第五章 | 三角函数

5.1　任意角和弧度制

5.1.1　任意角

学习目标

1.通过角的概念的推广过程，培养数学抽象、直观想象的核心素养.

2.通过象限角及终边相同的角的应用，培养逻辑推理和数学运算的核心素养.

知识梳理·自主探究

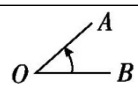
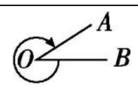
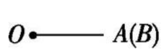
知识探究

1.角的概念与加减运算

(1)角的概念

①角的概念:角可以看成一条射线绕着它的端点旋转所成的图形.

②角的分类:按旋转方向可将角分为如下三类

名称	定义	图形
正角	按逆时针方向旋转形成的角	
负角	按顺时针方向旋转形成的角	
零角	一条射线没有做任何旋转形成的角	

③相等角:把角的概念推广到了任意角，包括正角、负角和零角.设角α由射线OA绕端点O旋转而成,角β由射线$O'A'$绕端点O'旋转而成.如果它们的旋转方向相同且旋转量相等，那么就称$\alpha=\beta$.

④相反角:射线绕其端点按不同方向旋转相同的量所成的两个角互为相反角.

(2)角的加减法运算

①设α，β是任意两个角.我们规定，把角α的终边旋转角β，这时终边所对应的角是$\alpha+\beta$.

②引入正角、负角的概念以后，角的减法运算可以转化为角的加法运算，即$\alpha-\beta$可以化为$\alpha+(-\beta)$.这就是说，各角和的旋转量等于各角旋转量的和.

2.象限角与终边相同的角

(1)象限角

角的顶点与坐标原点重合，角的始边与x轴的非负半轴重合，那么，角的终边在第几象限，就说这个角是第几象限角.如果角的终边在坐标轴上，就认为这个角不属于任何一个象限.

(2)终边相同的角

所有与角α终边相同的角,连同角α在内,可构成一个集合$S=\{\beta\mid\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in Z\}$，即任一与角$\alpha$终边相同的角，都可以表示成角$\alpha$与整数个周角的和.

师生互动·合作探究

探究点一　角的概念辨析

[例 1] 下列命题正确的是(　　)

A.第一象限的角一定不是负角

B.小于 90° 的角一定是锐角

C.钝角一定是第二象限的角

D.终边相同的角一定相等

解析:-300° 是第一象限角，且是负角，故选项 A 错误;-45°<90°，但-45° 不是锐角，故选项 B 错误;钝角的集合是{α|90°<α<180°}，是第二象限角，故选项 C 正确;-45° 与 315° 是终边相同的角，但不相等，故选项 D 错误.故选 C.

方法总结

判断角的概念问题的关键与技巧

(1)关键:正确理解象限角与锐角、直角、钝角、平角、周角等概念;

(2)技巧:判断命题为真需要证明,而判断命题为假只要举出反例即可.

针对训练 1:已知集合 A={第一象限角}，B={锐角}，C={小于 90° 的角}，则下面的关系正确的是(　　)

A. A=B=C　B. A⊆C

C. A∩C=B　D. B∪C⊆C

解析:第一象限角可表示为 $k\cdot 360°<\alpha<k\cdot 360°+90°$，$k\in Z$;锐角可表示为 $0°<\beta<90°$;小于 $90°$ 的角可表示为 $\gamma<90°$，由三者之间的关系可知，D 正确.故选 D.

探究点二 终边相同的角的理解

类型一 求与已知角终边相同的角

[例 2] 写出与 $370°23'$ 终边相同角的集合 S，并找出集合中适合不等式 $-720°\leqslant\beta<360°$ 的角 β.

解:根据题意得，

$S=\{\beta\mid\beta=k\cdot 360°+370°23',k\in Z\}$，

又因为 $-720°\leqslant\beta<360°$，所以 k 取-3，-2，-1，

所以所求的角 β 为 $-709°37'$，$-349°37'$，$10°23'$.

方法总结

在给定的区间内寻找与某特定角 α 终边相同角的方法

(1)设所求角 $\beta=k\cdot 360°+\alpha$ $(k\in Z)$，其中的 α 就是所给的角;

(2)根据所给的区间及 $k\cdot 360°+\alpha$ $(k\in Z)$，寻找符合条件的整数 k 的取值，确定 β.

针对训练 2:在与 $530°$ 角终边相同的角中，求满足下列条件的角.

(1)最大的负角;

(2)最小的正角;

(3)在 $[-720°,-360°)$ 内的角.

解:与 $530°$ 角终边相同的角为 $170°+k\cdot 360°$，$k\in Z$.

(1)当 k=-1 时，得到最大的负角为 170°-360°=-190°.

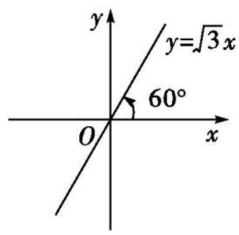
(2)当 k=0 时，得到最小的正角为 170°.

(3)当 k=-2 时，得到大于等于-720°，且小于-360°的角为

170°-2×360°=-550°.

类型二　终边在射线或直线上的角的集合

[例 3] 如图所示，写出终边落在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上的角的集合(用 0°到 360°间的角表示).



解:法一　由题图可知，终边落在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上的角 α 的集合是

$\{\alpha\mid\alpha=k\cdot360°+60°,k\in Z\}\cup\{\alpha\mid\alpha=k\cdot360°+180°+60°,k\in Z\}=\{\alpha\mid\alpha=k\cdot180°+60°,k\in Z\}$.

法二　根据题意，由 60°角按顺时针或逆时针每次旋转 180°，即可得到终边落在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上的角 α 的集合 $\{\alpha\mid\alpha=k\cdot180°+60°,k\in Z\}$.

方法总结

终边共线的角的写法

方法一:分别写出每条终边所代表的角的集合，然后取并集，在取并集时要化简合并.

方法二:直接根据角的旋转定义写出符合条件的角，这个方法适用于各角的终边恰好等分周角.

针对训练3:写出终边在直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上的角的集合.

解:法一　终边在射线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x(x\geqslant 0)$ 上的角的集合是 $S_1=\{\alpha\mid\alpha=30°+k\cdot 360°，k\in Z\}$;

终边在射线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x(x<0)$ 上的角的集合是 $S_2=\{\alpha\mid\alpha=210°+k\cdot 360°，k\in Z\}$.

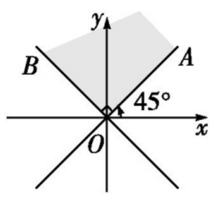
因此，终边落在直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上的角的集合是 $S=S_1\cup S_2=\{\alpha\mid\alpha=30°+k\cdot 360°，k\in Z\}\cup\{\alpha\mid\alpha=210°+k\cdot 360°，k\in Z\}=\{\alpha\mid\alpha=30°+k\cdot 180°，k\in Z\}$.

故终边落在直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上的角的集合为 $S=\{\alpha\mid\alpha=30°+k\cdot 180°，k\in Z\}$.

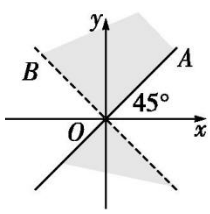
法二　取终边在射线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x(x\geqslant 0)$ 上的一个角 30°，由 30°角按顺时针或逆时针每次旋转 180°，即可得到终边落在直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上的角的集合 $S=\{\alpha\mid\alpha=30°+k\cdot 180°，k\in Z\}$.

类型三　区域角的表示

[例4] (1)试写出终边落在图中阴影部分(包括边界)的角的集合;



(2)试写出终边落在图中阴影部分的角的集合.



解:(1)终边落在射线 OA 上的角的集合为$\{\beta \mid \beta=45^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in Z\}$,

终边落在射线 OB 上的角的集合为$\{\gamma \mid \gamma=90^\circ+45^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in Z\}=\{\gamma \mid \gamma=135^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in Z\}$,

故阴影部分角的集合可表示为$\{\alpha \mid 45^\circ+k\cdot 360^\circ \leqslant \alpha \leqslant 135^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in Z\}$.

(2)法一　设终边落在阴影部分的角为α,角α的集合由两部分组成.

①$\{\alpha \mid 45^\circ+k\cdot 360^\circ \leqslant \alpha < 135^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in Z\}$;

②$\{\alpha \mid k\cdot 360^\circ+225^\circ \leqslant \alpha < k\cdot 360^\circ+315^\circ, k\in Z\}$,

所以角α的集合应当是集合①与②的并集:

$\{\alpha \mid 45^\circ+k\cdot 360^\circ \leqslant \alpha < 135^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in Z\}\cup\{\alpha \mid k\cdot 360^\circ+225^\circ \leqslant \alpha < k\cdot 360^\circ+315^\circ, k\in Z\}=\{\alpha \mid k\cdot 180^\circ+45^\circ \leqslant \alpha < k\cdot 180^\circ+135^\circ, k\in Z\}$.

法二　根据角的旋转的定义直接写出结果为

$\{\alpha \mid k\cdot 180^\circ+45^\circ \leqslant \alpha < k\cdot 180^\circ+135^\circ, k\in Z\}$.

方法总结

区域角是指终边落在坐标系的某个区域内的角.写出区域角的步骤如下

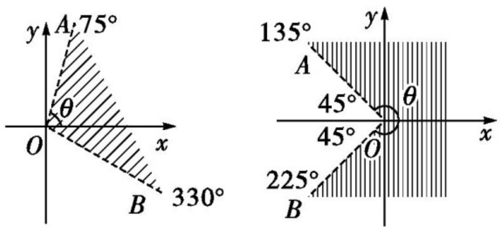
(1)确定边界线对应的角:确定起始和终止边界线分别对应的一个角α,β,$-360^\circ<\alpha<360^\circ$,$-360^\circ<\beta<360^\circ$;

(2)写出终边相同的角:边界线为射线时，终边相同的角为α+k·360°，β+k·360°，k∈Z;边界线为直线时，终边相同的角为α+k·180°，β+k·180°，k∈Z;

(3)写出角的集合:按逆时针旋转规则，从小到大写出角的集合.

提醒:在书写集合时，边界线是实线写成闭区间，边界线是虚线写成开区间;当右端点对应的0°～360°内的角小于左端点对应的0°～360°内的角时，左端点用相应的负角.

针对训练4:分别写出下面两个图形中，终边落在阴影部分内的角的集合(不包含边界).



解:图(1)中，330°=360°-30°，

所以所求角的集合为{θ|k·360°-30°<θ<k·360°+75°，k∈Z}.

图(2)中，225°=360°-135°，

所以所求角的集合为{θ|k·360°-135°<θ<k·360°+135°，k∈Z}.

类型四　判定nα或$\frac{\alpha}{n}$所在的象限

[例5] 若α是第二象限角，试分别确定2α，$\frac{\alpha}{2}$，$\frac{\alpha}{3}$的终边所在位置.

解:因为α是第二象限角，

所以90°+k·360°<α<180°+k·360°(k∈Z)，

所以 $180°+2k\cdot360°<2\alpha<360°+2k\cdot360°$ $(k\in Z)$，

所以 2α 的终边位于第三或第四象限或在 y 轴的非正半轴上.

法一　因为 $45°+k\cdot180°<\frac{\alpha}{2}<90°+k\cdot180°$ $(k\in Z)$，当 $k=2n(n\in Z)$ 时，

$45°+n\cdot360°<\frac{\alpha}{2}<90°+n\cdot360°$ $(n\in Z)$；

当 $k=2n+1(n\in Z)$ 时，

$225°+n\cdot360°<\frac{\alpha}{2}<270°+n\cdot360°$ $(n\in Z)$，

所以$\frac{\alpha}{2}$的终边位于第一或第三象限.

因为 $30°+k\cdot120°<\frac{\alpha}{3}<60°+k\cdot120°$ $(k\in Z)$，

当 $k=3n(n\in Z)$ 时，

$30°+n\cdot360°<\frac{\alpha}{3}<60°+n\cdot360°$ $(n\in Z)$；

当 $k=3n+1(n\in Z)$ 时，

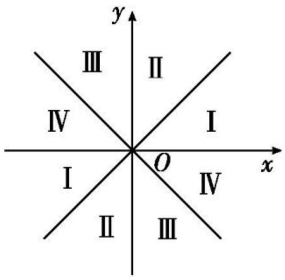
$150°+n\cdot360°<\frac{\alpha}{3}<180°+n\cdot360°$ $(k\in Z)$；

当 $k=3n+2(n\in Z)$ 时，

$270°+n\cdot360°<\frac{\alpha}{3}<300°+n\cdot360°$ $(n\in Z)$，

所以$\frac{\alpha}{3}$的终边位于第一或第二或第四象限.

法二　将坐标系的每个象限二等分，得到 8 个区域.自 x 轴正向按逆时针方向把每个区域依次标上Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，如图所示.


y
Ⅲ
Ⅱ
Ⅳ
Ⅰ
O
x
Ⅰ
Ⅳ
Ⅱ
Ⅲ