

2024 届云南省昆明市第八中学高三下学期阶段性测试（一）数学试题试卷

考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点分别为 F_1, F_2 ，其中焦点 F_2 与抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点重合，且椭圆与抛

物线的两个交点连线正好过点 F_2 ，则椭圆的离心率为（ ）

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2}-1$ C. $3-2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}-1$

2. 已知条件 $p: a = -1$ ，条件 $q: \text{直线 } x - ay + 1 = 0 \text{ 与直线 } x + a^2y - 1 = 0 \text{ 平行}$ ，则 p 是 q 的（ ）

- A. 充要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分不必要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 设 $a, b \in \mathbb{R}, i$ 是虚数单位，则“复数 $z = a + bi$ 为纯虚数”是“ $ab = 0$ ”的（ ）

- A. 充要条件 B. 必要不充分条件
C. 既不充分也不必要条件 D. 充分不必要条件

4. 已知抛物线 $x^2 = 4y$ 上一点 A 的纵坐标为 4，则点 A 到抛物线焦点的距离为（ ）

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

5. 已知集合 $A = \{x | y = \lg(2-x)\}$ ，集合 $B = \left\{x \left| \frac{1}{4} \leq 2^x \leq 4 \right.\right\}$ ，则 $A \cap B =$ （ ）

- A. $\{x | x > -2\}$ B. $\{x | -2 < x < 2\}$ C. $\{x | -2 \leq x < 2\}$ D. $\{x | x < 2\}$

6. 下列几何体的三视图中，恰好有两个视图相同的几何体是（ ）

- A. 正方体 B. 球体
C. 圆锥 D. 长宽高互不相等的长方体

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq a \\ 5 - x, & x > a \end{cases} (a > 0)$ ，若函数 $g(x) = f(x) - 4|x|$ 有三个零点，则 a 的取值范围是（ ）

- A. $(0, 1) \cup [5, +\infty)$ B. $(0, \frac{6}{5}) \cup [5, +\infty)$
C. $(1, 5]$ D. $(\frac{6}{5}, 5]$

8. 已知向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{m} = (4, 6)$ 平行, $\vec{b} = (-5, 1)$, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 14$, 则 $\vec{a} =$ ()

A. $(4, 6)$

B. $(-4, -6)$

C. $\left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$

D. $\left(-\frac{2\sqrt{13}}{13}, -\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$

9. 已知 $\sin \alpha - 2 \cos \alpha = 1$, $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, 则 $\frac{1 - \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan \frac{\alpha}{2}} =$ ()

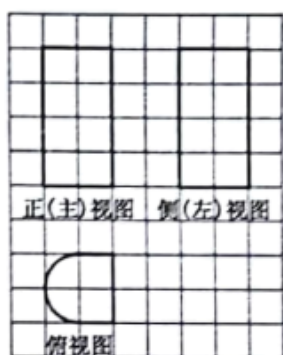
A. $-\frac{1}{2}$

B. -2

C. $\frac{1}{2}$

D. 2

10. 如图, 网格纸是由边长为 1 的小正方形构成, 若粗实线画出的是某几何体的三视图, 则该几何体的表面积为 ()



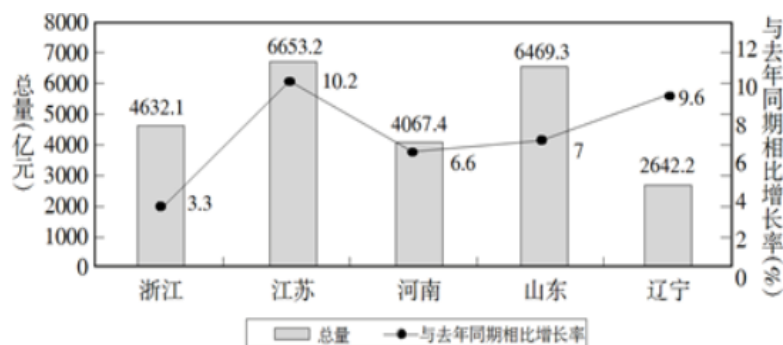
A. $9\pi + 20$

B. $9\pi + 26$

C. $5\pi + 20$

D. $5\pi + 26$

11. 如图所示是某年第一季度五省 GDP 情况图, 则下列说法中不正确的是 ()



A. 该年第一季度 GDP 增速由高到低排位第 3 的是山东省

B. 与去年同期相比, 该年第一季度的 GDP 总量实现了增长

C. 该年第一季度 GDP 总量和增速由高到低排位均居同一位的省份有 2 个

D. 去年同期浙江省的 GDP 总量超过了 4500 亿元

12. 集合 $A = \{-2, -1, 1\}$, $B = \{4, 6, 8\}$, $M = \{x | x = a + b, b \in B, x \in A\}$, 则集合 M 的真子集的个数是

A. 1 个

B. 3 个

C. 4 个

D. 7 个

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. $\triangle ABC$ 的角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且 $c^2 = a^2 + b^2 - ab$ ， $\sin A + \sin B = 2\sqrt{6} \sin A \sin B$ ，若 $c = 3$ ，则 $a+b$ 的值为_____.

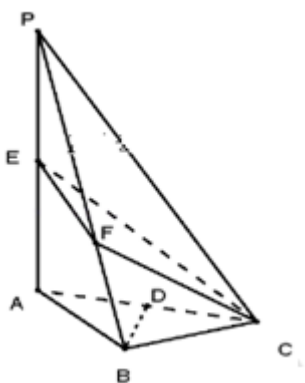
14. 已知正方形 $ABCD$ 边长为 3，空间中的动点 P 满足 $PA = 2$ ， $PC = 2PD$ ，则三棱锥 $A-PCD$ 体积的最大值是_____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $2b \cos B = a \cos C + c \cos A$ ，若 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值是_____.

16. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点都在球 O 的球面上， $PA = PB = PC$ ， $AB = 2$ ， $BC = \sqrt{5}$ ， $AC = 3$ ， E, F 分别为 AC, PB 的中点， $EF = \frac{3}{2}$ ，则球 O 的体积为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知三棱锥 $P-ABC$ 中， $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形， $AB = AC = 1$ ， $PB = PC = \sqrt{5}$ ，设点 E 为 PA 中点，点 D 为 AC 中点，点 F 为 PB 上一点，且 $PF = 2FB$ 。



(1) 证明： $BD \parallel$ 平面 CEF ；

(2) 若 $PA \perp AC$ ，求直线 CE 与平面 PBC 所成角的正弦值。

18. (12 分) 在平面直角坐标系中，曲线 $C_1: x^2 - y^2 = 2$ ，曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases}$

(θ 为参数)。以坐标原点 O 为极点， x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系。

(1) 求曲线 C_1, C_2 的极坐标方程；

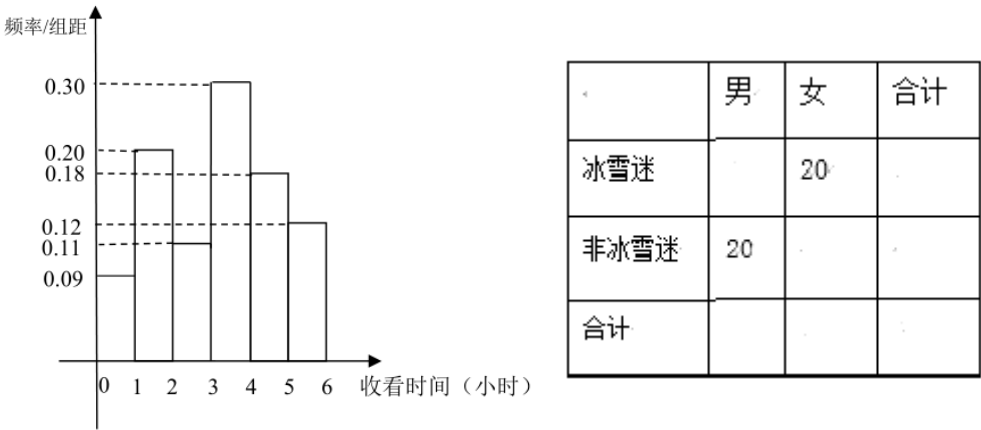
(2) 在极坐标系中，射线 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 与曲线 C_1, C_2 分别交于 A, B 两点 (异于极点 O)，定点 $M(3, 0)$ ，求 $\triangle MAB$ 的面积

19. (12 分) 已知点 $P(1, \frac{3}{2})$ ， $\vec{a} = (x-1, y)$ ， $\vec{b} = (x+1, y)$ ，且 $|\vec{a}| + |\vec{b}| = 4$ ，满足条件的 $Q(x, y)$ 点的轨迹为曲线 C 。

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 是否存在过点 $(0, -1)$ 的直线 l , 直线 l 与曲线 C 相交于 A, B 两点, 直线 PA, PB 与 y 轴分别交于 M, N 两点, 使得 $|PM| = |PN|$? 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 请说明理由.

20. (12 分) 万众瞩目的第 14 届全国冬季运动会 (简称“十四冬”) 于 2020 年 2 月 16 日在呼伦贝尔市盛大开幕, 期间正值我市学校放寒假, 寒假结束后, 某校工会对全校 100 名教职工在“十四冬”期间每天收看比赛转播的时间作了一次调查, 得到如图频数分布直方图:



(1) 若将每天收看比赛转播时间不低于 3 小时的教职工定义为“冰雪迷”, 否则定义为“非冰雪迷”, 请根据频率分布直方图补全 2×2 列联表; 并判断能否有 90% 的把握认为该校教职工是否为“冰雪迷”与“性别”有关;

(2) 在全校“冰雪迷”中按性别分层抽样抽取 6 名, 再从这 6 名“冰雪迷”中选取 2 名作冰雪运动知识讲座. 记其中女职工的人数为 ξ , 求的 ξ 分布列与数学期望.

附表及公式:

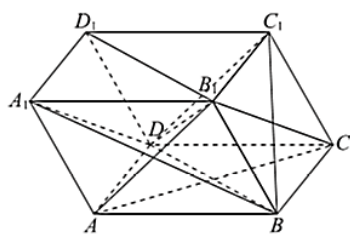
$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \quad n = a+b+c+d$$

21. (12 分) 设 $P(n, m) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \frac{m}{m+k}$, $Q(n, m) = C_{n+m}^n$, 其中 $m, n \in \mathbf{N}^+$.

- (1) 当 $m=1$ 时, 求 $P(n, 1) \cdot Q(n, 1)$ 的值;
- (2) 对 $\forall m \in \mathbf{N}^+$, 证明: $P(n, m) \cdot Q(n, m)$ 恒为定值.

22. (10 分) 如图, 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $AB_1 = CB_1$.



(1) 证明：平面 $BDD_1B_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ；

(2) 若 $\angle DAB = 60^\circ$ ， $\triangle DB_1B$ 是等边三角形，求二面角 $A_1 - BD - C_1$ 的余弦值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

根据题意可得易知 $c = \frac{p}{2}$ ，且 $\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{p^2}{4} \\ p^2 b^2 + 4p^2 a^2 = 4a^2 b^2 \end{cases}$ ，解方程可得 $\begin{cases} a^2 = \frac{2\sqrt{2}+3}{4} p^2 \\ b^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2} p^2 \end{cases}$ ，再利用 $e^2 = \frac{c^2}{a^2}$ 即可求解.

【详解】

易知 $c = \frac{p}{2}$ ，且 $\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{p^2}{4} \\ p^2 b^2 + 4p^2 a^2 = 4a^2 b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{2\sqrt{2}+3}{4} p^2 \\ b^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2} p^2 \end{cases}$

故有 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 3 - 2\sqrt{2}$ ，则 $e = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$

故选：B

【点睛】

本题考查了椭圆的几何性质、抛物线的几何性质，考查了学生的计算能力，属于中档题

2、C

【解析】

先根据直线 $x - ay + 1 = 0$ 与直线 $x + a^2 y - 1 = 0$ 平行确定 a 的值，进而即可确定结果.

【详解】

因为直线 $x - ay + 1 = 0$ 与直线 $x + a^2y - 1 = 0$ 平行,

所以 $a^2 + a = 0$, 解得 $a = 0$ 或 $a = -1$; 即 $q: a = 0$ 或 $a = -1$;

所以由 p 能推出 q ; q 不能推出 p ;

即 p 是 q 的充分不必要条件.

故选 C

【点睛】

本题主要考查充分条件和必要条件的判定, 熟记概念即可, 属于基础题型.

3、D

【解析】

结合纯虚数的概念, 可得 $a = 0, b \neq 0$, 再结合充分条件和必要条件的定义即可判定选项.

【详解】

若复数 $z = a + bi$ 为纯虚数, 则 $a = 0, b \neq 0$, 所以 $ab = 0$, 若 $ab = 0$, 不妨设 $a = 1, b = 0$, 此时复数 $z = a + bi = 1$,

不是纯虚数, 所以“复数 $z = a + bi$ 为纯虚数”是“ $ab = 0$ ”的充分不必要条件.

故选: D

【点睛】

本题考查充分条件和必要条件, 考查了纯虚数的概念, 理解充分必要条件的逻辑关系是解题的关键, 属于基础题.

4、D

【解析】

试题分析: 抛物线 $x^2 = 4y$ 焦点在 y 轴上, 开口向上, 所以焦点坐标为 $(0, 1)$, 准线方程为 $y = -1$, 因为点 A 的纵坐标为 4, 所以点 A 到抛物线准线的距离为 $4 + 1 = 5$, 因为抛物线上的点到焦点的距离等于到准线的距离, 所以点 A 与抛物线焦点的距离为 5.

考点: 本小题主要考查应用抛物线定义和抛物线上点的性质抛物线上的点到焦点的距离, 考查学生的运算求解能力.

点评: 抛物线上的点到焦点的距离等于到准线的距离, 这条性质在解题时经常用到, 可以简化运算.

5、C

【解析】

求出集合的等价条件, 利用交集的定义进行求解即可.

【详解】

解: $\because A = \{x | x < 2\}, B = \{x | -2 \leq x \leq 2\},$

$$\therefore A \cap B = \{x | -2 \leq x < 2\},$$

故选：C.

【点睛】

本题主要考查了对数的定义域与指数不等式的求解以及集合的基本运算,属于基础题.

6、C

【解析】

根据基本几何体的三视图确定.

【详解】

正方体的三个三视图都是相等的正方形，球的三个三视图都是相等的圆，圆锥的三个三视图有一个是圆，另外两个是全等的等腰三角形，长宽高互不相等的长方体的三视图是三个两两不全等的矩形.

故选：C.

【点睛】

本题考查基本几何体的三视图，掌握基本几何体的三视图是解题关键.

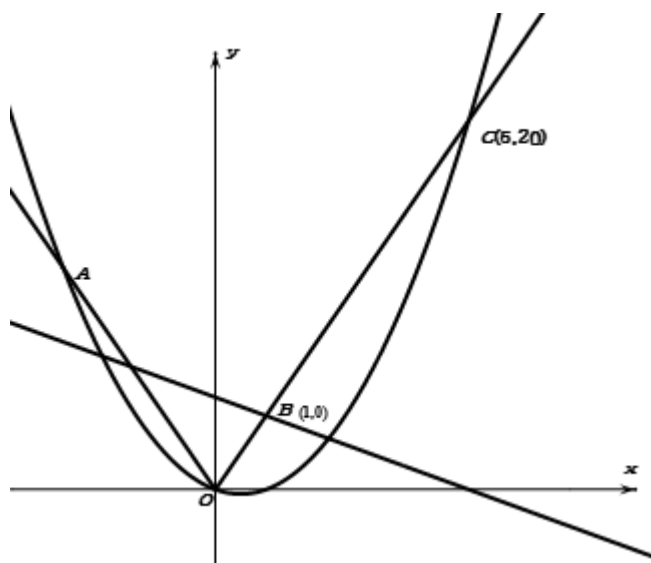
7、A

【解析】

分段求解函数零点，数形结合，分类讨论即可求得结果.

【详解】

作出 $y = x^2 - x$ 和 $y = 5 - x$ ， $y = 4|x|$ 的图像如下所示：



函数 $g(x) = f(x) - 4|x|$ 有三个零点，

等价于 $y = f(x)$ 与 $y = 4|x|$ 有三个交点，

又因为 $a > 0$ ，且由图可知，

当 $x \leq 0$ 时 $y = f(x)$ 与 $y = 4|x|$ 有两个交点 A, O ，

故只需当 $x > 0$ 时， $y = f(x)$ 与 $y = 4|x|$ 有一个交点即可.

若当 $x > 0$ 时，

$a \in (0, 1)$ 时，显然 $y = f(x)$ 与 $y = 4|x|$ 有一个交点 B ，故满足题意；

$a = 1$ 时，显然 $y = f(x)$ 与 $y = 4|x|$ 没有交点，故不满足题意；

$a \in (1, 5)$ 时，显然 $y = f(x)$ 与 $y = 4|x|$ 也没有交点，故不满足题意；

$a \in [5, +\infty)$ 时，显然 $y = f(x)$ 与 $y = 4|x|$ 有一个交点 C ，故满足题意.

综上所述，要满足题意，只需 $a \in (0, 1) \cup [5, +\infty)$.

故选：A.

【点睛】

本题考查由函数零点的个数求参数范围，属中档题.

8、B

【解析】

设 $\vec{a} = (x, y)$ ，根据题意得出关于 x, y 的方程组，解出这两个未知数的值，即可得出向量 $\vec{a}$ 的坐标.

【详解】

设 $\vec{a} = (x, y)$ ，且 $\vec{m} = (4, 6)$ ， $\vec{b} = (-5, 1)$ ，

由 $\vec{a} \parallel \vec{m}$ 得 $6x = 4y$ ，即 $3x = 2y$ ，①，由 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -5x + y = 14$ ，②，

所以 $\begin{cases} 3x = 2y \\ -5x + y = 14 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x = -4 \\ y = -6 \end{cases}$ ，因此， $\vec{a} = (-4, -6)$.

故选：B.

【点睛】

本题考查向量坐标的求解，涉及共线向量的坐标表示和向量数量积的坐标运算，考查计算能力，属于中等题.

9、B

【解析】

结合 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 求得 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 的值，由此化简所求表达式，求得表达式的值.

【详解】

由 $\begin{cases} \sin \alpha - 2 \cos \alpha = 1 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$, 以及 $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, 解得 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}, \cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

$$\begin{aligned} \frac{1 - \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan \frac{\alpha}{2}} &= \frac{1 - \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}}{1 + \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2}{\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{1 - 2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 + \frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -2. \end{aligned}$$

故选: B

【点睛】

本小题主要考查利用同角三角函数的基本关系式化简求值, 考查二倍角公式, 属于中档题.

10、C

【解析】

根据三视图还原为几何体, 结合组合体的结构特征求解表面积.

【详解】

由三视图可知, 该几何体可看作是半个圆柱和一个长方体的组合体, 其中半圆柱的底面半圆半径为 1, 高为 4, 长方体的底面四边形相邻边长分别为 1, 2, 高为 4, 所以该几何体的表面积

$$S = \pi \times 1^2 + \frac{1}{2} \times 2\pi \times 1 \times 4 + 1 \times 2 \times 2 + 1 \times 4 \times 2 + 2 \times 4 = 5\pi + 20, \text{ 故选 C.}$$

【点睛】

本题主要考查三视图的识别, 利用三视图还原成几何体是求解关键, 侧重考查直观想象和数学运算的核心素养.

11、D

【解析】

根据折线图、柱形图的性质, 对选项逐一判断即可.

【详解】

由折线图可知 A、B 项均正确, 该年第一季度 GDP 总量和增速由高到低排位均居同一位的

省份有江苏均第一.河南均第四.共 2 个.故 C 项正确; $4632.1 \div (1 + 3.3\%) \approx 4484 < 4500$.

故 D 项不正确.

故选: D.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/466110051052010211>