专题 02 函数及其应用、指对幂函数

易错点一：对函数定义域、值域及解析式理解存在偏差（定义域、值域及解析式的求算）

解题模板

已知函数的具体解析式求定义域的方法

法 1：若 $f(x)$ 是由一些基本初等函数通过四则运算构成的，则它的定义域为各基本初等函数的定义域的交集.

法 2：复合函数的定义域：先由外层函数的定义域确定内层函数的值域，从而确定对应的内层函数自变量的取值范围，还需要确定内层函数的定义域，两者取交集即可.

函数解析式的常见求法

法 1：配凑法：已知 $f(h(x))=g(x)$，求 $f(x)$ 的问题，往往把右边的 $g(x)$ 整理或配凑成只含 $h(x)$ 的式子，然后用 x 将 $h(x)$ 代换.

法 2：待定系数法：已知函数的类型(如一次函数、二次函数)可用待定系数法，比如二次函数 $f(x)$ 可设为 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，其中 a,b,c 是待定系数，根据题设条件，列出方程组，解出 a,b,c 即可.

法 3：换元法：已知 $f(h(x))=g(x)$，求 $f(x)$ 时，往往可设 $h(x)=t$，从中解出 x，代入 $g(x)$ 进行换元. 应用换元法时要注意新元的取值范围.

法 4：解方程组法：已知 $f\left(x\right)$ 满足某个等式，这个等式除 $f(x)$是未知量外，还有其他未知量，如 $f\left(\frac{1}{x}\right)$(或 $f(-x)$)等，可根据已知等式再构造其他等式组成方程组，通过解方程组求出 $f\left(x\right)$.

分段函数

第一步：求分段函数的函数值时，要先确定要求值的自变量属于哪一区间，然后代入该区间对应的解

析式求值.

第二步：当出现 $f\left(f\left(a\right)\right)$ 的形式时，应从内到外依次求值.

第三步：当自变量的值所在区间不确定时，要分类讨论，分类标准应参照分段函数不同段的端点。

结论：复合函数：

一般地，对于两个函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$，如果通过变量 u,y 可以表示成 x 的函数，那么称这个函数为函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合函数，记作 $y=f(g(x))$，其中 $y=f(u)$ 叫做复合函数 $y=f(g(x))$ 的外层函数， $u=g(x)$ 叫做 $y=f(g(x))$ 的内层函数.

抽象函数的定义域的求法：

(1)若已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$，则复合函数 $f(g(x))$ 的家义域由 $a \bullet g(x) \bullet b$ 求出.

(2)若已知函数 $f(g(x))$ 的定义域为 $[a,b]$，则 $f(x)$ 的定义域为 $g(x)$ 在 $x\in[a,b]$ 时的值域.

易错提醒：函数的概念

①一般地，给定非空数集 A，B，按照某个对应法则 f，使得 A 中任意元素 x，都有 B 中唯一确定的 y 与之对应，那么从集合 A 到集合 B 的这个对应，叫做从集合 A 到集合 B 的一个函数.记作： $x\to y=f(x)$，$x\in A$.集合 A 叫做函数的定义域，记为 D，集合 $\{y|y=f(x),x\in A\}$ 叫做值域，记为 C.

②函数的实质是从一个非空集合到另一个非空集合的映射.

③函数表示法：函数书写方式为 $y=f(x)$， $x\in D$

④函数三要素：定义域、值域、对应法则.

⑤同一函数：两个函数只有在定义域和对应法则都相等时，两个函数才相同.

基本的函数定义域限制

求解函数的定义域应注意：

①分式的分母不为零；

②偶次方根的被开方数大于或等于零：

③对数的真数大于零，底数大于零且不等于 1；

④零次幂或负指数次幂的底数不为零；

⑤三角函数中的正切 $y=\tan x$ 的定义域是 $\left\{x\middle|x\in R,\text{且 } x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z\right\}$；

⑥已知 $f\left(x\right)$ 的定义域求解 $f\left[g\left(x\right)\right]$ 的定义域，或已知 $f\left[g\left(x\right)\right]$ 的定义域求 $f\left(x\right)$ 的定义域，遵循两点：①定义域是指自变量的取值范围；②在同一对应法则∫下，括号内式子的范围相同；

⑦对于实际问题中函数的定义域，还需根据实际意义再限制，从而得到实际问题函数的定义域.

基本初等函数的值域

① $y=kx+b\ (k\neq 0)$ 的值域是 R .

② $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的值域是：当 $a>0$ 时，值域为 $\{y|y\geq\dfrac{4ac-b^2}{4a}\}$ ；当 $a<0$ 时，值域为 $\{y|y\geq\dfrac{4ac-b^2}{4a}\}$.

③ $y=\dfrac{k}{x}\ (k\neq 0)$ 的值域是 $\{y|y\neq 0\}$.

④ $y=a^x\ (a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的值域是 $(0,+\infty)$.

⑤ $y=\log_a x\ (a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的值域是 R .

分段函数的应用

分段函数问题往往需要进行分类讨论，根据分段函数在其定义域内每段的解析式不同，然后分别解决，即分段函数问题，分段解决.

举一反三

例 1．函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}$ 的定义域为（　）

A．$(-\infty,3]$　　B．$(1,+\infty)$　　C．$(1,3]$　　D．$(-\infty,1)\cup[3,+\infty)$

【答案】C

【详解】由题意得 $\begin{cases}(3-x)(x-1)\geq 0\\ x-1\neq 0\end{cases}$，解得 $1<x\leq 3$，则定义域为 $(1,3]$，

故选：C.

变式 1：设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x},0<x<1\\ 2(x-1),x\geq 1\end{cases}$，若 $f(m)=f(m+1)$，则 $f\left(\dfrac{2}{m}\right)=$（　）

A．14　　B．16　　C．2　　D．6

【答案】A

【详解】因为 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，则 $\begin{cases}m>0\\ m+1>0\end{cases}$，解得 $m>0$，

若 $m\geq 1$，则 $m+1\geq 2>1$，可得 $2(m-1)=2m-2\neq 2m$，不合题意；

若 $0<m<1$，则 $m+1>1$，可得 $\sqrt{m}=2m$，解得 $m=\dfrac{1}{4}$；

综上所述：$m=\dfrac{1}{4}$.

所以$f\left(\frac{2}{m}\right)=f(8)=14$.故选：A.

变式 2：已知集合$A=\left\{x\middle|y=\sqrt{-|x|+2}\right\},B=\left\{y\middle|y=x^2-2x+2\right\}$，则$A\cap B=$（　）

A．$[-2,2]$　　B．$[0,+\infty)$　　C．$[1,2]$　　D．$[0,2]$

【答案】C

【详解】由题意得$A=\{x|-|x|+2\geq 0\}=\{x|-2\leq x\leq 2\},B=\{y|y=(x-1)^2+1\}=\{y|y\geq 1\}$，

所以$A\cap B=[1,2]$.

故选:C.

变式 3：已知函数$f(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^x, x\geq 1\\ f(x+1), x<1\end{cases}$，则下列正确的是（　）

A．$f(f(0))=\frac{1}{2}$　B．$f(f(1))=\frac{\sqrt{2}}{4}$　C．$f(f(\log_2 3))=\frac{\sqrt{2}}{2}$　D．$f(x)$的值域为$(0,1]$

【答案】B

【详解】对选项 A，$f(0)=f(1)=\frac{1}{2},f(f(0))=f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，故 A 错误；

对选项 B，$f(1)=\frac{1}{2},f(f(1))=f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，故 B 正确.

对选项 C，因为$\log_2 3>1$，所以$f(\log_2 3)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 3}=2^{\log_2\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$，

$f(f(\log_2 3))=f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}\neq\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 C 错误；

对选项 D，当$x\geq 1$时，$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$，函数$f(x)$的值域为$\left(0,\frac{1}{2}\right]$，

当$0\leq x<1$时，$1\leq x+1<2,f(x)=f(x+1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$，

函数$f(x)$的值域为$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$，又因为$x<1$时，$f(x)=f(x+1)$，

所以当$x<1$时，函数$f(x)$的值域为$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$，

综上，函数$f(x)$的值域为$\left(0,\frac{1}{2}\right]$，故 D 错误.

故选：B

易错题通关

1．已知函数 $f(x)=\ln\frac{e^x+1}{e^x-1}$，则 $f[f(3)]=$（　）

A．$\ln 3$　　B．3　　C．e^3　　D．$e^3\ln 3$

【答案】B

【详解】因为函数 $f(x)=\ln\frac{e^x+1}{e^x-1}$，则 $f(3)=\ln\frac{e^3+1}{e^3-1}$，

令 $f(3)=t$，则 $f[f(3)]=f(t)=\ln\frac{e^t+1}{e^t-1}$，

又因为 $t=f(3)=\ln\frac{e^3+1}{e^3-1}$，

所以 $f[f(3)]=f(t)=\ln\frac{e^{\ln\frac{e^3+1}{e^3-1}}+1}{e^{\ln\frac{e^3+1}{e^3-1}}-1}=\ln\frac{\frac{e^3+1}{e^3-1}+1}{\frac{e^3+1}{e^3-1}-1}=\ln\frac{\frac{2e^3}{e^3-1}}{\frac{2}{e^3-1}}=\ln e^3=3$，

所以 $f[f(3)]=3$，

故选：B.

2．给出下列4个函数，其中对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 均成立的是（　）

A．$f(\sin 3x)=\sin x$　　B．$f(\sin 3x)=x^3+x^2+x$

C．$f(x^2+2)=|x+2|$　　D．$f(x^2+4x)=|x+2|$

【答案】D

【详解】对于A，当 $x=0$ 时，$f(0)=0$；当 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$f(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，与函数定义矛盾，不符合；

对于B，当 $x=0$ 时，$f(0)=0$；当 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$f(0)=\left(\frac{\pi}{3}\right)^3+\left(\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{\pi}{3}$，与函数定义矛盾，不符合；

对于C，当 $x=-2$ 时，$f(6)=0$；当 $x=2$ 时，$f(6)=4$，与函数定义矛盾，不符合；

对于D，令 $x+2=t$，则 $x=t-2$，所以 $f\left[(t-2)^2+4(t-2)\right]=f(t^2-4)=|t|$，

令 $t^2-4=m\in[-4,+\infty)$，所以 $t=\pm\sqrt{m+4}$，

所以 $f(m)=\left|\pm\sqrt{m+4}\right|=\sqrt{m+4}\ (m\geq -4)$，

所以 $f(x)=\sqrt{x+4}\,(x\geq -4)$，符合.

故选：D.

3．已知函数 $f(1-x)=\frac{1-x^2}{x^2}(x\neq 0)$，则 $f(x)=$（　）

A．$\frac{1}{(x-1)^2}-1(x\neq 0)$　　B．$\frac{1}{(x-1)^2}-1(x\neq 1)$

C．$\frac{4}{(x-1)^2}-1(x\neq 0)$　　D．$\frac{4}{(x-1)^2}-1(x\neq 1)$

【答案】B

【详解】令 $t=1-x$，则 $x=1-t$，且 $x\neq 0$，则 $t\neq 1$，

可得 $f(t)=\frac{1-(1-t)^2}{(1-t)^2}=\frac{1}{(t-1)^2}-1,(t\neq 1)$，

所以 $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}-1(x\neq 1)$.

故选：B.

4．已知函数 $f(x)$ 满足 $f(2x)=f(x+1)$，则 $f(x)$ 可能是（　）.

A．$f(x)=x$　　B．$f(x)=\log_2 x$

C．$f(x)=2^x$　　D．$f(x)=\begin{cases}1, x\in \mathbf{Q}\\ 0, x\notin \mathbf{Q}\end{cases}$

【答案】D

【详解】对于 A，$f(x)=x$，则 $f(2x)=2x$，$f(x+1)=x+1$，不满足 $f(2x)=f(x+1)$；

对于 B，$f(x)=\log_2 x$，则 $f(2x)=\log_2 2x=1+\log_2 x$，$f(x+1)=\log_2(x+1)$，

不满足 $f(2x)=f(x+1)$；

对于 C，$f(x)=2^x$，则 $f(2x)=2^{2x}=4^x$，$f(x+1)=2^{x+1}=2\times 2^x$，不满足 $f(2x)=f(x+1)$；

对于 D，$f(x)=\begin{cases}1, x\in \mathrm{Q}\\ 0, x\notin \mathrm{Q}\end{cases}$，当 $x\in \mathrm{Q}$ 时，$2x\in \mathrm{Q}, x+1\in \mathrm{Q}$，故 $f(2x)=f(x+1)=1$；

当 $x\notin \mathbf{Q}$ 时，$2x\notin \mathrm{Q}, x+1\notin \mathrm{Q}$，故 $f(2x)=f(x+1)=0$，

即此时 $f(x)=\begin{cases}1, x\in Q\\0, x\notin Q\end{cases}$ 满足 $f(2x)=f(x+1)$，D 正确，

故选：D

5．设集合 $A=\{x\mid 4x^2-13x<0\}$，$B=\{y\mid y=\sqrt{x-2}+3\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$(0,2]$　　B．$(0,3]$　　C．$\left[2,\frac{13}{4}\right)$　　D．$\left[3,\frac{13}{4}\right)$

【答案】D

【详解】由 $4x^2-13x<0$，即 $x(4x-13)<0$，解得 $0<x<\frac{13}{4}$，

所以 $A=\{x\mid 4x^2-13x<0\}=\left\{x\mid 0<x<\frac{13}{4}\right\}$，

由 $\sqrt{x-2}\geq 0$，所以 $\sqrt{x-2}+3\geq 3$，

所以 $B=\{y\mid y=\sqrt{x-2}+3\}=\{y\mid y\geq 3\}$，

所以 $A\cap B=\left[3,\frac{13}{4}\right)$．

故选：D.

6．集合 $P=\{x\mid |x|<2\}$，$Q=\{y\mid y=\sqrt{x^2}+1\}$，则 $P\cap Q=$（　）

A．$\{1,2\}$　　B．$\{x\mid 1\leq x<2\}$

C．$\{x\mid 1<x<2\}$　　D．$\{x\mid 1\leq x\leq 2\}$

【答案】B

【详解】由题意可得：$P=\{x\mid |x|<2\}=\{x\mid -2<x<2\}$，$Q=\{y\mid y=\sqrt{x^2}+1\}=\{y\mid y\geq 1\}$，

所以 $P\cap Q=\{x\mid 1\leq x<2\}$．

故选：B.

易错点二：忽视单调性与单调区间的主次（函数的单调性与最值）

解题模板

1.函数的单调性是对函数定义内的某个区间而言的。

2.函数 $f(x)$ 在给定区间上的单调性是函数在该区间上的整体性质。

3.函数的单调定义中的 x_1、x_2 有三个特征：（1）任意性（2）有大小（3）属于同一个单调区间。

4.求函数的单调区间必须先求定义域。

5.判断函数单调性常用以下几种方法：

方法 1：定义法：一般步骤为设元 $\to$ 作差 $\to$ 变形 $\to$ 判断符号$\to$得出结论.

方法 2：图象法：如果 $f(x)$ 是以图象形式给出的，或者 $f(x)$ 的图象易作出，则可由图象的上升或下降确定单调性.

方法 3：导数法：先求导数，利用导数值的正负确定函数的单调区间.

方法 4：性质法：（1）对于由基本初等函数的和、差构成的函数，根据各初等函数的增减性及 $f(x) \pm g(x)$ 增减性质进行判断；

6.求函数最值（值域）的常用方法

方法 1：单调性法：先确定函数的单调性，再由单调性求最值.

方法 2：图象法：先作出函数的图象，再观察其最高点、最低点，求出最值.

方法 3：基本不等式法：先对解析式变形，使之具备“一正二定三相等”的条件后用基本不等式求出最值.

方法 4：导数法：先求导，然后求出在给定区间上的极值，最后结合端点值，求出最值.

结论：

1.单调性技巧

（1）证明函数单调性的步骤

①**取值**：设 x_1， x_2 是 $f(x)$ 定义域内一个区间上的任意两个量，且 $x_1 < x_2$；

②**变形**：作差变形（变形方法：因式分解、配方、有理化等）或作商变形；

③**定号**：判断差的正负或商与1的大小关系；

④**得出结论.**

（2）函数单调性的判断方法

①**定义法**：根据增函数、减函数的定义，按照“取值—变形—判断符号—下结论”进行判断.

②**图象法**：就是画出函数的图象，根据图象的上升或下降趋势，判断函数的单调性.

③**直接法**：就是对我们所熟悉的函数，如一次函数、二次函数、反比例函数等，直接写出它们的单调区间.

（3）记住几条常用的结论：

结论 1：若 $f(x)$ 是增函数，则 $-f(x)$ 为减函数；若 $f(x)$ 是减函数，则 $-f(x)$ 为增函数；

结论 2：若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为增（或减）函数，则在 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公共定义域上 $f(x)+g(x)$ 为增（或减）函数；

结论 3：若 $f(x)>0$ 且 $f(x)$ 为增函数，则函数 $\sqrt{f(x)}$ 为增函数， $\frac{1}{f(x)}$ 为减函数；

结论 4：若 $f(x)>0$ 且 $f(x)$ 为减函数，则函数 $\sqrt{f(x)}$ 为减函数，$\dfrac{1}{f(x)}$ 为增函数．

易错提醒：1.函数的单调性

（1）单调函数的定义

一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 A，区间 $D\subseteq A$：

如果对于 D 内的任意两个自变量的值 x_1，x_2 当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，符号一致那么就说 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数．

如果对于 D 内的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，符号相反那么就说 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数．

①属于定义域 A 内某个区间上；

②任意两个自变量 x_1，x_2 且 $x_1<x_2$；

③都有 $f(x_1)<f(x_2)$ 或 $f(x_1)>f(x_2)$；

④图象特征：在单调区间上增函数的图象上坡路，减函数的图象下坡路．

（2）单调性与单调区间

①单调区间的定义：如果函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数或减函数，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上具有单调性，D 称为函数 $f(x)$ 的单调区间．

②函数的单调性是函数在某个区间上的性质．

（3）复合函数的单调性

复合函数的单调性遵从“同增异减”，即在对应的取值区间上，外层函数是增（减）函数，内层函数是增（减）函数，复合函数是增函数；外层函数是增（减）函数，内层函数是减（增）函数，复合函数是减函数．

2．函数的最值

前提：一般地，设函数 $y=f\left(x\right)$ 的定义域为 I，如果存在实数 M 满足

条件：（1）对于任意的 $x\in I$，都有 $f\left(x\right)\le M$；（2）存在 $x_0\in I$，使得 $f\left(x_0\right)=M$ 结论 M 为最大值

（1）对于任意的 $x\in I$，都有 $f\left(x\right)\ge M$；（2）存在 $x_0\in I$，使得 $f\left(x_0\right)=M$ 结论 M 为最小值

举一反三

例．若函数 $f\left(x\right)=a^{x^2-ax+1}\left(a>0且a\ne1\right)$ 在区间 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增，则 a 的取值范围是（　）

A．$\left(0,1\right)$　　B．$\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$

C．$\left(1,2\right]$　　D．$\left[2,+\infty\right)$

【答案】C

【详解】设函数$t=x^2-ax+1$，

则函数$f\left(x\right)=a^{x^2-ax+1}\left(a>0且a\neq1\right)$是由二次函数$t=x^2-ax+1$与指数函数$y=a^t$ $\left(a>0且a\neq1\right)$复合而成的.

当$0<a<1$时，由于函数$y=a^t$ $\left(a>0且a\neq1\right)$单调递减，

而二次函数$t=x^2-ax+1$的图象开口向上，

在区间$\left(1,+\infty\right)$上不可能单调递减，

则函数$f\left(x\right)$在区间$\left(1,+\infty\right)$上不可能单调递增，故不满足题意；

当$a>1$时，函数$y=a^t$ $\left(a>0且a\neq1\right)$单调递增，

要使函数$f\left(x\right)$在区间$\left(1,+\infty\right)$上单调递增，

则二次函数$t=x^2-ax+1$在区间$\left(1,+\infty\right)$上单调递增，

又其对称轴为$x=\frac{a}{2}$，故$\frac{a}{2}\leq1$，所以$a\in\left(1,2\right]$.故选：C.

变式1． 下列函数中，满足“对任意的$x_1,x_2\in(0,+\infty)$，使得$\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}<0$”成立的是（　　）

A．$f(x)=-x^2-2x+1$　　B．$f(x)=x-\frac{1}{x}$　C．$f(x)=x+1$　D．$f(x)=\log_2(2x)+1$

【答案】A

【详解】根据题意，“对任意的$x_1,x_2\in(0,+\infty)$，使得$\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}<0$”，则函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数.

对于选项A，$f(x)=-x^2-2x+1$，为二次函数，其对称轴为$x=-1$，在$(0,+\infty)$上递减，符合题意；

对于选项B，$f(x)=x-\frac{1}{x}$，其导数$f'(x)=1+\frac{1}{x^2}$，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上递增，不符合题意；

对于选项C，$f(x)=x+1$为一次函数，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上递增，不符合题意；

对于选项D，由复合函数单调性“同增异减”知，$f(x)=\log_2(2x)+1$在$(0,+\infty)$上单调递增，不符合题意.故选：A.

变式2． 若定义在$\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$上的函数$f\left(x\right)$同时满足：①$f\left(x\right)$为奇函数；②对任意的$x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right)$，且$x_1\neq x_2$，都有$\frac{x_2f\left(x_1\right)-x_1f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}<0$，则称函数$f\left(x\right)$具有性质$P$．已知函数$f\left(x\right)$具有性质$P$，则不等式

$f(x-2)<\frac{f(x^2-4)}{x+2}$的解集为（　）

A．$(-\infty,-1)$　　　　B．$(-3,2)$

C．$(-\infty,-3)\cup(-1,2)$　　　　D．$(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$

【答案】C

【详解】因为对任意的$x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且$x_1\neq x_2$，都有$\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，

即对任意两个不相等的正实数x_1,x_2不妨设$0<x_1<x_2$，都有$\frac{\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_1x_2}}{x_1-x_2}=\frac{\frac{f(x_1)}{x_1}-\frac{f(x_2)}{x_2}}{x_1-x_2}<0$，

所以有$\frac{f(x_1)}{x_1}>\frac{f(x_2)}{x_2}$，

所以函数$g(x)=\frac{f(x)}{x}$是$(0,+\infty)$上的减函数，

又因为$f(x)$为奇函数，即有$\forall x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，有$f(-x)=-f(x)$，

所以有$g(-x)=\frac{f(-x)}{-x}=\frac{-f(x)}{-x}=\frac{f(x)}{x}=g(x)$，

所以$g(x)$为偶函数，所以$g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增．

当$x-2>0$，即$x>2$时，有$x^2-4>0$，由$f(x-2)<\frac{f(x^2-4)}{x+2}$，得$\frac{f(x-2)}{x-2}<\frac{f(x^2-4)}{x^2-4}$，

所以$x-2>x^2-4$，解得$x<-2$，此时无解；

当$x-2<0$，即$x<2$时，由$f(x-2)<\frac{f(x^2-4)}{x+2}$，得$\frac{f(x-2)}{x-2}>\frac{f(x^2-4)}{x^2-4}$，

所以$|x-2|<|x^2-4|$，解得$x<-3$或$-1<x<2$．

综上所述，不等式$f(x-2)<\frac{f(x^2-4)}{x+2}$的解集为$(-\infty,-3)\cup(-1,2)$．

故选：C．

变式3．定义在$(0,+\infty)$上的函数$f(x)$满足：对$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且$x_1\neq x_2$都有$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>1$，则不等式$f(2\log_2x)-f(x)>\log_2x^2-x$的解集为（　）

A．$(1,2)$　　B．$(2,4)$　　C．$(4,8)$　　D．$(8,16)$

【答案】B

【详解】根据题意：当 $x_1 > x_2$ 时，

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 1 \Rightarrow f(x_1)-f(x_2) > x_1 - x_2 \Rightarrow f(x_1)-x_1 > f(x_2)-x_2,$$

当 $x_1 < x_2$ 时，

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 1 \Rightarrow f(x_1)-f(x_2) < x_1 - x_2 \Rightarrow f(x_1)-x_1 < f(x_2)-x_2$$

可得函数 $h(x)=f(x)-x$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

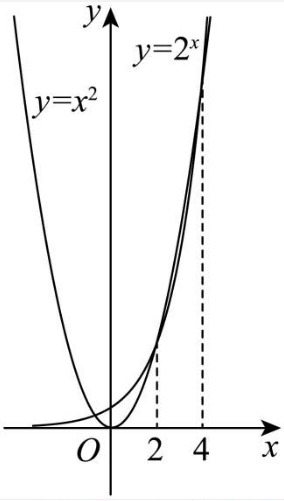
则 $f(2\log_2 x)-f(x) > \log_2 x^2 - x \Rightarrow f(\log_2 x^2)-\log_2 x^2 > f(x)-x$

$\Rightarrow \log_2 x^2 > x \Rightarrow \log_2 x^2 > \log_2 2^x \Rightarrow x^2 > 2^x$，

在同一坐标系中画出 $y=x^2$ 与 $y=2^x$ 图象.

得 $2<x<4$，则不等式的解集为 $(2,4)$，

故选：B.



易错题通关

1．已知函数 $f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}-\sin x}{2}$，若对于一切的实数 x，不等式 $f(2kx^2)<f\left(\dfrac{3}{8}-kx\right)$ 恒成立，则 k 的取值范围为（　）

A．$[-2,0)$　　B．$(-2,0)$　　C．$[-3,0]$　　D．$(-3,0]$

【答案】D

【详解】易知函数 $f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}-\sin x}{2}$ 的定义域为R，

则 $f'(x)=\dfrac{2^x\cdot\ln 2+2^{-x}\cdot\ln 2-\cos x}{2}$，

因为 $2^x>0$， $\ln 2>0$，

所以 $2^x\cdot\ln 2+2^{-x}\cdot\ln 2\geq 2\sqrt{2^x\cdot\ln 2\cdot 2^{-x}\cdot\ln 2}=2\ln 2=\ln 4>1$，

又因为 $-1\leq\cos x\leq 1$，所以 $2^x\cdot\ln 2+2^{-x}\cdot\ln 2-\cos x>0$，即 $f'(x)>0$ 恒成立，

故函数 $f(x)$ 是R上的单调递增函数，

因为 $f(2kx^2)<f\left(\dfrac{3}{8}-kx\right)$，所以 $2kx^2<\dfrac{3}{8}-kx$，即 $2kx^2+kx-\dfrac{3}{8}<0$，

(i)当 $k=0$ 时，左边 $=-\dfrac{3}{8}<0$ 成立，故 $k=0$ 符合题意；

(ii)当 $k\neq 0$ 时，有 $\begin{cases}2k<0\\ \Delta=k^2-4\times 2k\times\left(-\dfrac{3}{8}\right)<0\end{cases}$，解得：$-3<k<0$，

综上所述：k 的取值范围为：$(-3,0]$.

故选：D.

2．已知函数 $f(x)$ 是定义在R上的奇函数，且对任意的 $0<m<n$，都有 $\dfrac{f(m)-f(n)}{m-n}<0$，且 $f(4)=0$，则不等式 $\dfrac{f(-x-2)-f(x+2)}{x}>0$ 的解集为（　）

A．$(-6,0)$　　B．$(-\infty,-6)\cup(2,+\infty)$

C．$(-\infty,-6)\cup(0,2)$　　D．$(-\infty,-6)\cup(-2,0)\cup(2,+\infty)$

【答案】D

【详解】因为对任意的 $0<m<n$，都有 $\dfrac{f(m)-f(n)}{m-n}<0$，此时 $m-n<0$，则 $f(m)>f(n)$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，

因为函数 $f(x)$ 是定义在R上的奇函数，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，$f(-4)=-f(4)=0$，

所以当 $x<-4$ 和 $0<x<4$ 时，$f(x)>0$；当 $-4<x<0$ 和 $x>4$ 时，$f(x)<0$.

由 $\dfrac{f(-x-2)-f(x+2)}{x}=\dfrac{-2f(x+2)}{x}>0$，即 $xf(x+2)<0$，

所以 $\begin{cases}x<0\\x+2<-4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0\\0<x+2<4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>0\\x+2>4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>0\\-4<x+2<0\end{cases}$，

所以 $x<-6$ 或 $-2<x<0$ 或 $x>2$ 或 x 无解，

所以原不等式解集为 $(-\infty,-6)\cup(-2,0)\cup(2,+\infty)$

故选：D

3．已知函数 $f(x)=-x+\lg\dfrac{2-x}{2+x}$，且 $f(m)+f(2m-1)>0$，则实数 m 的取值范围是（　）

A．$\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)$　　B．$\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$

C．$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{3}{2}\right)$　　D．$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)$

【答案】D

【详解】函数 $f(x)=-x+\lg\dfrac{2-x}{2+x}$，则 $\dfrac{2-x}{2+x}>0$，即 $(x-2)(x+2)<0$，解得 $-2<x<2$，

所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-2,2)$，且 $f(-x)=x+\lg\dfrac{2+x}{2-x}=-\left(-x+\lg\dfrac{2-x}{2+x}\right)=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 为奇函数，

又函数 $y=\dfrac{2-x}{2+x}=\dfrac{-(x+2)+4}{2+x}=-1+\dfrac{4}{x+2}$ 在 $(-2,2)$ 上单调递减，

所以 $y=\lg\dfrac{2-x}{2+x}$ 在 $(-2,2)$ 上单调递减，则 $f(x)$ 在 $(-2,2)$ 上单调递减，

所以不等式 $f(m)+f(2m-1)>0$，即 $f(m)>f(1-2m)$，

等价于 $\begin{cases}-2<m<2\\-2<2m-1<2\\m<1-2m\end{cases}$，解得 $-\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{1}{3}$，即实数 m 的取值范围是 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)$.

故选：D

4．已知函数 $f(x)$ 的定义域为R，$f(x-1)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，$f(3)=0$，且对任意的 $x_1,x_2\in(-\infty,0)$，

$x_1\neq x_2$，满足 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$，则不等式 $(x-1)f(x+1)\geq 0$ 的解集为（　）

A．$(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$　　B．$[-4,-1]\cup[0,1]$

C．$[-4,-1]\cup[1,2]$　　D．$[-4,-1]\cup[2,+\infty)$

【答案】C

【详解】$\because f(x-1)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，$\therefore f(x)$ 的图象关于点 $(0,0)$ 对称，$\therefore f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，

$\because$ 对任意的 x_1，$x_2\in(-\infty,0)$，$x_1\neq x_2$，满足 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$，$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上也单调递减，

又 $f(3)=0$ 所以 $f(-3)=0$，且 $f(0)=0$，

所以当 $x\in(-\infty,-3)\cup(0,3)$ 时，$f(x)>0$；当 $x\in(-3,0)\cup(3,+\infty)$ 时，$f(x)<0$，

所以由 $(x-1)f(x+1)\geq 0$ 可得 $\begin{cases}x-1<0,\\-3\leq x+1\leq 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-1>0,\\0\leq x+1\leq 3\end{cases}$ 或 $x-1=0$，

解得 $-4\leqslant x\leqslant -1$ 或 $1\leq x\leq 2$，即不等式 $(x-1)f(x+1)\geq 0$ 的解集为 $[-4,-1]\cup[1,2]$.

故选：C.

5．已知函数 $f(x)=x|x|$，关于 x 的不等式 $f(x^2-1)+4f(ax+1)\geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，则 a 的取值范围为（　　）

A．$[0,2]$　　　　B．$[0,1]$　　　　C．$[-2,2]$　　　　D．$[-1,1]$

【答案】D

【详解】由 $f(x^2-1)+4f(ax+1)\geq 0$，得 $f(x^2-1)\geq -4f(ax+1)$.

因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=-x|-x|=-x|x|=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 为奇函数，

因此 $f(x^2-1)\geq 4f(-ax-1)$.

又 $f(2x)=2x|2x|=4x|x|=4f(x)$，

所以 $f(x^2-1)\geq f(-2ax-2)$.

当 $x>0$ 时，$f(x)=x|x|=x^2$ 单调递增，而 $f(x)$ 为奇函数，

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

所以 $x^2-1\geq -2ax-2$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，即 $x^2+2ax+1\geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，

所以 $\Delta=4a^2-4\leq 0$，解得 $-1\leq a\leq 1$，

故 a 的取值范围为 $[-1,1]$.

故选：D.

6．$f(x)$为定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，对任意的$x_2>x_1\geq 0$，都有$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>2$，且$f(2)=4$，则不等式$f(x)>2|x|$的解集为（　）

A．$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　B．$(2,+\infty)$　C．$(0,2)$ D．$(-\infty,2)$

【答案】A

【详解】对任意的$x_2>x_1\geq 0$，都有$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>2$，则$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-2=\dfrac{[f(x_2)-2x_2]-[f(x_1)-2x_1]}{x_2-x_1}>0$，

令$g(x)=f(x)-2|x|$，则$g(x)=f(x)-2|x|$在$[0,+\infty)$上单调递增，

因为$f(x)$为定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，

所以$g(-x)=f(-x)-2|-x|=f(x)-2|x|=g(x)$，即$g(x)=f(x)-2|x|$为偶函数，

又$g(2)=f(2)-2\times|2|=0$，

由$f(x)>2|x|$，可得$g(x)=f(x)-2|x|>0$，即$g(|x|)>g(2)$，

所以$|x|>2$，

所以$f(x)>2|x|$的解集为$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$，

故选：A.

7．函数$f(x)=\begin{cases}-x+1,x\geq a\\-x^3+3x^2+9x+5,x<a\end{cases}$，其中$a\leq -2$，则满足$f(x)+f(x-1)<5$的$x$取值范围是（　）

A．$(-1,+\infty)$　B．$\left(-\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

C．$(-\sqrt{3},+\infty)$　D．$(0,+\infty)$

【答案】A

【详解】因为$a\leq -2$，当$x<a$时，$f(x)=-x^3+3x^2+9x+5$，

则$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)<0$，

所以，函数$f(x)$在$(-\infty,a)$上单调递减，故$f(x)>-a^3+3a^2+9a+5$，

当$x\geq a$时，$f(x)=-x+1$，显然函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上为减函数，

此时，$f(x)\leq f(a)=-a+1$.

因为$\left(-a^3+3a^2+9a+5\right)-\left(-a+1\right)=-a^3+3a^2+10a+4$,

令$h\left(a\right)=-a^3+3a^2+10a+4$，其中$a\le -2$，

则$h'\left(a\right)=-3a^2+6a+10=-3\left(a-1\right)^2+13\le -3\times\left(-3\right)^2+13<0$，

所以，函数$h\left(a\right)$在$\left(-\infty,-2\right]$上单调递减，故$h\left(a\right)\ge h\left(-2\right)=8+12-20+4=4>0$，

综上可知，函数$f\left(x\right)$在$\mathbf{R}$上为减函数，

令$p\left(x\right)=f\left(x\right)+f\left(x-1\right)$，则函数$p\left(x\right)$在$\mathbf{R}$上单调递减，

又因为$p\left(-1\right)=f\left(-1\right)+f\left(-2\right)=5$，所以，$f\left(x\right)+f\left(x-1\right)<5$等价于$p\left(x\right)<p\left(-1\right)$，

结合函数$p\left(x\right)$的单调性可得$x>-1$，故原不等式的解集为$\left(-1,+\infty\right)$.

故选：A.

8．已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases}e^x-\ln\left(x+1\right)-1,x\ge 0\\ 1-\dfrac{1}{e^x}+\ln\left(1-x\right),x<0\end{cases}$，若$f\left(e^x-2\right)+f\left(e^{2x}\right)\le 0$，则实数$x$的取值范围为（　）

A．$\left(-\infty,0\right]$　　B．$\left[0,+\infty\right)$　　C．$\left[-\ln 2,0\right]$　　D．$\left(-\infty,-\ln 2\right]$

【答案】A

【详解】当$x<0$时，$-x>0$，则$f\left(-x\right)=e^{-x}-\ln\left(-x+1\right)-1=-f\left(x\right)$，

同理，当$x>0$时，$-x<0$，则$f\left(-x\right)=1-\dfrac{1}{e^{-x}}+\ln\left(1+x\right)=-f\left(x\right)$，

且$f\left(0\right)=0$，可知函数$f\left(x\right)$为奇函数；

当$x\ge 0$时，$f\left(x\right)=e^x-\ln\left(x+1\right)-1$，则$f'\left(x\right)=e^x-\dfrac{1}{x+1}$，

令$m\left(x\right)=f'\left(x\right)=e^x-\dfrac{1}{x+1}$，则$m'\left(x\right)=e^x+\dfrac{1}{\left(x+1\right)^2}>0$，

所以$m\left(x\right)$在$\left[0,+\infty\right)$单调递增，即$m\left(x\right)\ge m\left(0\right)=0$，即$f'\left(x\right)\ge 0$，

所以$f\left(x\right)$在$\left[0,+\infty\right)$单调递增，且$f\left(x\right)$为奇函数，所以$f\left(x\right)$在$\mathbf{R}$上单调递增.

则$f\left(e^x-2\right)+f\left(e^{2x}\right)\le 0\Rightarrow f\left(e^x-2\right)\le -f\left(e^{2x}\right)=f\left(-e^{2x}\right)$，

即$e^x-2\le -e^{2x}\Rightarrow e^{2x}+e^x-2\le 0$，即$\left(e^x+2\right)\left(e^x-1\right)\le 0$，

可得$-2\le e^x\le 1$，且$e^x>0$，所以$0<e^x\le 1$，解得$x\le 0$，

所以解集为$(-\infty,0]$.

故选:A

9．德国数学家莱布尼茨是微积分的创立者之一，他从几何问题出发，引进微积分概念．在研究切线时认识到，求曲线的切线的斜率依赖于纵坐标的差值和横坐标的差值，以及当此差值变成无限小时它们的比值，这也正是导数的几何意义．设$f'(x)$是函数$f(x)$的导函数，若$f'(x)>0$，对$\forall x_1$，$x_2\in(0,+\infty)$，且$x_1\neq x_2$，总有$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，则下列选项正确的是（　）

A．$f(2)<f(\mathrm{e})<f(\pi)$ B．$f'(\pi)<f'(\mathrm{e})<f'(2)$

C．$f'(2)<f(3)-f(2)<f'(3)$ D．$f'(3)<f(3)-f(2)<f'(2)$

【答案】ABD

【详解】A 选项，根据$f'(x)>0$可得，$f(x)$在 R 上单调递增，

因为$\pi>\mathrm{e}>2$，所以$f(2)<f(\mathrm{e})<f(\pi)$，A 正确；

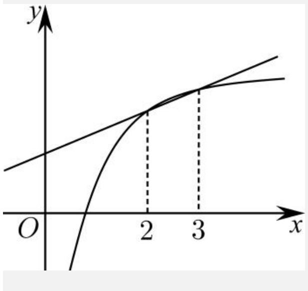
B 选项，因为$\forall x_1$，$x_2\in(0,+\infty)$，且$x_1\neq x_2$，总有$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，

所以函数图象上凸，画出函数图象，由几何意义可知，$f'(x)$表示函数图象上的各点处的切线斜率，

显然随着x的增大，切线斜率变小，且恒为正，

因为$\pi>\mathrm{e}>2$，所以$f'(\pi)<f'(\mathrm{e})<f'(2)$，B 正确；

C 选项，$k_{AB}=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=f(3)-f(2)$，结合函数图象可知$f'(3)<f(3)-f(2)<f'(2)$，C 错误，D 正确.



故选：ABD

10．设函数$f(x)=\frac{\sin 2x}{\sin x+\cos x}$，则（　）

A．$f(x)$的一个周期为π

B．$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$上单调递增

C．$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$上有最大值$\frac{\sqrt{2}}{4}$

D．$f(x)$图象的一条对称轴为直线$x=\frac{\pi}{4}$

【答案】BD

【详解】对 A：$f(x+\pi)=\dfrac{\sin 2(x+\pi)}{\sin(x+\pi)+\cos(x+\pi)}=\dfrac{\sin(2x+2\pi)}{-\sin x-\cos x}=-\dfrac{\sin 2x}{\sin x+\cos x}=-f(x)$，故 π 不是 $f(x)$ 的周期，A 错误；

对 B：令 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，则 $\sin 2x=2\sin x\cos x=t^2-1$，

则 $y=\dfrac{t^2-1}{t}=t-\dfrac{1}{t}$，

$\because x\in\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$，则 $x+\dfrac{\pi}{4}\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right),\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\in(0,1)$，

$\therefore t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，且 $t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\in(0,\sqrt{2})$，

又 $\because y=t-\dfrac{1}{t}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增，B 正确；

对 C：$\because\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$，则 $x+\dfrac{\pi}{4}\in(0,\pi)$，

$\therefore \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\in(0,1]$，则 $t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\in\left(0,\sqrt{2}\right]$，

又 $\because y=t-\dfrac{1}{t}$ 在 $\left(0,\sqrt{2}\right]$ 上单调递增，且 $y|_{x=\sqrt{2}}=\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore y=t-\dfrac{1}{t}$ 在 $\left(0,\sqrt{2}\right]$ 上最大值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

即 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$ 上有最大值 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，C 错误；

对 D：$f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\dfrac{\sin 2\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}=\dfrac{\sin(\pi-2x)}{\cos x+\sin x}=\dfrac{\sin 2x}{\sin x+\cos x}=f(x)$，故 $f(x)$ 图象的一条对称轴为直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$，D 正确.

故选：BD.

11．已知函数 $f(x)=ax^3+(1-a)x$，则（　）

A．函数 $f(x)$ 为奇函数

B．当 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=1$ 时，$a=-\dfrac{1}{2}$ 或 1

C．若函数 $f(x)$ 有且仅有一个零点，则实数 a 的取值范围为 $[0,1)$

D．若函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的值域为 $[-1,1]$，则实数 a 的取值范围为 $\left[-\dfrac{1}{2},4\right]$

【答案】ABD

【详解】对于选项A，由 $f(-x)=-f(x)$，可知函数 $f(x)$ 为奇函数，故A选项正确;

对于选项B，由 $f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a^2}+\frac{1-a}{a}=\frac{1+a-a^2}{a^2}=1$，解得 $a=-\frac{1}{2}$ 或 $a=1$，故B选项正确;

对于选项C，由 $f(x)=0$，有 $x\left[ax^2+(1-a)\right]=0$，当 $a=0$ 时，函数 $f(x)$ 仅有一个零点0，当 $a\neq 0$ 时，必有 $\frac{a-1}{a}\leq 0$，有 $0<a\leq 1$，可得 $0\leq a\leq 1$，故C选项错误;

对于选项D，由 $f(1)=1, f(-1)=-1, f(0)=0, f(-x)=-f(x)$，可知满足题意只需

当 $0<x<1$ 时，$-1\leq f(x)\leq 1$，有 $\begin{cases}ax^3+(1-a)x+1\geq 0\\ ax^3+(1-a)x-1\leq 0\end{cases}$，即 $\begin{cases}a(x^3-x)+(x+1)\geq 0\\ a(x^3-x)+(x-1)\leq 0\end{cases}$，

所以 $\begin{cases}(x+1)(ax^2-ax+1)\geq 0\\ (x-1)(ax^2+ax+1)\leq 0\end{cases}$，由 $0<x<1$，有 $\begin{cases}ax^2-ax+1\geq 0\\ ax^2+ax+1\geq 0\end{cases}$，

则 $\begin{cases}a\leq \frac{1}{x-x^2}\\ a\geq -\frac{1}{x^2+x}\end{cases}$，可知当 $0<x<1$ 时，$a\leq \frac{1}{x-x^2}$ 和 $a\geq -\frac{1}{x^2+x}$ 恒成立，

$x-x^2=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leq \frac{1}{4}, 0<x^2+x<2$，有 $-\frac{1}{2}\leq a\leq 4$.故D选项正确.

故选：ABD.

易错点三：奇偶性的前提及两个函数与一个函数的区别（函数的奇偶性、周期性、对称性）

解题模板

1.奇偶性技巧

(1)函数具有奇偶性的必要条件是其定义域关于原点对称.

(2)奇偶函数的图象特征.

函数 $f(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称;

函数 $f(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 的图象关于原点中心对称.

(3)若奇函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处有意义，则有 $f(0)=0$；

偶函数 $y=f(x)$ 必满足 $f(x)=f(|x|)$.

(4)偶函数在其定义域内关于原点对称的两个区间上单调性相反；奇函数在其定义域内关于原点对称的两个区间上单调性相同.

(5)若函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，则函数 $f(x)$ 能表示成一个偶函数与一个奇函数的和的形式.记

$g(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，$h(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，则 $f(x)=g(x)+h(x)$.

(6)运算函数的奇偶性规律：运算函数是指两个（或多个）函数式通过加、减、乘、除四则运算所得的函数，如 $f(x)+g(x),f(x)-g(x),f(x)\times g(x),f(x)\div g(x)$.

对于运算函数有如下结论：奇±奇=奇；偶±偶=偶；奇±偶=非奇非偶；

奇×(÷)奇=偶；奇×(÷)偶=奇；偶×(÷)偶=偶.

(7)复合函数 $y=f[g(x)]$ 的奇偶性原则：**内偶则偶，两奇为奇.**

(8)常见奇偶性函数模型

奇函数：①函数 $f(x)=m(\dfrac{a^x+1}{a^x-1})\,(x\neq 0)$ 或函数 $f(x)=m(\dfrac{a^x-1}{a^x+1})$.

②函数 $f(x)=\pm(a^x-a^{-x})$.

③函数 $f(x)=\log_a\dfrac{x+m}{x-m}=\log_a(1+\dfrac{2m}{x-m})$ 或函数 $f(x)=\log_a\dfrac{x-m}{x+m}=\log_a(1-\dfrac{2m}{x+m})$

④函数 $f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)$ 或函数 $f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)$.

注意：关于①式，可以写成函数 $f(x)=m+\dfrac{2m}{a^x-1}(x\neq 0)$ 或函数 $f(x)=m-\dfrac{2m}{a^x+1}(m\in R)$.

偶函数：①函数 $f(x)=\pm(a^x+a^{-x})$.

②函数 $f(x)=\log_a(a^{mx}+1)-\dfrac{mx}{2}$.

③函数 $f(|x|)$ 类型的一切函数.

④常数函数

2.周期性技巧

结论 1: 若对于非零常数 m 和任意实数 x，等式 $f(x+m)=-f(x)$ 恒成立，则 $f(x)$ 是周期函数，且 $2m$ 是它的一个周期.

证明： $f(x+2m)=f(x+m+m)=-f(x+m)=f(x)\therefore T=2m$

也可理解为： 平移 m 个单位到谷底，再平移一个单位到巅峰，再平移一个单位又到谷底，则谷底与谷底的距离为 $2m$，$\therefore T=2m$

结论 2: 定义在 R 上的函数 $f(x)$，对任意的 $x\in R$，若有 $f(x+a)=f(x+b)$(其中 a,b 为常数，$a\neq b$)，则函数 $f(x)$ 是周期函数，$|a-b|$ 是函数的一个周期.

证明： $f(x-a+a)=f(x-a+b)\Rightarrow f(x)=f(x+b-a)\therefore T=|b-a|$

口诀：同号差（周期）异号加（对称轴）$\Rightarrow$ 只研究 x 前的正负.

结论 3: 定义在 R 上的函数 $f(x)$，对任意的 $x\in R$，若有 $f(x+a)=-f(x+b)$(其中 a,b 为常数，$a\neq b$)，则函数 $f(x)$ 是周期函数，$2|a-b|$ 是函数的一个周期.

证明： $f(x+a)=-f(x+b)$ 先向左平移 a 个单位得 $f(x-a+a)=-f(x-a+b)$

$\Rightarrow f(x)=-f(x+b-a)$ 令 $b-a=m'\Rightarrow f(x)=-f(x+m')$ 如同结论 1

结论 4: 定义在 R 上的函数 $f(x)$，对任意的 $x\in R$，若有 $f(x+a)=\dfrac{1}{f(x)}$，(或 $f(x+a)=-\dfrac{1}{f(x)}$)(其中 a 为常数，$a\neq 0$)，则函数 $f(x)$ 是周期函数，$2|a|$ 是函数的一个周期.

证明： $f(x+a)=\pm\dfrac{1}{f(x)}$，$f(x+2a)=f(x+a+a)=\pm\dfrac{1}{f(x+a)}=f(x)\therefore T=2|a|$

结论 5: 定义在 R 上的函数 $f(x)$，对任意的 $x\in R$，有 $f(a+x)=f(a-x)$ 且 $f(b+x)=f(b-x)$，(其中 a,b 是常数，$a\neq b$)则函数 $y=f(x)$ 是周期函数，$2|a-b|$ 是函数的一个周期.

另一种题干出现的信息： ①若 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a,x=b$ 都对称，则等价于 $f(a+x)=f(a-x)$ 且 $f(b+x)=f(b-x)$，则 $y=f(x)$ 为周期函数且 $T=2|a-b|$.

②若 $y=f(x)$ 为偶函数且图象关于直线 $x=a$ 对称，则 $y=f(x)$ 为周期函数且 $T=2|a|$

证明： $f(a+x)=f(a-x)$ 向左平移 a 个单位，得 $f(x-a+a)=f(a-[x-a])$

$\Rightarrow f(x)=f(2a-x)$，同理 $\Rightarrow f(x)=f(2b-x)$，$\Rightarrow f(2a-x)=f(2b-x)$

利用口诀：同号差（周期）异号加（对称轴）$\Rightarrow$ 只研究 x 前的正负.秒出周期

结论 6: 若定义在 R 上的函数 $y=f(x)$ 对任意实数 $x\in R$，恒有 $f(x)=f(a+x)+f(x-a)$ 成立($a\neq 0$)，则 $f(x)$ 是周期函数，且 $6|a|$ 是它的一个周期.

证明： 由函数 $f(x)=f(a+x)+f(x-a)\Rightarrow f(x+a)=f(x+2a)+f(x)$

$\Rightarrow f(x)=f(x+2a)+f(x)+f(x-a)\Rightarrow f(x-a)=-f(x+2a)$，向右平移 a 个单位得

$f(x)=-f(x+3a)\Rightarrow f(x+3a+3a)=-f(x+3a)=f(x)\therefore T=6|a|$

口诀：内同号，外异号，内部只差需 2 倍，出现周期很 $easy$.

结论 7: 若对于非零常数 m 和任意实数 x，等式 $f(x+m)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ 成立，则 $f\left(x\right)$ 是周期函数，且 $4m$ 是它的一个周期.

证明： $f(x+m)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}\Rightarrow f(x+2m)=\dfrac{1+f(x+m)}{1-f(x+m)}=\dfrac{1+\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\dfrac{1}{f\left(x\right)}$

$f\left(x+2m\right)=-\dfrac{1}{f\left(x\right)}$ **如同结论 4，** $f\left(x+2m+2m\right)=-\dfrac{1}{f\left(x+2m\right)}=f\left(x\right)\therefore T=4m$

结论 8: 若对于非零常数 m 和任意实数 x，等式 $f(x+m)=\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}$ 成立，则 $f\left(x\right)$ 是周期函数，且 $2m$ 是它的一个周期.

证明： $f(x+m)=\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}\Rightarrow f(x+2m)=\dfrac{1-f(x+m)}{1+f(x+m)}=\dfrac{1-\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}}{1+\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}}=f\left(x\right)$

$\therefore T=2m$

结论 9: 若对于非零常数 m 和任意实数 x，等式 $f(x+m)=1-\dfrac{1}{f(x)}\left(f(x)\neq 0\right)$ 成立，则 $f\left(x\right)$ 是周期函数，且 $3m$ 是它的一个周期.

证明： $f(x+m)=1-\dfrac{1}{f(x)}\left(f(x)\neq 0\right)$ 得

$f(x+3m)=1-\dfrac{1}{f(x+2m)}=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{f(x+m)}}=\dfrac{-1}{f(x+m)-1}=\dfrac{-1}{1-\dfrac{1}{f\left(x\right)}-1}=f\left(x\right)$

$\therefore T=3m$

结论 10: ①若定义在 R 上的函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象关于两点 $A\left(a,y_0\right),B\left(b,y_0\right)$ 都对称，则 $f\left(x\right)$ 是周期函数，且 $2\left|b-a\right|$ 是它的一个周期.

②若奇函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象关于点 $A\left(a,0\right)$ 对称，则 $f\left(x\right)$ 是周期函数，且 $2\left|a\right|$ 是它的一个周期.

证明： 函数 $y=f\left(x\right)$ 满足 $f\left(a+x\right)+f\left(a-x\right)=2y_0$ 且 $f\left(b+x\right)+f\left(b-x\right)=2y_0$，

则 $f(x)=2y_0-f(2a-x)=2y_0-f(2b-x)\Rightarrow f(2a-x)=f(2b-x)$

利用口诀：同号差（周期）异号加（对称轴）$\Rightarrow$ 只研究 x 前的正负.秒出周期

结论 11: ①若定义在 R 上的函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $A(a,y_0)$ 和直线 $x=b$ 都对称，则 $f(x)$ 是周期函数，且 $4|b-a|$ 是它的一个周期.

②若奇函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称，则 $f(x)$ 是周期函数，且 $4|a|$ 是它的一个周期.

证明： 函数 $y=f(x)$ 满足 $f(a+x)+f(a-x)=2y_0$ 且 $f(b+x)=f(b-x)$，

则 $f(x)=2y_0-f(2a-x)=f(2b-x)\Rightarrow f(x)=2y_0-f(2b-2a+x)=2y_0-f(2a-x)$

$\therefore f(2b+x)=2y_0-f(2a+x)\Rightarrow f(x)=2y_0-f(2b-2a+x)$

$\therefore f(x)=2y_0-f(2b-2a+x)=2y_0+f(4b-4a+x)-2y_0\ \therefore T=4|b-a|$

3.对称性技巧

（1）若函数 $y=f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称，则 $f(a+x)=f(a-x)$.

（2）若函数 $y=f(x)$ 关于点 (a,b) 对称，则 $f(a+x)+f(a-x)=2b$.

（3）函数 $y=f(a+x)$ 与 $y=f(a-x)$ 关于 y 轴对称，函数 $y=f(a+x)$ 与 $y=-f(a-x)$ 关于原点对称.

结论：

1.(1)如果一个奇函数 $f(x)$ 在原点处有定义，即 $f(0)$ 有意义，那么一定有 $f(0)=0$.

(2)如果函数 $f(x)$ 是偶函数，那么 $f(x)=f(|x|)$.

2.函数周期性常用结论

对 $f(x)$ 定义域内任一自变量的值 x:

(1)若 $f(x+a)=-f(x)$ ，则 $T=2a(a>0)$.

(2)若 $f(x+a)=\dfrac{1}{f(x)}$ ，则 $T=2a(a>0)$.

(3)若 $f(x+a)=-\dfrac{1}{f(x)}$ ，则 $T=2a(a>0)$.

3.对称性的三个常用结论

(1)若函数 $y=f(x+a)$ 是偶函数，则函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称.

(2)若对于 R 上的任意 x 都有 $f(2a-x)=f(x)$ 或 $f(-x)=f(2a+x)$ ，则 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称.

(3)若函数 $y=f(x+b)$ 是奇函数，则函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(b,0)$ 中心对称.

易错提醒：奇偶性的前提及两个函数与一个函数的区别

1．函数的奇偶性

由函数奇偶性的定义可知，函数具有奇偶性的一个前提条件是：对于定义域内的任意一个 x，$-x$ 也在定义域内(即定义域关于原点对称)．

2．函数的对称性

(1)若函数 $y=f(x+a)$ 为偶函数，则函数 $y=f(x)$ 关于 $x=a$ 对称．

(2)若函数 $y=f(x+a)$ 为奇函数，则函数 $y=f(x)$ 关于点 $(a，0)$ 对称．

(3)若 $f(x)=f(2a-x)$，则函数 $f(x)$ 关于 $x=a$ 对称．

(4)若 $f(x)+f(2a-x)=2b$，则函数 $f(x)$ 关于点 $(a，b)$ 对称．

举一反三

例．设函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，且 $f(x+1)$ 是奇函数，$f(2x+3)$ 是偶函数，则（　）

A．$f(0)=0$　　B．$f(4)=0$　　C．$f(5)=0$　　D．$f(-2)=0$

【答案】C

【详解】因为 $f(x+1)$ 是奇函数，所以 $f(-x+1)=-f(x+1)$，则 $f(1)=0$.

又 $f(2x+3)$ 是偶函数，所以 $f(-2x+3)=f(2x+3)$，所以 $f(5)=f(1)=0$.

故选：C.

变式 1．已知函数 $f(x)$ 是定义域为 **R** 的偶函数，$f(2x+1)-1$ 是奇函数，则下列结论不正确的是（　）

A．$f(1)=1$　　B．$f(0)=0$

C．$f(x)$ 是以 4 为周期的函数　　D．$f(x)$ 的图象关于 $x=6$ 对称

【答案】B

【详解】因为函数 $f(x)$ 是定义域为 R 的偶函数，所以 $f(x)=f(-x)$，

因为 $f(2x+1)-1$ 是奇函数，所以 $f(-2x+1)-1=-[f(2x+1)-1]=-f(2x+1)+1$，

将 x 换成 $\frac{1-x}{2}$，则有 $f(x)-1=-f(2-x)+1\Rightarrow f(x)+f(2-x)=2$，

A：令 $x=1$，所以 $f(1)+f(1)=2\Rightarrow f(1)=1$，因此本选项正确；

B：因为 $f(x)+f(2-x)=2$，所以函数 $f(x)$ 关于点 $(1,1)$ 对称，

由 $f\left(x\right)+f\left(2-x\right)=2$，可得 $f\left(0\right)+f\left(2\right)=2$，$f\left(2\right)$ 的值不确定，

因此不能确定 $f\left(0\right)$ 的值，所以本选项不正确；

C：因为 $f\left(x\right)+f\left(2-x\right)=2$，

所以 $f\left(x+2\right)+f\left(-x\right)=2\Rightarrow f\left(x+2\right)+f\left(x\right)=2\Rightarrow f\left(x+4\right)+f\left(x+2\right)=2$，

所以 $f\left(x\right)=f\left(x+4\right)$，因此 $f\left(x\right)$ 是以 4 为周期的函数，因此本选项正确；

D：因为 $f\left(x\right)+f\left(2-x\right)=2$，

所以 $f\left(2+x\right)+f\left(-x\right)=2\Rightarrow f\left(2+x\right)+f\left(x\right)=2$，

因此有 $f\left(2+x\right)=f\left(2-x\right)$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 的图象关于 $x=2$ 对称，

由上可知 $f\left(x\right)$ 是以 4 为周期的函数，

所以 $f\left(x\right)$ 的图象也关于 $x=6$ 对称，因此本选项正确，

故选：B.

变式 2． 已知函数 $y=f(x)=x+\dfrac{1}{x-1}(x\neq 1)$，下列结论中：①当 $x>1$ 时，$f(x)$ 的最小值为 3；②函数 $y=f(x+1)-1$ 是奇函数；③函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(1,1)$ 对称 ；④ $y+1=0$ 是 $y=f(x)$ 图象的一条切线，正确结论的个数是（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【答案】D

【详解】①当 $x>1$ 时，$x-1>0$，$f(x)=x-1+\dfrac{1}{x-1}+1\geq 2\sqrt{(x-1)\cdot\dfrac{1}{x-1}}+1=3$，当且仅当 $x-1=\dfrac{1}{x-1}$ 即 $x=2$ 时等号成立，所以 $f(x)$ 最小值是 3，正确；

②函数 $y=f(x+1)-1=x+1+\dfrac{1}{x+1-1}-1=x+\dfrac{1}{x}$，记 $g(x)=x+\dfrac{1}{x}$，其定义域是 $\{x\,|\,x\neq 0\}$，

$g(-x)=-x-\dfrac{1}{x}=-g(x)$，因此 $g(x)$ 是奇函数，正确；

③ $g(x)$ 的图象关于原点对称，把它向右平移一个单位，再向上平移一个单位得 $f(x)$ 的图象，因此 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,1)$ 对称，正确；

④ $f'(x)=1-\dfrac{1}{(x-1)^2}$，由 $f'(x)=0$ 得 $x=2$ 或 $x=0$，$f(2)=3$，$f(0)=-1$，

因此直线 $y=3$ 和 $y=-1$ 都是函数 $y=f(x)$ 图象的切线，④正确，

故选：D．

变式3． 已知定义域为 **R** 的函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$， $f\left(1-x\right)=f\left(1+x\right)$，当 $x\in\left(0,1\right]$ 时，

$f\left(x\right)=2\log_2 x-1$，则 $f\left(2023\right)$ 的值为（　）

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

【答案】C

【详解】因为 $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$， $f\left(1-x\right)=f\left(1+x\right)$，

所以 $f\left(2+x\right)=f\left(1+1+x\right)=f\left[1-\left(1+x\right)\right]=f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$，

所以 $f\left(4+x\right)=f\left(2+2+x\right)=-f\left(2+x\right)=f\left(x\right)$，所以 4 为函数 $f\left(x\right)$ 的周期，

所以 $f\left(2023\right)=f\left(4\times506-1\right)=f\left(-1\right)=-f\left(1\right)=-\left(2\log_2 1-1\right)=1$．故选：C．

易错题通关

1．已知函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 R， $f\left(-x\right)=-f\left(x\right),f\left(1-x\right)=f\left(1+x\right)$，当 $x\in\left[1,2\right)$ 时， $f\left(x\right)=x\ln x-1$，则 $f\left(2025\right)$ 的值为（　）

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

【答案】B

【详解】由 $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$ 可得函数 $f\left(x\right)$ 为奇函数，

又 $f\left(1-x\right)=f\left(1+x\right)$ 可知 $f\left(1-x\right)=f\left(1+x\right)=-f\left(x-1\right)$，

所以 $f\left(2+x\right)=-f\left(x\right)$， 可得 $f\left(4+x\right)=-f\left(2+x\right)$，

即 $f\left(4+x\right)=f\left(x\right)$， 因此 $f\left(x\right)$ 是周期为 4 的奇函数，

则 $f\left(2025\right)=f\left(506\times4+1\right)=f\left(1\right)$， 代入计算可得 $f\left(1\right)=0-1=-1$．

故选：B

2．定义在 **R** 上的奇函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f\left(x+1\right)$ 是偶函数，当 $x\in\left(0,1\right]$ 时， $f\left(x\right)=2\sin\frac{\pi}{2}x$， 则 $f\left(2024\right)=$（　）

A．-2　　B．-1　　C．0　　D．2

【答案】C

【详解】根据题意，函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$，且 $f(0)=0$，

又函数 $f(x+1)$ 是偶函数，则 $f(-x+1)=f(x+1)$，变形可得 $f(-x)=f(x+2)$，

则有 $f(x+2)=-f(x)$，进而可得 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，

所以函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，

则 $f(2024)=f(506\times4+0)=f(0)=0$.

故选：C.

3．已知函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域均为 R，$f(x+1)+g(x-2)=3$，$f(x-1)-g(-x)=1$，且 $g(-1)=2$，$g(x-1)$ 为偶函数，下列结论正确的是（　）

A．$f(x)$ 的周期为 4

B．$g(3)=1$

C．$\sum_{k=1}^{2024} f(k)=4048$

D．$\sum_{k=1}^{2024} g(k)=2024$

【答案】ACD

【详解】由于 $g(x-1)$ 为偶函数，图象关于 y 轴对称，

所以 $g(x)$ 图象关于 $x=-1$ 对称，

所以 $g(x-2)=g(-1+(x-1))=g(-1-(x-1))=g(-x)$，

所以 $f(x+1)+g(x-2)=f(x+1)+g(-x)=3$①，

而 $f(x-1)-g(-x)=1$②，

两式相加得 $f(x-1)+f(x+1)=4$，则 $f(x)+f(x+2)=4$③，

所以 $f(x+4)=f(x+2+2)=4-f(x+2)=4-(4-f(x))=f(x)$，

所以 4 是 $f(x)$ 的一个周期，A 选项正确.

由③令 $x=1$ 得 $f(1)+f(3)=4$，

由①令 $x=1$ 得 $f(2)+g(-1)=f(2)+2=3, f(2)=1$，

由②令 $x=1$ 得 $f(0)-g(-1)=f(0)-2=1, f(0)=3$，则 $f(4)=f(0)=3$，

所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=8$，

所以 $\sum_{k=1}^{2024} f(k)=\frac{2024}{4}\times8=4048$，C 选项正确.

由①令 $x=-1$ 得 $f(0)+g(1)=3+g(1)=3, g(1)=0$，

由 $f(x+1)+g(x-2)=3, f(x-1)-g(-x)=1$，

得 $f(x)+g(x-3)=3, f(x)-g(-x-1)=1$，

两式相减得 $g(x-3)+g(-x-1)=2$，即 $g(x-3)+g(x-1)=2$，

且 $g(x)$ 关于 $(-2,1)$ 对称，$g(-2)=1$，

所以 $g(x)+g(x+2)=2$④，

所以 $g(x+4)=g(x+2+2)=2-g(x+2)=2-(2-g(x))=g(x)$，

所以 $g(x)$ 是周期为 4 的周期函数，所以 $g(3)=g(-1)=2$，所以 B 选项错误.

由④令 $x=2$ 得 $g(2)+g(4)=2$，所以 $g(1)+g(2)+g(3)+g(4)=4$，

所以 $\sum_{k=1}^{2024} g(k)=\frac{2024}{4}\times 4=2024$，所以 D 选项正确.

故选：ACD.

4．已知函数 $f(x)$ 和其导函数 $g(x)$ 的定义域都是 R，若 $f(x)-x$ 与 $g(2x+1)$ 均为偶函数，则（　）

A．$f(0)=0$

B．$\frac{f(x)}{x}$ 关于点 $(0,1)$ 对称

C．$g(2023)=1$

D．$(g(1)-1)\times(g(2)+1)+(g(2)-1)\times(g(3)+1)+\cdots+(g(2023)-1)\times(g(2024)+1)=0$

【答案】BD

【详解】假设 $f(x)=1+x$，则 $f(x)-x=1$，$g(2x+1)=1$ 都为偶函数，则所设函数 $f(x)=1+x$ 符合题意，此时 $f(0)=1$，所以 A 错误；

因为 $f(x)-x$ 为偶函数，所以 $f(x)-x=f(-x)+x$，即 $\frac{f(x)}{x}+\frac{f(-x)}{-x}=2$，

令 $h(x)=\frac{f(x)}{x}$，则 $h(x)+h(-x)=2$，所以 $h(x)$ 关于点 $(0,1)$ 对称，故 B 正确；

因为 $g(2x+1)$ 均为偶函数，所以 $g(2x+1)=g(-2x+1)$，所以函数 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，即 $g(1+x)=g(1-x)$，

因为 $f(x)-x=f(-x)+x$，所以 $f'(x)-1=-f'(-x)+1$，所以 $g(x)+g(-x)=2$，

所以 $g(x+4)=g(x)$，$g(2023)=g(3)$，又 $g(-1)=g(3)$，$g(0)=g(4)$，

所以 $g(1)+g(3)=g(1)+g(-1)=2$，所以无法确定 $g(2023)$ 的值，所以 C 错误；

又 $g(2)+g(-2)=2$，$g(2)=g(-2)$，所以 $g(2)=g(-2)=0$，又 $g(4)=g(0)=1$，所以 $g(2)+g(4)=2$，