5.4 数列的应用

趣味情景导学

我们知道，当偿还银行贷款时，需要将本金和利息一起偿还．分期还款是一种很常见的还款方式，其本质是将本金和利息分摊到每一期偿还．目前，常见的分期还款方式有“等额本金还款法”“等额本息还款法”．你能根据这两种还款方式的名称猜出它们的不同吗？

能否用我们学习的数列知识解决呢？这节课我们一起探讨一下吧.

学习目标定位

1. 理解分期还款中“等额本金还款法”和“等额本息还款法”的概念及计算方式；（重点）

2. 会利用等差数列、等比数列的通项公式及前n项和公式解决分期付款和政府支出的“乘数”效应等问题.（重点、难点）

问题导学探究

探究点1：分期还款与数列

“等额本金还款法”：将本金平均分配到每一期进行偿还，每期还款分为本金和利息两部分.

$$\text{每期还款金额}=\frac{\text{贷款本金}}{\text{还款期数}}+(\text{贷款本金}-\text{已还本金总额})\times\text{利率}$$

本金

利息

例 1.自主创业的大学生张华向银行贷款200000元租赁了一处经营场所，因为预计前期经营状况会比较好，张华跟银行约定按照“等额本金还款法” 分10年进行还款，贷款的年利率为5%，设第n 年张华的还款金额为a_n元，求出a_n的表达式，并说出数列$\{a_n\}$的特征.

分析： 贷款本金：200000元；还款期数：10年；利率：5%.

$$\text{每期还款金额}=\frac{\text{贷款本金}}{\text{还款期数}}+(\text{贷款本金}-\text{已还本金总额})\times\text{利率}$$

解：每期所还本金为 $\frac{200000}{10}=20000$(元)，

第1期还款金额$a_1=20000+200000\times5\%=30000$(元).

第2期还款金额a_2 $=20000+[200000-20000]\times5\%=29000$(元)，

第3期还款金额a_3 $=20000+[200000-20000\times2]\times5\%=28000$(元)，

……

第n期还款金额a_n = $20000+[200000-20000(n-1)]\times5\%=-1000n+29000$.

可以看出，$\{a_n\}$是一个递减的等差数列.

【总结】

思考：如果向银行贷款本金A_0元，打算分成m期偿还，并且每一期的利率为$r(r>0)$，记每期还款的钱数构成的数列为$a_1, a_2, \ldots a_m$，用“等额本金还款法”，你能写出第n期所要还的钱数a_n的表达式吗?

每期还款金额$=\dfrac{\text{贷款本金}}{\text{还款期数}}+$(贷款本金-已还本金总额)×利率

$$a_n=\frac{A_0}{m}+\left[A_0-\frac{A_0}{m}(n-1)\right]\times r$$

等差数列问题

"等额本息还款法"： 将本金和利息平均分配到每一期进行偿还，因此每一期所还的钱数相等，即

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_m$$

每一期的还款钱数怎么计算呢?我们举个例子来分析一下：

问题：假设你现在手中有1000元钱，而且你打算一年以后再使用这笔钱，那么一年以后这笔钱所能买到的东西价值最多只能是1000元吗？为什么？

将钱存入银行中，假设一年定期的存款利率为5%，不计利息税，则一年后的本息和为$1000(1+5\%)=1050$(元)，即一年后可以买到价值1050元的东西，换句话说现在的1000元相当于一年后的1050元.

类似地，如果记现在的A_0元相当于n年后的A元，银行存款的年利率为$r(r>0)$且每年结算一次利息（不计利息税，下同）则

$$A_0(1+r)^n=A$$，即

$$\boxed{A_0=\frac{A}{(1+r)^n}}$$

经济学上，一般称A_0为A的现值，而A为A_0的未来值.

现在的钱

涨了利息后的钱

思考： 如果向银行贷款本金A_0元，打算分成m期偿还，并且每一期的利率为$r(r > 0)$，记每期还款的钱数构成的数列为$a_1, a_2, \dots a_m$，用“等额本息还款法”，你能写出第n期所要还的钱数a_n的表达式吗？

分析： 本金A_0元，分成m期偿还，每一期的利率为r.

设每一期所还钱数均为x元，即未来值是x，则

第1期所还钱的现值为 $\frac{x}{1+r}$ 元，

第2期所还钱的现值为 $\frac{x}{(1+r)^2}$ 元，

……

第 m期所还钱的现值为 $\frac{x}{(1+r)^m}$ 元.

$$A_0 = \frac{A}{(1+r)^n}$$

最后还款的现值总和为A_0元，因此

$$\frac{x}{1+r}+\frac{x}{(1+r)^2}+\dots+\frac{x}{(1+r)^m}=A_0$$

又因为$r>0$，所以由等比数列前n项和公式可解得

$$x=\frac{A_0 r(1+r)^m}{(1+r)^m-1}$$