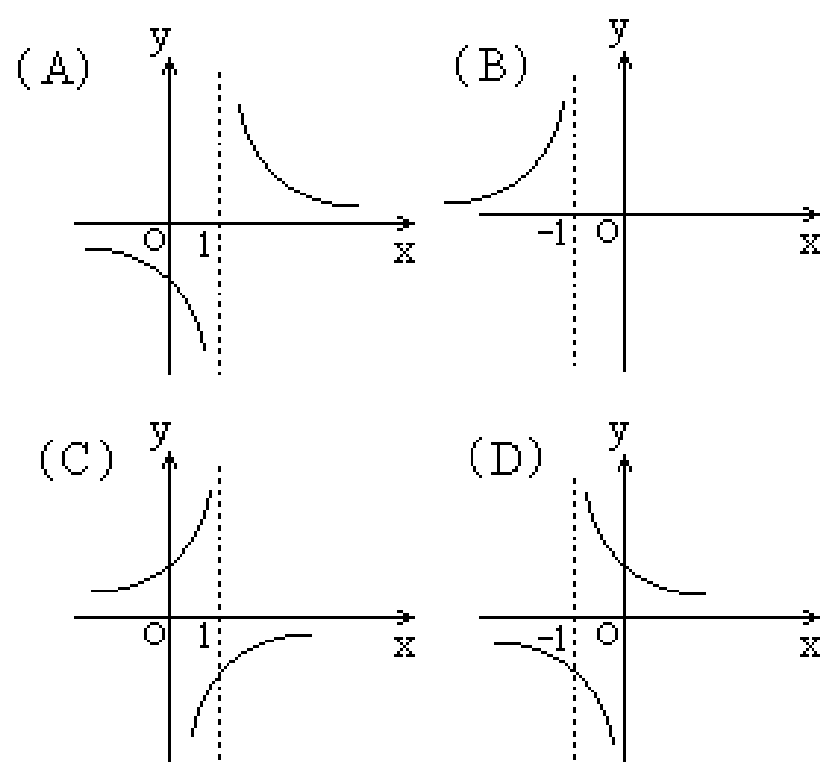


1995 年全国普通高等学校招生统一考试
数学试卷

1. 已知 I 为全集, 集合 $M, N \subseteq I$, 若 $M \cap N = N$, 则

- A. $\overline{M} \subseteq \overline{N}$ B. $M \subseteq \overline{N}$ C. $\overline{M} \subseteq N$ D. $M \subseteq \overline{N}$

2. 函数 $y = \frac{1}{x-1}$ 的图象是

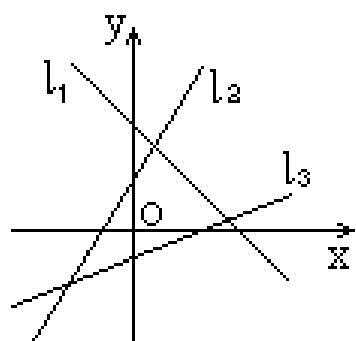


3. 函数 $y = 4\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 3\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期是

- A. 6 B. 2 C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

4. 正方体的全面积是 a^2 , 它的顶点都在球面上, 这个球的表面积是

- A. $\frac{a^2}{3}$ B. $\frac{a^2}{2}$ C. $2a^2$ D. $3a^2$



5. 若图中的直线 l_1, l_2, l_3 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 , 则

- A. $k_1 < k_2 < k_3$ B. $k_3 < k_1 < k_2$ C. $k_3 < k_2 < k_1$ D. $k_1 < k_3 < k_2$

6. 在 $(1-x^3)(1+x)^{10}$ 的展开式中, x^5 的系数是

- A. -297 B. -252 C. 297 D. 207

7.使 $\arcsin x > \arccos x$ 成立的 x 的取值范围是

- A. $(0, \frac{\sqrt{2}}{3}]$ B. $(\frac{\sqrt{2}}{3}, 1]$ C. $[1, \frac{\sqrt{2}}{3})$ D. $[1, 0)$

8.双曲线 $3x^2 - y^2 = 3$ 的渐近线方程是

- A. $y = 3x$ B. $y = \frac{1}{3}x$ C. $y = \sqrt{3}x$ D. $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

9.已知 θ 是第三象限角,且 $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta = \frac{5}{9}$,则 $\sin 2\theta$ 等于

- A. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $-\frac{2}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

10.已知直线 $l \perp$ 平面 α ,直线 $m \subset$ 平面 β ,有下面四个命题:

- ① $l // m$ ② $l \perp m$ ③ $l // \beta$ ④ $l \perp \beta$

其中正确的两个命题是

- A. ①与② B. ③与④ C. ②与④ D. ①与③

11.已知 $y = \log_a(2 - ax)$ 在 $[0, 1]$ 上是 x 的减函数,则 a 的取值范围是

- A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$ C. $(0, 2)$ D. $[2, +\infty)$

12.等差数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 与 T_n ,若 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{2n}{3n-1}$,则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ 等于

- A. 1 B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{4}{9}$

13.用1, 2, 3, 4, 5这五个数字,组成没有重复数字的三位数,其中偶数共有

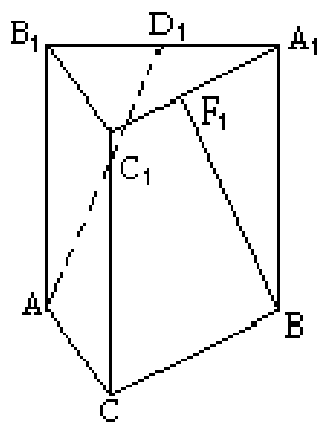
- A. 24 B. 30 C. 40 D. 60

14.在极坐标系中,椭圆的二焦点分别在极点和点 $(2c, 0)$,离心率为 e ,则它的极坐标方程是

- A. $\frac{c(1-e)}{1-ecos\theta}$ B. $\frac{c(1-e^2)}{1-ecos\theta}$ C. $\frac{c(1-e)}{e(1-ecos\theta)}$ D. $\frac{c(1-e^2)}{e(1-ecos\theta)}$

15.如图, $A_1B_1C_1-ABC$ 是直三棱柱, $\angle BCA = 90^\circ$, 点 D_1, F_1 分别是 A_1B_1, A_1C_1 的

中点,若 $BC = CA = CC_1$,则 BD_1 与 AF_1 所成的角的余弦值是



- A. $\frac{\sqrt{30}}{10}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{30}}{15}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{10}$

16. 不等式 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-8} \geq 3^{2x}$ 的解集是 _____

17. 已知圆台上、下底面圆周都在球面上,且下底面过球心,母线与底面所成的角

为 $\frac{\pi}{3}$, 则圆台的体积与球体积之比为 _____.

18. 函数 $y = \sin x - \frac{1}{6} \cos x$ 的最小值 _____

19. 直线 l 过抛物线 $y^2 = a(x+1)$ ($a > 0$) 的焦点,并且与 x 轴垂直,若 l 被抛物线截得的线段长为 4,则 $a =$ _____.

20. 四个不同的小球放入编号为 1, 2, 3 的四个盒中,则恰有一个空盒的放法共有 _____ 种 (用数字作答).

21. (本小题满分 7 分)

在复平面上,一个正方形的四个顶点按照逆时针方向依次为 $z_1, z_2, z_3, 0$

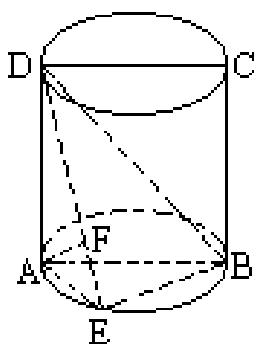
(其中 0 为原点),已知 z_2 对应复数 $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$,求 z_1 和 z_3 对应的复数。

22. (本小题满分 10 分)

求 $\sin^2 20^\circ + \cos^2 50^\circ + \sin 20^\circ \cos 50^\circ$ 的值.

23. (本小题满分 12 分)

如图,圆柱的轴截面 $ABCD$ 是正方形,点 E 在底面的圆周上, $AF \perp DE$, F 是垂足.



(1) 求证: $AF \perp DB$;

(2) 如果圆柱与三棱锥 $D-ABE$ 的体积的比等于 3π ,求直线 DE 与平面 $ABCD$ 所成的角.

24. 本小题满分12分)

某地为促进淡水鱼养殖业的发展,将价格控制在适当范围内,决定对淡水鱼养殖提供政府补贴.设淡水鱼的市场价格为 x 元/千克,政府补贴为 t 元/千克.根据市场调查,当 $8 \leq x \leq 14$ 时,淡水鱼的市场日供应量 P 千克与市场日需求量 Q 千克近似地满足关系:

$$P = 1000(x - t + 8) \quad (x \geq 8, t \geq 0),$$

$$Q = 500\sqrt{40 - (x - 8)^2} \quad (8 \leq x \leq 14)$$

当 $P=Q$ 时市场价格称为市场平衡价格 .

(1)将市场平衡价格表示为政府补贴的函数,并求出函数的定义域;

(2)为使市场平衡价格不高于每千克10元,政府补贴至少为每千克多少元?

25. 本小题满分12分)

设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列, S_n 是其前 n 项和.

(1)证明 $\frac{\lg S_n + \lg S_{n-2}}{2} = \lg S_{n-1};$

(2)是否存在常数 $c > 0$,使得

$$\frac{\lg S_n + c + \lg S_{n-2} + c}{2} = \lg S_{n-1} + c$$

成立?并证明你的结论.

26. 本小题满分12分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{16} = 1$, 直线 $l: \frac{x}{12} + \frac{y}{8} = 1$, P 是 l 上一点, 射线 OP 交椭圆于点 R , 又点

Q 在 OP 上且满足 $|OQ| \cdot |OP| = |OR|^2$.当点 P 在 l 上移动时,求点 Q 的轨迹方程,并说明轨迹是什么曲线.

>试题答案<

1. C2. B3. C4. B5. D6. D7. B8. C9. A10. D11. B12. C13. A14. D15. A

16. (2, 4) 17. $\frac{7\sqrt{3}}{32}$ 18. $\frac{3}{4}$

19. 4 20. 144

21. 本小题主要考查复数基本概念和几何意义,以及运算能力.

解:设 Z_1, Z_3 对应的复数分别为 z_1, z_3 ,依题设得

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} z_2 [\cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4})]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \sqrt{3}i) (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}i$$

$$z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} z_2 (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \sqrt{3}i) (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

22.

本小题主要考查三角恒等式和运算能力
解：

$$\text{原式} = \frac{1}{2} (1 + \cos 40^\circ) + \frac{1}{2} (1 + \cos 100^\circ) + \sin 20^\circ \cos 50^\circ$$

$$= 1 + \frac{1}{2} (\cos 100^\circ + \cos 40^\circ) + \frac{1}{2} (\sin 70^\circ + \sin 30^\circ)$$

$$= \frac{3}{4} + \sin 70^\circ + \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \sin 70^\circ$$

$$= \frac{3}{4}$$

23.

本小题主要考查空间线面关系、圆柱性质、空间想象能力和逻辑推理能力。

(1)证明:根据圆柱性质, $DA \perp$ 平面ABE.

∵ EB ⊂ 平面ABE

∴ $DA \perp EB$.

∵ AB 是圆柱底面的直径,点E在圆周上,

∴ $AE \perp EB$, 又 $AE \cap AD = A$,

故得 $EB \perp$ 平面DAE.

∵ AF ⊂ 平面DAE

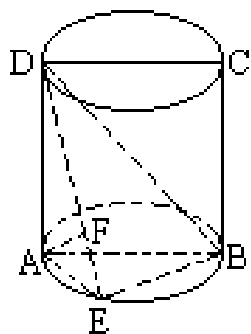
∴ $EB \perp AF$.

又 $AF \perp DE$, 且 $EB \cap DE = E$,

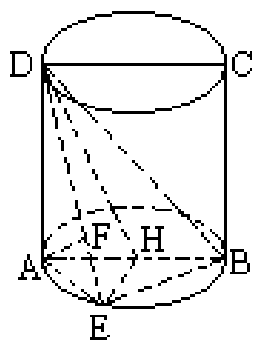
故得 $AF \perp$ 平面DEB.

∵ DB ⊂ 平面DEB

∴ $AF \perp DB$.



(2)解:过点E作EH ⊥ AB, H 是垂足,连结DH. 根据圆柱性质,平面ABCD ⊥ 平面ABE, AB 是交线.且EH ⊂ 平面ABE, 所以EH ⊥ 平面ABCD.



又DH ⊥ 平面ABCD, 所以DH 是ED 在平面ABCD 上的射影,从而∠EDH 是DE 与平面ABCD 所成的角.

设圆柱的底面半径为R, 则DA=AB=2R, 于是

$$V_{\text{圆柱}} = 2\pi R^3,$$

$$V_{D-ABE} = \frac{1}{3} AD \cdot S_{\triangle ABE} = \frac{2R^2}{3} \cdot EH$$

由 $V_{\text{圆柱}} : V_{D-ABE} = 3\pi$, 得EH=R, 可知H 是圆柱底面的圆心,

$$AH=R,$$

$$DH = \sqrt{DA^2 - AH^2} = \sqrt{5}R,$$

$$\angle EDH = \arccot \frac{DH}{EH} = \arccot \sqrt{5}$$

24.

本小题主要考查运用所学数学知识和方法解决实际问题的能力,以及函数的概念、方程和不等式的解法等基础知识和方法

解:(1)依题设有

$$1000(x-t-8) = 500\sqrt{40-(x-8)^2}$$

$$\text{化简得 } 5x^2 + (8t-80)x + (4t^2 - 64t + 280) = 0.$$

当判别式 $\Delta = 800 - 16t^2 \geq 0$ 时,

$$\text{可得 } x = 8 - \frac{4}{5}t \pm \frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}$$

由 $\Delta \geq 0, t \geq 0, 8 \leq x \leq 14$, 得不等式组:

$$(1) \quad 8 - 8 - \frac{4}{5}t \pm \frac{2}{5}\sqrt{50-t^2} \leq 14$$

$$(2) \quad 8 - 8 - \frac{4}{5}t \pm \frac{2}{5}\sqrt{50-t^2} \geq 14$$

解不等式组①, 得 $0 \leq t \leq \sqrt{10}$, 不等式组②无解. 故所求的函数关系式为

$$x = 8 - \frac{4}{5}t - \frac{2}{5}\sqrt{50 - t^2}$$

函数的定义域为 $[0, \sqrt{10}]$

(2)为使 $x \leq 10$, 应有

$$8 - \frac{4}{5}t - \frac{2}{5}\sqrt{50 - t^2} \leq 10$$

化简得 $t^2 + 4t - 5 \geq 0$.

解得 $t \geq 1$ 或 $t \leq -5$, 由 $t \geq 0$ 知 $t \geq 1$. 从而政府补贴至少为每千克1元.

25.

本小题主要考查等比数列、对数、不等式等基础知识,考查推理能力以及分析问题和解决问题的能力.

(1)证明:设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由题设 $a_1 > 0, q > 0$.

(i)当 $q=1$ 时, $S_n = na_1$, 从而

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-2} - S_{n-1}^2 \\ = na_1 - (n-2)a_1 - (n-1)^2 a_1^2 \\ = a_1^2 \geq 0 \end{aligned}$$

(ii)当 $q \neq 1$ 时, $S_n = \frac{a_1(1-q^{n+1})}{1-q}$ 从而

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-2} - S_{n-1}^2 \\ = \frac{a_1^2(1-q^{n+1}) - (1-q^{n-1})^2}{(1-q)^2} - \frac{a_1^2(1-q^{n+1})^2}{(1-q)^2} \\ = a_1^2 q^n \geq 0 \end{aligned}$$

由 (i) 和 (ii) 得 $S_n \cdot S_{n+2} < S_{n+1}^2$. 根据对数函数的单调性, 知

$$\begin{aligned} \lg \frac{S_n - S_{n-2}}{2} &< \lg S_{n-1}^2 \\ \lg S_n - \lg S_{n-2} &< 2 \lg S_{n-1} \end{aligned}$$

即 $\frac{\lg S_n - \lg S_{n-2}}{2} < \lg S_{n-1}$

(2)解:不存在.

证明一:要使

$$\frac{\lg(S_n - c) - \lg(S_{n-2} - c)}{2} = \lg(S_{n-1} - c)$$

成立, 则有

$$\begin{aligned} (S_n - c)(S_{n-2} - c) &= (S_{n-1} - c)^2 \quad (1) \\ (S_n - c) &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

分两种情况讨论:

(i)当 $q=1$ 时,

$$\begin{aligned} & (S_n - c)(S_{n+2} - c) - (S_{n+1} - c)^2 \\ &= (na_1 - c)[(n+2)a_1 - c] - [(n+1)a_1 - c]^2 \\ &= -a_1^2 < 0. \end{aligned}$$

可知,不满足条件①,即不存在常数 $c > 0$,使结论成立.

(i)当 $q \neq 1$ 时,若条件①成立,因为

$$\begin{aligned} & (S_n - c)(S_{n+2} - c) - (S_{n+1} - c)^2 \\ &= \left[\frac{a_1(1 - q^{n+1})}{1 - q} - c \right] \left[\frac{a_1(1 - q^{n+3})}{1 - q} - c \right] - \left[\frac{a_1(1 - q^{n+2})}{1 - q} - c \right]^2 \\ &= -a_1 q^n [a_1 - c(1 - q)], \end{aligned}$$

且 $a_1 q^n \neq 0$,故只能有 $a_1 - c(1 - q) = 0$,即 $c = a_1 / (1 - q)$

此时,因为 $c > 0, a_1 > 0$,所以 $0 < q < 1$.

但 $0 < q < 1$ 时, $S_n = \frac{a_1}{1 - q} - \frac{a_1 q^{n+1}}{1 - q} > 0$, 不满足条件(2)即不存在常数 $c > 0$,使结论成立。

综合(i) (ii)同时满足条件①、②的常数 $c > 0$ 不存在,即不存在常数 $c > 0$,使

$$\frac{\lg(S_n - c) + \lg(S_{n+2} - c)}{2} \geq \lg(S_{n+1} - c)$$

证法二:用反证法,假设存在常数 $c > 0$,使

$$\frac{\lg(S_n - c) + \lg(S_{n+2} - c)}{2} \geq \lg(S_{n+1} - c)$$

则有

$$S_n - c \geq 0 \quad (1)$$

$$S_{n+1} - c \geq 0 \quad (2)$$

$$S_{n+2} - c \geq 0 \quad (3)$$

$$(S_n - c)(S_{n+2} - c) \geq (S_{n+1} - c)^2 \quad (4)$$

由④得

$$S_n S_{n+2} - S_{n+1}^2 = c(S_n + S_{n+2} - 2S_{n+1}) \quad (5)$$

根据平均值不等式及①、②、③、④知

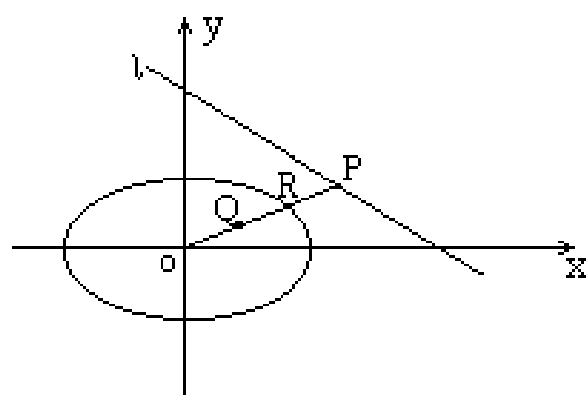
$$S_n + S_{n+2} - 2S_{n+1}$$

$$= (S_n - c) + (S_{n+2} - c) - 2(S_{n+1} - c)$$

$$2\sqrt{(S_n - c)(S_{n+2} - c)} - 2(S_{n+1} - c) \geq 0$$

因为 $c>0$,故⑤式右端非负,而由(1)知,⑤式左端小于零,矛盾.故不存在常数 $c>0$,使26.

本小题主要考查直线、椭圆的方程和性质,曲线与方程的关系,轨迹的概念和求法,利用方程判定曲线的性质等解析几何的基本思想和综合运用知识的能力.



解法一:由题设知点Q不在原点.设P、R、Q的坐标分别为 (x_P, y_P) ,

(x_R, y_R) , (x, y) ,其中 x, y 不同时为零.

当点P不在y轴上时,由于点R在椭圆上及点O、Q、R共线,得方程组

$$\begin{cases} \frac{x_R^2}{24} + \frac{y_R^2}{16} = 1 \\ \frac{y_R}{x_R} = \frac{y}{x} \end{cases}$$

解得

$$x_R^2 = \frac{48x^2}{2x^2 + 3y^2} \quad (1)$$

$$y_R^2 = \frac{48y^2}{2x^2 + 3y^2} \quad (2)$$

由于点P在直线l上及点O、Q、P共线,得方程组

$$\begin{cases} \frac{x_P}{12} + \frac{y_P}{8} = 1 \\ \frac{y_P}{x_P} = \frac{y}{x} \end{cases}$$

解得

$$x_P = \frac{24x}{2x + 3y} \quad (3)$$

$$y_P = \frac{24y}{2x + 3y} \quad (4)$$

当点P在y轴上时,经验证①-④式也成立.

由题设 $|OQ| \cdot |OP| = |OR|^2$,得

$$\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x_P^2 + y_P^2} = (\sqrt{x_R^2 + y_R^2})^2$$

将①-④代入上式,化简整理得

$$\sqrt{\frac{24(x^2 - y^2)^2}{(2x - 3y)^2}} = \frac{48(x^2 - y^2)}{2x^2 - 3y^2}$$

因 x 与 x_p 同号或 y 与 y_p 同号,以及③、④知 $2x+3y>0$,故点 Q 的轨迹方程为

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{5}{2}} + \frac{(y-1)^2}{\frac{5}{3}} = 1 \quad (\text{其中 } x, y \text{ 不同时为零})$$

所以点 Q 的轨迹是以 $(1, 1)$ 为中心,长、短半轴分别为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 和 $\frac{\sqrt{15}}{3}$ 且长轴与 x 轴平行的椭圆、去掉坐标原点.

解法二:由题设知点 Q 不在原点.设 P, R, Q 的坐标分别为 $(x_p, y_p), (x_R, y_R), (x, y)$ 其中 x, y 不同时为零.

设 OP 与 x 轴正方向的夹角为 α ,则有

$$x_p = |OP| \cos \alpha, y_p = |OP| \sin \alpha;$$

$$x_R = |OR| \cos \alpha, y_R = |OR| \sin \alpha;$$

$$x = |OQ| \cos \alpha, y = |OQ| \sin \alpha;$$

由上式及题设条件 $|OQ| \cdot |OP| = |OR|^2$,得

$$\frac{x_p}{x} = \frac{|OP|}{|OQ|} \quad (1)$$

$$\frac{y_p}{y} = \frac{|OP|}{|OQ|} \quad (2)$$

$$\frac{x_p^2}{x^2} = \frac{|OP|^2}{|OQ|^2} \quad (3)$$

$$\frac{y_p^2}{y^2} = \frac{|OP|^2}{|OQ|^2} \quad (4)$$

由点 P 在直线 l 上,点 R 在椭圆上,得方程组

$$\frac{x_p}{12} + \frac{y_p}{8} = 1 \quad (5)$$

$$\frac{x_R^2}{24} + \frac{y_R^2}{16} = 1 \quad (6)$$

将①,②,③,④代入⑤,⑥,整理得点 Q 的轨迹方程为

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{5}{2}} + \frac{(y-1)^2}{\frac{5}{3}} = 1 \quad (\text{其中 } x, y \text{ 不同时为零})$$

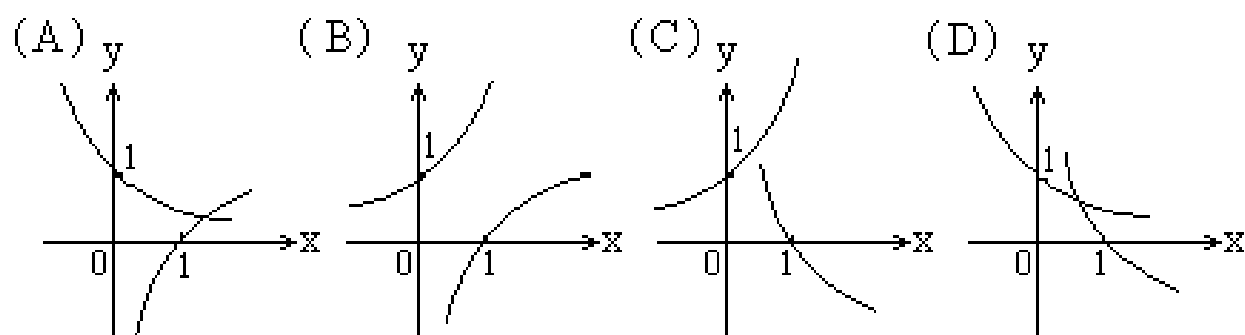
与 x 轴平行的椭圆、去掉坐标原点.

1996 年全国普通高等学校招生统一考试
数学试卷(理)

(1)已知全集 $I = \mathbb{N}$, 集合 $A = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 4n, n \in \mathbb{N}\}$, 则

- (A) $I = A \cup B$ (B) $I = \overline{A} \cup B$ (C) $I = A \cup \overline{B}$ (D) $I = \overline{A} \cup \overline{B}$

(2)当 $a > 1$ 时, 在同一坐标系中, 函数 $y = a^{-x}$ 与 $y = \log_a x$ 的图象是



(3)若 $\sin^2 x > \cos^2 x$, 则 x 的取值范围是

- (A) $\{x \mid 2k\pi - \frac{3}{4}\pi < x < 2k\pi - \frac{1}{4}\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
 (B) $\{x \mid 2k\pi - \frac{1}{4}\pi < x < 2k\pi + \frac{5}{4}\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
 (C) $\{x \mid k\pi - \frac{1}{4}\pi < x < k\pi + \frac{3}{4}\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
 (D) $\{x \mid 2k\pi - \frac{1}{4}\pi < x < k\pi + \frac{3}{4}\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

(4)复数 $\frac{(2 - 2i)^4}{(1 - \sqrt{3}i)}$ 等于

- (A) $1 - \sqrt{3}i$ (B) $1 + \sqrt{3}i$ (C) $1 - \sqrt{3}i$ (D) $1 + \sqrt{3}i$

(5)如果直线 l, m 与平面 α, β, γ 满足: $l = \beta \cap \gamma, l \not\subset \alpha, m \subset \alpha$ 和 $m \perp \gamma$ 那么必有

- (A) $\alpha \perp \gamma$ 且 $l \perp m$ (B) $\alpha \perp \gamma$ 且 $m \parallel \beta$
 (C) $m \parallel \beta$ 且 $l \perp m$ (D) $\alpha \parallel \beta$ 且 $\alpha \perp \gamma$

(6)当 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, 函数 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ 的

- (A) 最大值是 1, 最小值是 -1
 (B) 最大值是 1, 最小值是 $-\frac{1}{2}$
 (C) 最大值是 2, 最小值是 -2
 (D) 最大值是 2, 最小值是 -1

(7)椭圆 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$ 的两个焦点坐标是 (B)

- (A) $(-3, 5), (-3, -5)$ (B) $(3, 3), (3, -5)$
 (C) $(1, 1), (-7, 1)$ (D) $(7, -1), (-1, -1)$

(8)若 $0 < a < \frac{\pi}{2}$, 则 $\arcsin[\cos(\frac{\pi}{2} - a)] - \arccos[\sin(\frac{\pi}{2} - a)]$ 等于

- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{2} - 2a$ (C) $\frac{\pi}{2} + 2a$ (D) $\frac{\pi}{2} - 2a$

(9)将边长为a的正方形ABCD沿对角线AC折起,使得BD=a,则三棱锥D-ABC的体积为

- (A) $\frac{a^3}{6}$ (B) $\frac{a^3}{12}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

(10)等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = -1$, 前n项的和为 S_n , 若 $\frac{S_{10}}{S_5} = \frac{31}{32}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 等于

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $-\frac{2}{3}$ (C) 2 (D) -2

(11)椭圆的极坐标方程为 $\frac{3}{2 - \cos \theta}$, 则它在短轴上的两个顶点的极坐标是

- (A) $(3, 0)$ $(1, \pi)$ (B) $(\sqrt{3}, \frac{\pi}{2})$ $(\sqrt{3}, \frac{3\pi}{2})$
 (C) $(2, \frac{\pi}{3})$ $(2, \frac{5\pi}{3})$ (D) $(\sqrt{7}, \arctg \frac{\sqrt{3}}{2})$ $(\sqrt{7}, 2\pi - \arctg \frac{\sqrt{3}}{2})$

(12)等差数列 $\{a_n\}$ 的前m项和为30, 前2m项和为100, 则它的前3m项和为

- (A) 130 (B) 170 (C) 210 (D) 260

(13)设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < a < b$) 的半焦距为c, 直线l过两点 $(a, 0)$ $(0, b)$ 已知原点到直线l的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{4}c$, 则双曲线的离心率为

- (A) 2 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(14)母线长为1的圆锥体积最大时,其侧面展开图圆心角 ψ 等于

- (A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

(15)设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数, $f(x+2) = f(x)$, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = x$, 则 $f(7.5)$ 等于

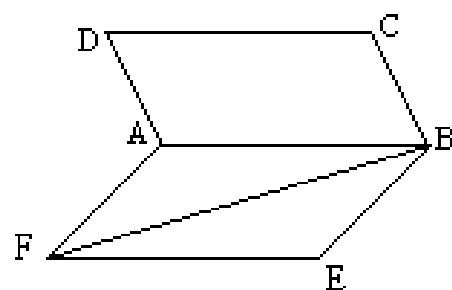
- (A) 0.5 (B) -0.5
 (C) 1.5 (D) -1.5

(16)已知圆 $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$ 与抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的准线相切, 则 $P =$ _____.

(17)正六边形的中心和顶点共7个点,以其中3个点为顶点的三角形共有_____个(用数字作答).

(18) $\operatorname{tg}20^\circ + \operatorname{tg}40^\circ + \sqrt{3} \operatorname{tg}20^\circ \operatorname{tg}40^\circ$ 的值是_____

(19)如图,



正方形ABCD 所在平面与正方形ABEF 所在平面成 60° 的二面角,则异面直线AD 与BF 所成角的余弦值是_____

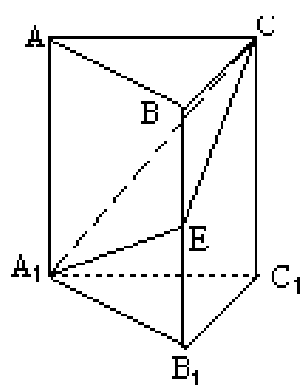
(20)解不等式 $\log_a \left(1 - \frac{1}{x}\right) > 1$.

(21)已知 $\triangle ABC$ 的三个角A , B , C 满足 $A+C=2B$, $\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos A} = \frac{\sqrt{2}}{\cos B}$,求 $\cos \frac{A+C}{2}$ 的值

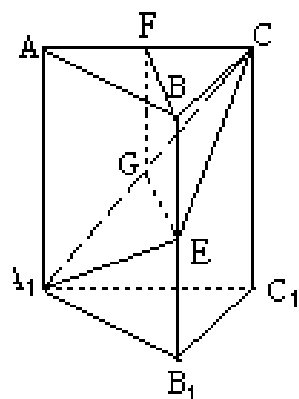
(22)如图,在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $E \in BB_1$, 截面 $A_1EC \perp$ 侧面 AC_1 .

(I)求证: $BE=EB_1$;

(II)若 $AA_1=A_1B_1$;求平面 A_1EC 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成二面角(锐角)的度数.



注意:在下面横线上填写适当内容,使之成为(I)的完整证明,并解答(II).



23.某地现有耕地10000公顷,规划10年后粮食单产比现在增加22%, 人均粮食占有量比现在提高10%. 如果人口年增长率为1%, 那么耕地平均每年至多只能减少多少公顷 (精确到1公顷)?

($\frac{\text{粮食单产}}{\text{耕地面积}}$, 人均粮食占有量 $\frac{\text{总产量}}{\text{总人口数}}$)

(24)已知 l_1 、 l_2 是过点 $P(-\sqrt{2}, 0)$ 的两条互相垂直的直线，且 l_1 、 l_2 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 各有两个交点，分别为 A_1 、 B_1 和 A_2 、 B_2

(I求 l_1 的斜率 k_1 的取值范围；

(II若 $|A_1B_1|=\sqrt{5}|A_2B_2|$ ，求 l_1 、 l_2 的方程

(24)本小题主要考查直线与双曲线的性质,解析几何的基本思想,以及综合运用知识的能力.满分12分.

25.已知 a 、 b 、 c 是实数,函数 $f(x)=ax^2+bx+c$, $g(x)=ax+b$,当 $-1\leq x\leq 1$ 时, $|f(x)|\leq 1$.

(I)证明: $|c|\leq 1$;

(II)证明:当 $-1\leq x\leq 1$ 时, $|g(x)|\leq 2$;

(III)设 $a>0$,当 $-1\leq x\leq 1$ 时, $g(x)$ 的最大值为2,求 $f(x)$.

>试题答案<

1. C

2. A

3. D

4. B

5. A

6. D

8. A

9. D

10. B

11. C

12. C

13. A

14. D

15. B

16. 2

17. 32

18. $\sqrt{3}$

19. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

20.

本小题考查对数函数性质,对数不等式的解法,分类讨论的方法和运算能力.满

分11分.

解: (I) 当 $a > 1$ 时, 原不等式等价于不等式组:

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{x} \geq 0 \\ 1 - \frac{1}{x} \leq a \end{cases} \quad 2\text{分}$$

由此得 $1 - a \leq \frac{1}{x}$

因为 $1 - a < 0$, 所以 $x < 0$,

$$\frac{1}{1 - a} \leq x < 0 \quad 5\text{分}$$

(II) 当 $0 < a < 1$ 时, 原不等式等价于不等式组:

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{x} \geq 0 & (1) \\ 1 - \frac{1}{x} \leq a & (2) \end{cases} \quad 7\text{分}$$

由①得, $x > 1$ 或 $x < 0$,

由(2)得, $0 < x < \frac{1}{1 - a}$, $\therefore 1 < x < \frac{1}{1 - a}$ 10分

综上, 当 $a > 1$ 时, 不等式的解集为 $\{x \mid \frac{1}{1 - a} \leq x < 0\}$

当 $0 < a < 1$ 时, 不等式的解集为 $\{x \mid 1 < x < \frac{1}{1 - a}\}$ 11分

21.

本小题考查三角函数基础知识, 利用三角公式进行恒等变形和运算的能力. 满分12分.

解法一: 由题设条件知 $B = 60^\circ$, $A + C = 120^\circ$. 2分

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{\cos 60^\circ} &= 2\sqrt{2}, \\ \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos C} &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

将上式化为 $\cos A + \cos C = 2\sqrt{2} \cos A \cos C$

利用和差化积及积化和差公式上式可化为

$$2\cos\frac{A+C}{2} - \cos\frac{A+C}{2} = 2\sqrt{2}[\cos(A-C) - \cos(A+C)]$$

将 $\cos\frac{A+C}{2} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos(A-C) = \frac{1}{2}$ 代入上式得

$$\cos\left(\frac{A-C}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\cos(A-C) \quad (6\text{分})$$

将 $\cos(A-C) = 2\cos^2\left(\frac{A-C}{2}\right) - 1$ 代入上式并整理得

$$4\sqrt{2}\cos^2\left(\frac{A-C}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{A-C}{2}\right) - 3\sqrt{2} = 0, \quad (9\text{分})$$

$$2\cos\left(\frac{A-C}{2} - \sqrt{2}\right) - 2\sqrt{2}\cos\frac{A-C}{2} - 3 = 0$$

$$2\sqrt{2}\cos\frac{A-C}{2} - 3 = 0$$

$$2\cos\frac{A-C}{2} = \sqrt{2} = 0$$

$$\text{从而得 } \cos\frac{A-C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (12\text{分})$$

解法二:由题设条件知 $B=60^\circ$, $A+C=120^\circ$.

设 $\frac{A-C}{2}$ 则 $A-C=2$, 可得 $A=60^\circ$, $C=60^\circ$ (3分)

$$\text{所以 } \frac{1}{\cos A} - \frac{1}{\cos C} = \frac{1}{\cos 60^\circ} - \frac{1}{\cos 60^\circ}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sin} - \frac{1}{\frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sin}$$

$$\frac{\cos}{\frac{1}{4}\cos^2 - \frac{3}{4}\sin^2}$$

$$\frac{\cos}{\cos^2 - \frac{3}{4}} \quad (7\text{分})$$

$$\text{依题设条件有 } \frac{\cos}{\cos^2 - \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\cos B}$$

$$\cos B = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\cos}{\cos^2 - \frac{3}{4}} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{整理得 } 4\sqrt{2}\cos^2 - 2\cos - 3\sqrt{2} = 0 \quad (9\text{分})$$

$$\begin{aligned} (2\cos \sqrt{2}) & 2\sqrt{2\cos} \quad 3) = 0 \\ 2\sqrt{2\cos} \quad 3 & = 0 \\ (2\cos \sqrt{2}) & = 0 \end{aligned}$$

从而得 $\cos \frac{A+C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (12分)

22.

(I)证明:在截面 A_1EC 内,过E作 $EG \perp A_1C$, G是垂足.

① $\because$ _____

$\therefore EG \perp$ 侧面 AC_1 ;取AC的中点F,连结BF, FG,由 $AB=BC$ 得 $BF \perp AC$,

② $\because$ _____

$\therefore BF \perp$ 侧面 AC_1 ;得 $BF \parallel EG$, BF、EG 确定一个平面,交侧面 AC_1 于FG.

③ $\because$ _____

$\therefore BE \parallel FG$, 四边形BEGF 是平行四边形, $BE=FG$,

④ $\because$ _____

$\therefore FG \parallel AA_1$, $\triangle AA_1C \sim \triangle FGC$,

⑤ $\because$ _____

$FG = \frac{1}{2}AA_1 = \frac{1}{2}BB_1$, 即 $BE = \frac{1}{2}BB_1$, 故 $BE \parallel EB_1$

(II)解

本小题考查空间线面关系,正三棱柱的性质,逻辑思维能力,空间想象能力及运算能力.满分12分.

(I)① $\because$ 面 $A_1EC \perp$ 侧面 AC_1 , 2分

② $\because$ 面 $ABC \perp$ 侧面 AC_1 , 3分

③ $\because BE \parallel$ 侧面 AC_1 , 4分

④ $\because BE \parallel AA_1$, 5分

⑤ $\because AF=FC$, 6分

(II)解:分别延长CE、 C_1B_1 交于点D, 连结 A_1D .

$$EB_1 \parallel CC_1, EB_1 = \frac{1}{2}BB_1 = \frac{1}{2}CC_1$$

$$EB_1 = \frac{1}{2}DC_1 = \frac{1}{2}B_1C_1 = \frac{1}{2}A_1B_1$$

$$\frac{A_1B_1C_1}{111} = \frac{B_1C_1A_1}{111} = 60$$

$$\frac{DA_1B_1}{111} = \frac{A_1DB_1}{111} = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle DB_1A_1) = 30^\circ$$

$$\frac{DA_1C_1}{111} = \frac{DA_1B_1}{111} + \frac{B_1A_1C_1}{111} = 90^\circ, \text{即} \angle DA_1C_1 = 90^\circ \text{ (9分)}$$

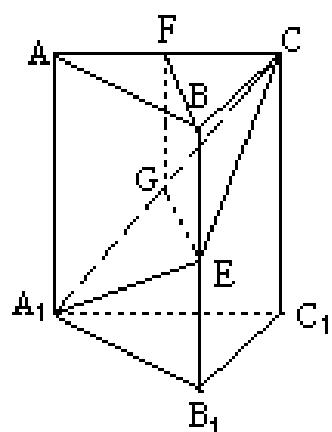
$\because CC_1 \perp \text{面} A_1C_1B_1$, 即 A_1C_1 是 A_1C 在平面 A_1C_1D 上的射影, 根据三垂线定理得

$$DA_1 \perp A_1C,$$

所以 $\angle CA_1C_1$ 所求二面角的平面角. 11分

$$\because CC_1 = AA_1 = A_1B_1 = A_1C_1, \angle A_1C_1C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CA_1C_1 = 45^\circ, \text{即所求二面角为 } 45^\circ. \text{ 12分}$$



23.

本小题主要考查运用数学知识和方法解决实际问题的能力,指数函数和二项式定理的应用,近似计算的方法和能力.满分10分.

解:设耕地平均每年至多只能减少 x 公顷,又设该地区现有人口为 P 人,粮食单产为 M 吨/公顷.

依题意得不等式

$$\frac{M(1-22\%)^{10^4-10x}}{P(1-1\%)^{10}} \geq \frac{M \cdot 10^4}{P} (1-10\%) \text{ (5分)}$$

$$\text{化简得 } x \leq 10^3 \left[1 - \frac{1.1(1-0.01)^{10}}{1.22} \right]$$

$$10^3 \left[1 - \frac{1.1(1-0.01)^{10}}{1.22} \right]$$

$$10^3 \left[1 - \frac{1.1}{1.22} (1 - C_{10}^1 \cdot 0.01 - C_{10}^2 \cdot 0.01^2 - \dots) \right]$$

$$10^3 \left[1 - \frac{1.1}{1.22} (1.1045) \right]$$

$$4.1$$

$$x \leq 4.1 \text{ (公顷) (9分)}$$

答:按规划该地区耕地平均每年至多只能减少4公顷. 10分

24 解：(I)依题设， l_1 、 l_2 的斜率都存在，因为 l_1 过点 $P(-\sqrt{2}, 0)$ 且与双曲线有两个交点，故方程组

$$\begin{cases} y = k_1(x + \sqrt{2}) \\ \frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{1} = 1 \end{cases} \quad (1) \quad (1\text{分})$$

有两个不同的解.在方程组①中消去 y ,整理得

$$(k_1^2 - 1)x^2 + 2\sqrt{2}k_1x + 2k_1^2 - 1 = 0 \quad (2)$$

若 $k_1^2 - 1 = 0$,则方程组①只有一个解，即 l_1 与双曲线只有一个交点，与题设矛盾，

故 $k_1^2 - 1 \neq 0$ 即 $|k_1| \neq 1$ 方程②的判别式为

$$\Delta = (2\sqrt{2}k_1)^2 - 4(k_1^2 - 1)(2k_1^2 - 1) = 4(3k_1^2 - 1)$$

设的斜率为 k_2 ，因为 l_2 过点 $P(-\sqrt{2}, 0)$ 且与双曲线有两个交点，故方程组

$$\begin{cases} y = k_2(x + \sqrt{2}) \\ \frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{1} = 1 \end{cases} \quad (3)$$

有两个不同的解.在方程组③中消去 y ,整理得

$$(k_2^2 - 1)x^2 + 2\sqrt{2}k_2x + 2k_2^2 - 1 = 0 \quad (4)$$

同理有 $k_2^2 - 1 \neq 0$, $4(3k_2^2 - 1)$

又因为 $l_1 \perp l_2$,所以有 $k_1 \cdot k_2 = -1$. 4分

于是, l_1 、 l_2 与双曲线各有两个交点，等价于

$$\begin{cases} 3k_1^2 - 1 > 0 \\ 3k_2^2 - 1 > 0 \\ k_1 \cdot k_2 = -1 \\ |k_1| \neq 1 \end{cases}$$

解得

$$\frac{\sqrt{3}}{3} < k_1 < \sqrt{3} \quad (6\text{分})$$

$$k_1 \in \left(\sqrt{3}, 1 \right) \cup \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1 \right) \cup \left(1, \sqrt{3} \right) \quad (7\text{分})$$

(II)设 $A_1(x_1, y_1)$, $B_1(x_2, y_2)$.由方程②知

$$x_1 - x_2 = \frac{2\sqrt{2}k_1^2}{k_1^2 - 1}, x_1 + x_2 = \frac{2k_1^2 - 1}{k_1^2 - 1},$$

$$\therefore |A_1B_1|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$= \frac{(1 - k_1^2)(x_1 - x_2)^2}{(k_1^2 - 1)^2} \quad (5) \quad (9 \text{分})$$

$$\text{同理, 由方程④可求得, } |A_2B_2|^2 = \frac{(1 - k_2^2)(x_1 - x_2)^2}{(k_2^2 - 1)^2} \quad (6)$$

$$\text{由 } |A_1B_1| = \sqrt{5} |A_2B_2|, \text{ 得 } |A_1B_1|^2 = 5 |A_2B_2|^2$$

将⑤、⑥代入上式得

$$\frac{4(1 - k_1^2)(x_1 - x_2)^2}{(k_1^2 - 1)^2} = 5 \frac{4(1 - k_2^2)(x_1 - x_2)^2}{(k_2^2 - 1)^2}$$

$$\text{解得 } k_1 = \sqrt{2}$$

$$\text{取 } k_1 = \sqrt{2} \text{ 时, } l_1: y = \sqrt{2}(x - \sqrt{2}), l_2: y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \sqrt{2})$$

$$\text{取 } k_1 = -\sqrt{2} \text{ 时, } l_1: y = -\sqrt{2}(x - \sqrt{2}), l_2: y = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x - \sqrt{2}) \quad (12 \text{分})$$

25. 本小题主要考查函数的性质、含有绝对值的不等式的性质, 以及综合运用数学知识分析问题与解决问题的能力。满分12分。

(I) 证明: 由条件当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $|f(x)| \leq 1$, 取 $x=0$ 得

$$|c| = |f(0)| \leq 1,$$

即 $|c| \leq 1$. 2分

(II) 证法一:

当 $a > 0$ 时, $g(x) = ax + b$ 在 $[-1, 1]$ 上是增函数,

$$\therefore g(-1) \leq g(x) \leq g(1),$$

$$\therefore |f(x)| \leq 1 \quad (-1 \leq x \leq 1), |c| \leq 1,$$

$$\therefore g(1) = a + b = f(1) \leq |f(1)| + |c| \leq 2,$$

$$g(-1) = -a + b = -f(-1) \geq -(|f(-1)| + |c|) \geq -2,$$

由此得 $|g(x)| \leq 2$; 5分

当 $a < 0$ 时, $g(x) = ax + b$ 在 $[-1, 1]$ 上是减函数,

$$\therefore g(-1) \geq g(x) \geq g(1),$$

$$\therefore |f(x)| \leq 1 \quad (-1 \leq x \leq 1), |c| \leq 1,$$

$$\therefore g(-1) = -a + b = -f(-1) \leq |f(-1)| + |c| \leq 2,$$

$$g(1) = a + b = f(1) \geq -(|f(1)| + |c|) \geq -2,$$

由此得 $|g(x)| \leq 2$; 7分

当 $a=0$ 时, $g(x)=b$, $f(x)=bx+c$.

$\because -1 \leq x \leq 1$,

$\therefore |g(x)| = |f(1)-c| \leq |f(1)| + |c| \leq 2$.

综上得 $|g(x)| \leq 2$. 8分

证法二

由 $x = \frac{(x-1)^2 - (x+1)^2}{4}$ 可得

$g(x) = ax + b$

$$a\left[\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right] = b\left(\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{2}\right)$$

$$\left[a\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - b\left(\frac{x-1}{2}\right) - c\right] = \left[a\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - b\left(\frac{x+1}{2}\right) - c\right]$$

$$f\left(\frac{x-1}{2}\right) = f\left(\frac{x+1}{2}\right) \quad (6分)$$

当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, 有 $0 \leq \frac{x-1}{2} \leq 1$, $1 \geq \frac{x+1}{2} \geq 0$

根据含绝对值的不等式的性质得

$$\left|f\left(\frac{x-1}{2}\right) - f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| = \left|f\left(\frac{x-1}{2}\right)\right| + \left|f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| \leq 2$$

即 $|g(x)| \leq 2$. 8分

(III) 因为 $a > 0$, $g(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是增函数, 当 $x=1$ 时取得最大值 2,

即 $g(1) = a+b = f(1) - f(0) = 2$.

$\because -1 \leq f(0) = f(1) \leq 1-2 = -1$,

$\therefore c = f(0) = -1$ 10分

因为当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) \geq -1$ 即 $f(x) \geq f(0)$,

根据二次函数的性质, 直线 $x=0$ 为 $f(x)$ 的图象的对称轴, 由此得

$$\frac{b}{2a} = 0 \text{ 即 } b = 0$$

由① 得 $a=2$.

所以 $f(x) = 2x^2 - 1$. 12分

1997 年全国普通高等学校招生统一考试
数学试卷(理)

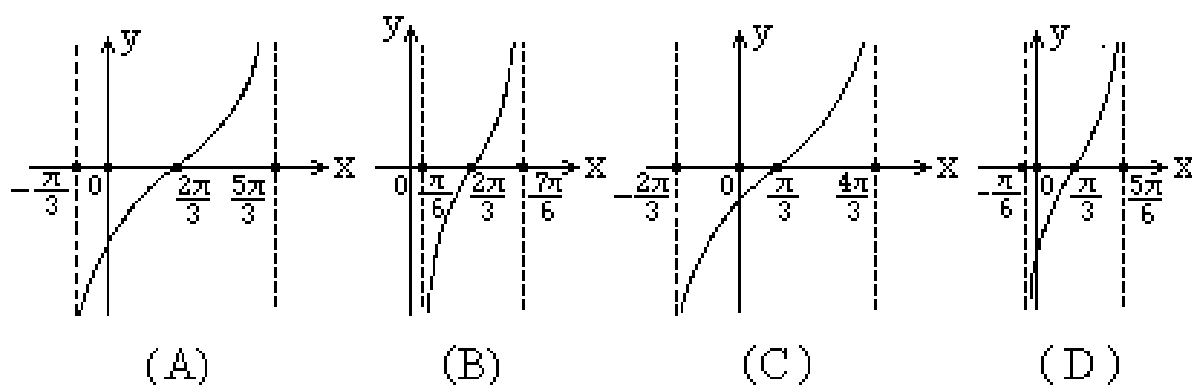
(1) 设集合 $M = \{x \mid 0 \leq x < 2\}$, 集合 $N = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 集合 $M \cap N$ 为

- (A) $\{x \mid 0 \leq x < 1\}$ (B) $\{x \mid 0 \leq x < 2\}$
(C) $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ (D) $\{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$

(2) 如果直线 $ax + 2y + 2 = 0$ 与直线 $3x - y - 2 = 0$ 平行, 那么系数 a 为

- (A) 3 (B) 6 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$

(3) 函数 $y = \tan\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x\right)$ 在一个周期内的图象是



(4) 已知三棱锥 $D-ABC$ 的三个侧面与底面全等, 且 $AB=AC=\sqrt{3}$, $BC=2$, 则 BC 为棱, 以面 BCD 与面 BCA 为面的二面角的大小是

- (A) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $\arccos \frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$

(5) 函数 $y = \sin\left(\frac{1}{3} - 2x\right) \cos 2x$ 的最小正周期是

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) (C) 2 (D) 4

(6) 满足 $\arccos(1-x) = \arccos x$ 的 x 的取值范围是

- (A) $\left[1, \frac{1}{2}\right]$ (B) $\left[\frac{1}{2}, 0\right]$ (C) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ (D) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

(7) 将 $y=2^x$ 的图象

- (A) 先向左平行移动 1 个单位 (B) 先向右平行移动 1 个单位
(C) 先向上平行移动 1 个单位 (D) 先向下平行移动 1 个单位

再作关于直线 $y=x$ 对称的图象, 可得到函数 $y=\log_2(x+1)$ 的图象.

(8) 长方体一个顶点上三条棱的长分别是 3, 4, 5 且它的八个顶点都在同一个球面上, 这个球的表面积是

- (A) $20\sqrt{2}$ (B) $25\sqrt{2}$ (C) 50 (D) 200

(9) 曲线的参数方程 $\begin{cases} x = 1 - \frac{1}{t} \\ y = 1 - t^2 \end{cases}$ (t 是参数, $t \neq 0$), 它的普通方程是

- (A) $(x-1)^2(y-1)=1$ (B) $y = \frac{x(x-2)}{(1-x)^2}$
 (C) $y = \frac{1}{(1-x)^2} - 1$ (D) $y = \frac{x}{1-x^2} - 1$

(10) 函数 $y = \cos^2 x - 3 \cos x + 2$ 的最小值为

- (A) 2 (B) 0 (C) $\frac{1}{4}$ (D) 6

(11) 椭圆 C 与 $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ 椭圆关于直线 $x+y=0$ 对称, 椭圆 C 的方程是

(A) $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

(B) $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$

(C) $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$

(D) $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

(12) 圆台上、下底面积分别为 π 、 4π , 侧面积为 6π , 这个圆台的体积是

- (A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) $\frac{7\sqrt{3}}{6}$ (D) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

(13) 定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数 $f(x)$ 为增函数; 偶函数 $g(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 的图象与 $f(x)$ 的图象重合. 设 $a > b > 0$, 给出下列不等式

- ① $f(b) - f(-a) > g(a) - g(-b)$; ② $f(b) - f(-a) < g(a) - g(-b)$;
 ③ $f(a) - f(-b) > g(b) - g(-a)$; ④ $f(a) - f(-b) < g(b) - g(-a)$,

其中成立的是

- (A) ①与④ (B) ②与③ (C) ①与③ (D) ②与④

(14) 不等式组 $\begin{cases} \frac{3-x}{3-x} \leq \frac{0}{2-x} \\ \frac{3-x}{3-x} \geq \frac{0}{2-x} \end{cases}$ 的解集是

- A $x|0 \leq x \leq 2$ B $x|0 \leq x \leq 2.5$ C $x|0 \leq x \leq \sqrt{6}$ D $x|0 \leq x \leq 3$

(15)四面体的顶点和各棱中点共10个点,在其中取4个不共面的点,不同的取法共有

- (A) 150种 (B) 147种 (C) 144种 (D) 141种

(16)已知 $\frac{a}{x} \sqrt{\frac{x}{2}}^9$ 的展开式中 x^3 的系数为 $\frac{9}{4}$, 常数a的值为_____.

(17)已知直线的极坐标方程 $\sin(\frac{\pi}{4}) \frac{\sqrt{2}}{2}$ 则极点到该直线的距离是_____。

(18) $\frac{\sin 7^\circ \cos 15^\circ \sin 8^\circ}{\cos 7^\circ \sin 15^\circ \sin 8^\circ}$ 的值为_____

(19)已知m、l是直线, α 、 β 是平面,给出下列命题:

- ①若l垂直于 α 内的两条相交直线,则 $l \perp \alpha$;
- ②若l平行于 α ,则l平行于 α 内的所有直线;
- ③若 $m \perp \alpha$, $l \perp \beta$, 且 $l \perp m$, 则 $\alpha \perp \beta$;
- ④若 $l \perp \beta$, 且 $l \perp \alpha$, 则 $\alpha \perp \beta$;
- ⑤若 $m \perp \alpha$, $l \perp \beta$, 且 $\alpha \parallel \beta$, 则 $m \parallel l$.

其中正确的命题的序号是_____. 注:把你认为正确的命题的序号都填上)

(20)已知复数平面上所对应的点分别为P、Q, 证明 $\triangle OPQ$ 是等腰直角三角形(其中O为原点)

(21)本小题满分11分)

已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都是由正数组成的等比数列, 公比分别为p, q,

其中 $p > q$, 且 $p \neq 1$, $q \neq 1$. 设 $c_n = a_n + b_n$, S_n 为数列 $\{c_n\}$ 的前n项和. 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{S_{n-1}}$$

(22)本小题满分12分)

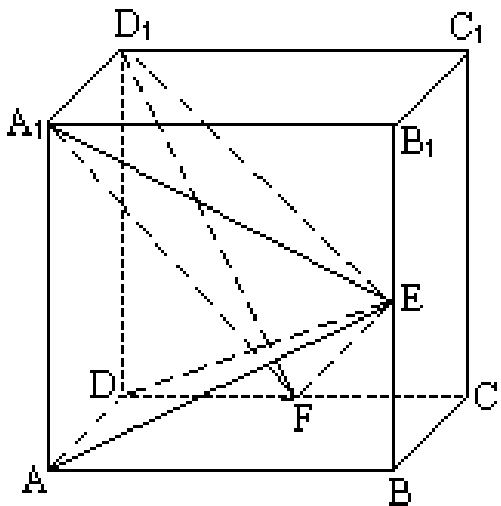
甲、乙两地相距S千米,汽车从甲地匀速行驶到乙地,速度不得超过c千米/时. 已知汽车每小时的运输成本(以元为单位)由可变部分和固定部分组成:可变部分与速度v(千米/时)的平方成正比,比例系数为b;固定部分为a元.

(I)全程运输成本把y(元)表示为速度v(千米/时)的函数,并指出这个函数的定义域;

(II)为了使全程运输成本最小,汽车应以多大速度行驶?

(23)本小题满分12分)

如图,在正方体ABCD-A₁B₁C₁D₁中, E、F分别是BB₁、CD的中点.



(I)证明AD ⊥D₁F;

(II)求AE 与D₁F所成的角;

(III)证明面AED ⊥面A₁FD₁;

IV 设AA₁ = 2, 求三棱锥 F - A₁ED₁ 的体积 V_{F - A₁ED₁}

(24) 本小题满分12分)

设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a>0$) 方程 $f(x)-x=0$ 的两个根 x_1, x_2 满足

$$0 < x_1 < x_2 < \frac{1}{a}$$

(I)当 $x \in (0, \frac{1}{a})$ 时,证明 $x < f(x) < x_1$;

(II)设函数的图象 $f(x)$ 关于直线 $x = x_0$ 对称, 证明 $x_0 = \frac{x_1}{2}$.

(25) 本小题满分12分)

设圆满足 :①截y轴所得弦长为2;②被x轴分成两段圆弧,其弧长的比为3:1在满足条件①、②的所有圆中,求圆心到直线 $l : x-2y=0$ 的距离最小的圆的方程

>试题答案<

1. B
2. B
3. A
4. C
5. B
6. D
7. D
8. C
9. B
10. B
11. A
12. D
13. C

14. C

15. D

16. 4

17. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

18. $2\sqrt{3}$

19. ①④

20. 本小题主要考查复数的基本概念、复数的运算以及复数的几何意义等基础知识,考查运算能力和逻辑推理能力.满分10分.

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

解法一:

-----分

于是

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\overline{z} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$z^2 = \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \quad 5 \text{ 分}$$

因为 OP 与 OQ 的夹角为 $\frac{5\pi}{12} - \left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{2}$, 所以 $OP \perp OQ$ 7 分

由此知 $\triangle OPQ$ 有两边相等且其夹角为直角,故 $\triangle OPQ$ 为等腰直角三解形

解法二:

$$\text{因为 } z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right), \text{ 所以 } z^3 = i \quad 2 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \text{ 所以 } z^4 = 1 \quad 4 \text{ 分}$$

$$\text{于是 } \frac{z^2 - 3}{z} = \frac{z^2 - 3}{z} = \frac{z}{z} = \frac{z^3 - 4}{|z|^2} = i \quad 6 \text{ 分}$$

由此得 $OP \perp OQ$, $|OP| = |OQ|$.

由此知 $\triangle OPQ$ 有两边相等且其夹角为直角,故 $\triangle OPQ$ 为等腰直角三角形. ---1分

21. 本小题主要考查等比数列的概念、数列极限的运算等基础知识,考查逻辑推理能力和运算能力.满分11分.

$$S_n = \frac{a(p^n - 1)}{p - 1} - \frac{b(q^n - 1)}{q - 1}$$

解: $\frac{S_n}{S_{n+1}} = \frac{a(q-1)(p^{n+1}-1) - b(p-1)(q^{n+1}-1)}{a(q-1)(p^n-1) - b(p-1)(q^n-1)}$ 3分

,分两种情况讨论

(I) $p > 1$.

$$p - q > 0, \text{ 且 } \frac{q}{p} < 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{S_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^n [a(q-1)(\frac{1}{p^n} - \frac{1}{p^{n+1}}) - b(p-1)(\frac{q^n}{p^n} - \frac{1}{p^{n+1}})]}{p^{n+1} [a(q-1)(\frac{1}{p^{n+1}} - \frac{1}{p^{n+2}}) - b(p-1)(\frac{q^{n+1}}{p^{n+1}} - \frac{1}{p^{n+2}})]}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(q-1)(\frac{1}{p^n} - \frac{1}{p^{n+1}}) - b(p-1)(\frac{q^n}{p^n} - \frac{1}{p^{n+1}})}{a(q-1)(\frac{1}{p^{n+1}} - \frac{1}{p^{n+2}}) - b(p-1)(\frac{q^{n+1}}{p^{n+1}} - \frac{1}{p^{n+2}})}$$

$$= p \cdot \frac{a(q-1)}{a(q-1) - b(p-1)}$$

-----分-7

(II) $p < 1$.

$\because 0 < q < p < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{S_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(q-1)(p^{n+1}-1) - b(p-1)(q^{n+1}-1)}{a(q-1)(p^n-1) - b(p-1)(q^n-1)}$$

$$= \frac{a(q-1) - b(p-1)}{a(q-1) - b(p-1)} = 1$$

-----分-1

22. 本小题主要考查建立函数关系、不等式性质、最大值、最小值等基础知识,考查综合应用所学数学知识、思想和方法解决实际问题的能力,满分12分.

(1) 依题意知汽车从甲地匀速行驶到乙地所用时间为 s/v 全程运输成本为

$$y = a \cdot \frac{s}{v} + bv^2 \cdot \frac{s}{v} = s(\frac{a}{v} + bv)$$

-----分-4

故所求函数及其定义域为

$$y = S(\frac{a}{v} + bv), v \in (0, c]$$

-----分-5

(II) 依题意知 S, a, b 都为正数,故有

$$S(\frac{a}{v} + bv) \geq 2S\sqrt{ab}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/466240053124010233>