的正四面体 $ABCD$ 与正三棱锥 $E-BCD$ 的底面重合, 若由它们构成的多面体 $ABCDE$ 的顶点均在一球的球面上, 则正三棱锥 $E-BCD$ 的内切球半径为_____.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$, 函数 $f(x)=e^{|x|}a_{n+1}-(2a_n+1)\cos x$ 在 R 上有唯一零点, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n =$ _____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $x_{n+1}=x_n^2-6$, $n \in N^*$, 且对任意的 $n \in N^*$ 都有 $x_n < \frac{\sqrt{21}-1}{2}$,

(I) 证明: 对任意 $n \in N^*$, 都有 $-3 \leq x_n \leq \frac{1-\sqrt{21}}{2}$;

(II) 证明: 对任意 $n \in N^*$, 都有 $|x_{n+1}+2| \geq 2|x_n+2|$;

(III) 证明: $x_1 = -2$.

18. (12 分) 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1=1$, $a_n = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}$ ($n \in N^*$, 且 $n \geq 2$)

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: 当 $n \geq 2$ 时, $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2a_2} + \frac{1}{3a_3} + \dots + \frac{1}{na_n} < \frac{3}{2}$

19. (12 分) 在 $\triangle ABC$, 角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c , 已知 $\cos B + (\cos A - 2\sin A)\cos C = 0$.

(1) 求 $\cos C$ 的值;

(2) 若 $a = \sqrt{5}$, AC 边上的中线 $BM = \frac{\sqrt{17}}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

20. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 设 a 、 b 、 c 分别为角 A 、 B 、 C 的对边, 记 $\triangle ABC$ 的面积为 S , 且 $2S = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $c=7$, $\cos B = \frac{4}{5}$, 求 a 的值.

21. (12 分) 某工厂为提高生产效率, 需引进一条新的生产线投入生产, 现有两条生产线可供选择, 生产线①: 有 A , B 两道独立运行的生产工序, 且两道工序出现故障的概率依次是 0.02, 0.03. 若两道工序都没有出现故障, 则生产成本为 15 万元; 若 A 工序出现故障, 则生产成本增加 2 万元; 若 B 工序出现故障, 则生产成本增加 3 万元; 若 A , B 两道工序都出现故障, 则生产成本增加 5 万元. 生产线②: 有 a , b

两道独立运行的生产工序，且两道工序出现故障的概率依次是 0.04，0.01.若两道工序都没有出现故障，则生产成本为 14 万元；若 a 工序出现故障，则生产成本增加 8 万元；若 b 工序出现故障，则生产成本增加 5 万元；若 a, b 两道工序都出现故障，则生产成本增加 13 万元.

- (1) 若选择生产线①，求生产成本恰好为 18 万元的概率；
- (2) 为最大限度节约生产成本，你会给工厂建议选择哪条生产线？请说明理由.

22. (10 分) 随着互联网金融的不断发展，很多互联网公司推出余额增值服务产品和活期资金管理服务产品，如蚂蚁金服旗下的“余额宝”，腾讯旗下的“财富通”，京东旗下“京东小金库”.为了调查广大市民理财产品的选择情况，随机抽取 1200 名使用理财产品的市民，按照使用理财产品的情况统计得到如下频数分布表：

分组	频数（单位：名）
使用“余额宝”	x
使用“财富通”	y
使用“京东小金库”	30
使用其他理财产品	50
合计	1200

已知这 1200 名市民中，使用“余额宝”的人比使用“财富通”的人多 160 名.

- (1) 求频数分布表中 x, y 的值；
- (2) 已知 2018 年“余额宝”的平均年化收益率为 2.8%， “财富通”的平均年化收益率为 4.2% .若在 1200 名使用理财产品的市民中，从使用“余额宝”和使用“财富通”的市民中按分组用分层抽样方法共抽取 7 人，然后从这 7 人中随机选取 2 人，假设这 2 人中每个人理财的资金有 10000 元，这 2 名市民 2018 年理财的利息总和为 X ，求 X 的分布列及数学期望.注：平均年化收益率，也就是我们所熟知的利息，理财产品“平均年化收益率为 3%”即将 100 元钱存入某理财产品，一年可以获得 3 元利息.

参考答案

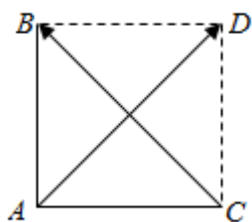
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

分析：根据平面向量的数量积可得 $\vec{AB} \perp \vec{AC}$ ，再结合图形求出 $\vec{BC}$ 与 $\vec{CA}$ 方向上的投影即可。

详解：如图所示：



$$\text{Q } |\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AB} - \vec{AC}|,$$

$$\therefore \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0,$$

$$\therefore \vec{AB} \perp \vec{AC},$$

$$\text{又 } AB = 4, AC = 3,$$

$$\therefore \vec{BC} \text{ 在 } \vec{CA} \text{ 方向上的投影是: } |\vec{BC}| \cos \angle BCA = |\vec{BC}| \cos(\pi - \angle ACB) = -|\vec{BC}| \cos \angle ACB = -3,$$

故选 D.

点睛：本题考查了平面向量的数量积以及投影的应用问题，也考查了数形结合思想的应用问题。

2、A

【解析】

分析可得 $m > 0$ ，显然 $me^{mx} - \ln x > 0$ 在 $(0, 1]$ 上恒成立，只需讨论 $x > 1$ 时的情况即

可， $f(x) > 0 \Leftrightarrow me^{mx} > \ln x \Leftrightarrow mxe^{mx} > e^{\ln x} \ln x$ ，然后构造函数 $g(x) = xe^x (x > 0)$ ，结合 $g(x)$ 的单调性，不等式等价于 $mx > \ln x$ ，进而求得 m 的取值范围即可。

【详解】

由题意，若 $m \leq 0$ ，显然 $f(x)$ 不是恒大于零，故 $m > 0$ 。

$m > 0$ ，则 $me^{mx} - \ln x > 0$ 在 $(0, 1]$ 上恒成立；

当 $x > 1$ 时， $f(x) > 0$ 等价于 $me^{mx} > \ln x$ ，

因为 $x > 1$ ，所以 $mxe^{mx} > e^{\ln x} \ln x$ 。

设 $g(x) = xe^x (x > 0)$ ，由 $g'(x) = e^x(1+x)$ ，显然 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

因为 $mx > 0, \ln x > 0$ ，所以 $mxe^{mx} > e^{\ln x} \ln x$ 等价于 $g(mx) > g(\ln x)$ ，即 $mx > \ln x$ ，则 $m > \frac{\ln x}{x}$ 。

设 $h(x) = \frac{\ln x}{x} (x > 0)$ ，则 $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} (x > 0)$ 。

令 $h'(x) = 0$, 解得 $x = e$, 易得 $h(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

从而 $h(x)_{\max} = h(e) = \frac{1}{e}$, 故 $m > \frac{1}{e}$.

故选: A.

【点睛】

本题考查了不等式恒成立问题, 利用函数单调性是解决本题的关键, 考查了学生的推理能力, 属于基础题.

3、 D

【解析】

以 BC 的中点为坐标原点, 建立直角坐标系, 可得 $B(-1, 0), C(1, 0)$, 设 $P(a, 0), A(x, y)$, 运用向量的坐标表示, 求得点 A 的轨迹, 进而得到关于 a 的二次函数, 可得最小值.

【详解】

以 BC 的中点为坐标原点, 建立如图的直角坐标系,

可得 $B(-1, 0), C(1, 0)$, 设 $P(a, 0), A(x, y)$,

由 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -2$,

可得 $(x+1, y) \cdot (2, 0) = 2x+2 = -2$, 即 $x = -2, y \neq 0$,

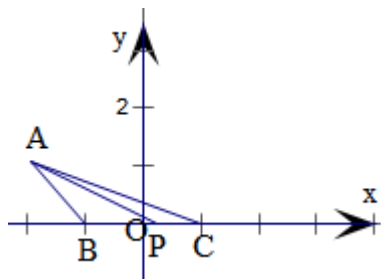
则 $\overrightarrow{PC} \cdot (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) = (1-a, 0) \cdot (x-a-1-a+1-a, y+0+0)$

$= (1-a)(x-3a) = (1-a)(-2-3a) = 3a^2 - a - 2$

$= 3\left(a - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{25}{12}$,

当 $a = \frac{1}{6}$ 时, $\overrightarrow{PC} \cdot (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 的最小值为 $-\frac{25}{12}$.

故选 D.



【点睛】

本题考查向量数量积的坐标表示, 考查转化思想和二次函数的值域解法, 考查运算能力, 属于中档题.

4、 D

【解析】

先根据已知条件求解出 $\{a_n\}$ 的通项公式，然后根据 $\{a_n\}$ 的单调性以及 $a_1 > 0$ 得到 a_1 满足的不等关系，由此求解出 a_1 的取值范围.

【详解】

$$\text{由已知得 } \frac{1}{a_n} - 1 = \left(\frac{1}{a_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}, \text{ 则 } a_n = \frac{1}{\left(\frac{1}{a_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} + 1}.$$

因为 $a_1 > 0$ ，数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列，

$$\text{所以 } a_{n+1} > a_n > 0, \text{ 则 } \frac{1}{\left(\frac{1}{a_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} \right)^n + 1} > \frac{1}{\left(\frac{1}{a_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} + 1},$$

$$\text{化简得 } 0 < \left(\frac{1}{a_1} - 1 \right) \frac{1}{3} < \frac{1}{a_1} - 1, \text{ 所以 } 0 < a_1 < 1.$$

故选：D.

【点睛】

本题考查数列通项公式求解以及根据数列单调性求解参数范围，难度一般.已知数列单调性，可根据 a_n, a_{n+1} 之间的大小关系分析问题.

5、B

【解析】

间接法求解，两盆锦紫苏不相邻，被另3盆隔开有 $A_3^3 A_4^3$ ，扣除郁金香在两边有 $2A_2^2 A_3^3$ ，即可求出结论.

【详解】

使用插空法，先排2盆虞美人、1盆郁金香有 A_3^3 种，

然后将3盆锦紫苏放入到4个位置中有 A_4^3 种，

根据分步乘法计数原理有 $A_3^3 A_4^3$ ，扣除郁金香在两边，

排2盆虞美人、1盆郁金香有 $2A_2^2$ 种，

再将3盆锦紫苏放入到3个位置中有 A_3^3 ，

根据分步计数原理有 $2A_2^2 A_3^3$ ，

所以共有 $A_3^3 A_4^3 - 2A_2^2 A_3^3 = 120$ 种.

故选:B.

【点睛】

本题考查排列应用问题、分步乘法计数原理，不相邻问题插空法是解题的关键，属于中档题.

6、A

【解析】

设 $M(a, b)$ ，则 MF 的中点坐标为 $(\frac{a+c}{2}, \frac{b}{2})$ ，代入双曲线的方程可得 a, b, c 的关系，再转化成关于 a, c 的齐次方程，

求出 $\frac{c}{a}$ 的值，即可得答案.

【详解】

双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右顶点为 $A(a, 0)$ ，右焦点为 $F(c, 0)$ ，

M 所在直线为 $x = a$ ，不妨设 $M(a, b)$ ，

$\therefore MF$ 的中点坐标为 $(\frac{a+c}{2}, \frac{b}{2})$. 代入方程可得 $\frac{(\frac{a+c}{2})^2}{a^2} - \frac{(\frac{b}{2})^2}{b^2} = 1$ ，

$\therefore \frac{(a+c)^2}{4a^2} = \frac{5}{4}$ ， $\therefore e^2 + 2e - 4 = 0$ ， $\therefore e = \sqrt{5} - 1$ （负值舍去）.

故选：A.

【点睛】

本题考查双曲线的离心率，考查函数与方程思想、转化与化归思想，考查逻辑推理能力和运算求解能力，求解时注意构造 a, c 的齐次方程.

7、B

【解析】

由数量积的定义表示出向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角为 60° ，再由 $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ ， $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2$ 代入表达式中即可求出 $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

【详解】

由向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角为 60° ，

得 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{a} + \vec{b}| \cos 60^\circ$ ，

所以 $\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} |\vec{a}| \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \frac{1}{2} |\vec{a}| \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2}$ ，

又 $|\vec{a}| = 1$ ， $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ ， $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ ， $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2$ ，

所以 $1 + \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{1 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 3}$, 解得 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

故选: B

【点睛】

本题主要考查向量数量积的运算和向量的模长平方等于向量的平方, 考查学生的计算能力, 属于基础题.

8、C

【解析】

由题意可得双曲线的渐近线的方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$.

$\because B$ 为线段 FA 的中点, $OB \perp FA$

$\therefore OA = OF = c$, 则 $\triangle AOF$ 为等腰三角形.

$\therefore \angle BOF = \angle BOA$

由双曲线的渐近线的性质可得 $\angle BOF = \angle xOA$

$\therefore \angle BOF = \angle BOA = \angle xOA = 60^\circ$

$\therefore \frac{b}{a} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$, 即 $b^2 = 3a^2$.

$\therefore$ 双曲线的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{2a}{a} = 2$

故选 C.

点睛: 本题考查了椭圆和双曲线的定义和性质, 考查了离心率的求解, 同时涉及到椭圆的定义和双曲线的定义及三角形的三边的关系应用, 对于求解曲线的离心率(或离心率的取值范围), 常见有两种方法: ①求出 a, c , 代入公式

$e = \frac{c}{a}$; ②只需要根据一个条件得到关于 a, b, c 的齐次式, 转化为 a, c 的齐次式, 然后转化为关于 e 的方程(不等式),

解方程(不等式), 即可得 e (e 的取值范围).

9、C

【解析】

由题意可利用等比数列的求和公式得莞草与蒲草 n 天后长度, 进而可得: $2 \times \frac{3\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2^n - 1}{2 - 1}$, 解出即可得出.

【详解】

由题意可得莞草与蒲草第 n 天的长度分别为 $a_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $b_n = 1 \times 2^{n-1}$

据题意得： $2 \times \frac{3\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2^n-1}{2-1}$ ，解得 $2^n=12$ ，

$$\therefore n = \frac{\lg 12}{\lg 2} = 2 + \frac{\lg 3}{\lg 2} \approx 1.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查了等比数列的通项公式与求和公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

10、A

【解析】

试题分析： $\frac{1+2i}{2-i} = \frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i+4i-2}{5} = i$ ，故选 A.

【考点】复数运算

【名师点睛】复数代数形式的四则运算的法则是进行复数运算的理论依据，加减运算类似于多项式的合并同类项，乘法法则类似于多项式的乘法法则，除法运算则先将除式写成分式形式，再将分母实数化.

11、C

【解析】

利用建系，假设 AB 长度，表示向量 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ ，利用向量的夹角公式，可得结果.

【详解】

由平面 $ABD \perp$ 平面 BCD ， $AB \perp BD$

平面 $ABD \cap$ 平面 $BCD = BD$ ， $AB \perp$ 平面 ABD

所以 $AB \perp$ 平面 BCD ，又 $DC \subset$ 平面 BCD

所以 $AB \perp DC$ ，又 $DB \perp DC$

所以作 z 轴 $\parallel AB$ ，建立空间直角坐标系 $B-xyz$

如图

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/466043121101010142>

