

十年（2014—2023）年高考真题分项汇编—概率统计解答题

目录

题型一：二项式定理.....	1
题型二：事件的频率与概率	3
题型三：随机变量的分布列与期望、方差.....	8
题型四：概率统计中的决策建议.....	44
题型五：简单的随机抽样与用样本估计总体	49
题型六：相关关系与回归分析.....	62
题型七：独立性检验.....	67
题型八：概率统计综合应用.....	74

题型一：二项式定理

1. (2019·江苏·第24题) 设 $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, n \geq 4, n \in \mathbf{N}^*$. 已知 $a_3^2 = 2a_2a_4$.

(1) 求 n 的值; (2) 设 $(1+\sqrt{3})^n = a + b\sqrt{3}$, 其中 $a, b \in \mathbf{N}^*$, 求 $a^2 - 3b^2$ 的值.

【答案】 见解析

【解析】 (1) 因为 $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \cdots + C_n^nx^n, n \geq 4$,

$$\text{所以 } a_2 = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}, a_3 = C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6},$$

$$a_4 = C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

因为 $a_3^2 = 2a_2a_4$,

$$\text{所以 } \left[\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \right]^2 = 2 \times \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24},$$

解得 $n = 5$.

(2) 由 (1) 知, $n = 5$.

$$\begin{aligned} (1+\sqrt{3})^n &= (1+\sqrt{3})^5 \\ &= C_5^0 + C_5^1\sqrt{3} + C_5^2(\sqrt{3})^2 + C_5^3(\sqrt{3})^3 + C_5^4(\sqrt{3})^4 + C_5^5(\sqrt{3})^5 \\ &= a + b\sqrt{3}. \end{aligned}$$

解法一： 因为 $a, b \in \mathbf{N}^*$, 所以 $a = C_5^0 + 3C_5^2 + 9C_5^4 = 76, b = C_5^1 + 3C_5^3 + 9C_5^5 = 44$,

从而 $a^2 - 3b^2 = 76^2 - 3 \times 44^2 = -32$.

解法二： $(1-\sqrt{3})^5 = C_5^0 + C_5^1(-\sqrt{3}) + C_5^2(-\sqrt{3})^2 + C_5^3(-\sqrt{3})^3 + C_5^4(-\sqrt{3})^4 + C_5^5(-\sqrt{3})^5$
 $= C_5^0 - C_5^1\sqrt{3} + C_5^2(\sqrt{3})^2 - C_5^3(\sqrt{3})^3 + C_5^4(\sqrt{3})^4 - C_5^5(\sqrt{3})^5 .$

因为 $a, b \in \mathbf{N}^*$ ，所以 $(1-\sqrt{3})^5 = a - b\sqrt{3}$.

因此 $a^2 - 3b^2 = (a + b\sqrt{3})(a - b\sqrt{3}) = (1 + \sqrt{3})^5 \times (1 - \sqrt{3})^5 = (-2)^5 = -32$.

2. (2016 高考数学江苏文理科 · 第 26 题) (1) 求 $7C_6^3 - 4C_7^4$ 的值；

(2) 设 $m, n \in \mathbf{N}^*$ ， $n \geq m$.

求证： $(m+1)C_m^m + (m+2)C_{m+1}^m + (m+3)C_{m+2}^m + \cdots + nC_{n-1}^m + (n+1)C_n^m = (m+1)C_{n+2}^{m+2}$.

【答案】 (1) 0；(2) 详见解析；

【官方解答】 (1) $7C_6^3 - 4C_7^4 = 7 \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} - 4 \times \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 0$ ；

(2) 当 $n = m$ 时，结论显然成立。当 $n > m$ 时，

$$(k+1)C_k^m = \frac{(k+1) \cdot k!}{m! \cdot (k-m)!} = (m+1) \cdot \frac{(k+1)!}{(m+1)! \cdot [(k+1)-(m+1)]!}$$

$$= (m+1)C_{k+1}^{m+1}, k = m+1, m+2, \dots, n .$$

又因为 $C_{k+1}^{m+1} + C_{k+1}^{m+2} = C_{k+2}^{m+2}$ ，

所以 $(k+1)C_k^m = (m+1)(C_{k+2}^{m+2} - C_{k+1}^{m+2})$ ， $k = m+1, m+2, \dots, n$.

因此， $(m+1)C_m^m + (m+2)C_{m+1}^m + (m+3)C_{m+2}^m + \cdots + nC_{n-1}^m + (n+1)C_n^m$
 $= (m+1)C_m^m + [(m+2)C_{m+1}^m + (m+3)C_{m+2}^m + \cdots + (n+1)C_n^m]$
 $= (m+1)C_{m+2}^{m+2} + (m+1)[(C_{m+3}^{m+2} - C_{m+2}^{m+2}) + (C_{m+4}^{m+2} - C_{m+3}^{m+2}) + \cdots + (C_{n+2}^{m+2} - C_{n+1}^{m+2})]$
 $= (m+1)C_{n+2}^{m+2}$.

民间解答：(1) $7C_6^3 - 4C_7^4 = 7 \times 20 - 4 \times 35 = 0$ ；

(2) 对任意的 $m \in \mathbf{N}^*$ ，

① 当 $n = m$ 时，左边 $= (m+1)C_m^m = m+1$ ，右边 $= (m+1)C_{m+2}^{m+2} = m+1$ ，等式成立，

② 假设 $n = k (k \geq m)$ 时命题成立，

即 $(m+1)C_m^m + (m+2)C_{m+1}^m + (m+3)C_{m+2}^m + \cdots + kC_{k-1}^m + (k+1)C_k^m = (m+1)C_{k+2}^{m+2}$ ，

当 $n = k+1$ 时，

左边 $= (m+1)C_m^m + (m+2)C_{m+1}^m + (m+3)C_{m+2}^m + \cdots + kC_{k-1}^m + (k+1)C_k^m + (k+2)C_{k+1}^m$
 $= (m+1)C_{k+2}^{m+2} + (k+2)C_{k+1}^m$ ，

$$\text{右边} = (m+1)C_{k+3}^{m+2},$$

$$\text{而 } (m+1)C_{k+3}^{m+2} - (m+1)C_{k+2}^{m+2},$$

$$= (m+1) \left[\frac{(k+3)!}{(m+2)!(k-m+1)!} - \frac{(k+2)!}{(m+2)!(k-m)!} \right]$$

$$= (m+1) \times \frac{(k+2)!}{(m+2)!(k-m+1)!} [k+3 - (k-m+1)]$$

$$= (k+2) \frac{(k+1)!}{m!(k-m+1)!}$$

$$= (k+2)C_{k+1}^m$$

$$\text{因此 } (m+1)C_{k+2}^{m+2} + (k+2)C_{k+1}^m = (m+1)C_{k+3}^{m+2},$$

因此左边=右边，

因此 $n = k + 1$ 时命题也成立，

综合①②可得命题对任意 $n \geq m$ 均成立。

另解：因为 $(k+1)C_k^m = (m+1)C_{k+1}^{m+1}$ ，所以

$$\text{左边} = (m+1)C_{m+1}^{m+1} + (m+1)C_{m+2}^{m+1} + \cdots + (m+1)C_{n+1}^{m+1} = (m+1)(C_{m+1}^{m+1} + C_{m+2}^{m+1} + \cdots + C_{n+1}^{m+1})$$

又由 $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ ，知

$$C_{n+2}^{m+2} = C_{n+1}^{m+2} + C_{n+1}^{m+1} = C_n^{m+2} + C_n^{m+1} + C_{n+1}^{m+1} = \cdots = C_{m+2}^{m+2} + C_{m+2}^{m+1} + \cdots + C_{n+1}^{m+1} = C_{m+1}^{m+1} + C_{m+2}^{m+1} + \cdots + C_{n+1}^{m+1},$$

所以，左边=右边。

题型二：事件的频率与概率

1. (2022 新高考全国 I 卷 · 第 20 题) 一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯(卫生习惯分为良好和不够良好两类)的关系，在已患该疾病的病例中随机调查了 100 例(称为病例组)，同时在未患该疾病的人群中随机调查了 100 人(称为对照组)，得到如下数据：

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

(1) 能否有 99% 的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异？

(2) 从该地的人群中任选一人，A 表示事件“选到的人卫生习惯不够良好”，B 表示事件“选到的人患

有该疾病”。 $\frac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}$ 与 $\frac{P(B|\bar{A})}{P(\bar{B}|\bar{A})}$ 的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项度量指标，

记该指标为 R 。

(i) 证明：
$$R = \frac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)} \cdot \frac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(A|\bar{B})};$$

(ii) 利用该调查数据，给出 $P(A|B), P(A|\bar{B})$ 的估计值，并利用 (i) 的结果给出 R 的估计值。

$$\text{附 } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

$P(K^2 \geq k)$	0. 050	0. 010	0. 001
k	3. 841	6. 635	10. 828

【答案】 (1) 答案见解析

(2) (i) 证明见解析；(ii) $R = 6$ ；

解析：(1) 由已知
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{200(40 \times 90 - 60 \times 10)^2}{50 \times 150 \times 100 \times 100} = 24,$$

又 $P(K^2 \geq 6.635) = 0.01$ ， $24 > 6.635$ ，

所以有 99% 的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异。

(2) (i) 因为
$$R = \frac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)} \cdot \frac{P(\bar{B}|\bar{A})}{P(B|\bar{A})} = \frac{P(AB)}{P(A)} \cdot \frac{P(A)}{P(\bar{A}\bar{B})} \cdot \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})} \cdot \frac{P(\bar{A})}{P(\bar{A}\bar{B})},$$

所以
$$R = \frac{P(AB)}{P(B)} \cdot \frac{P(B)}{P(\bar{A}\bar{B})} \cdot \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})} \cdot \frac{P(\bar{B})}{P(\bar{A}\bar{B})} \quad \text{所以 } R = \frac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)} \cdot \frac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(A|\bar{B})},$$

(ii) 由已知 $P(A|B) = \frac{40}{100}$ ， $P(A|\bar{B}) = \frac{10}{100}$ ，

又 $P(\bar{A}|B) = \frac{60}{100}$ ， $P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{90}{100}$ ，所以
$$R = \frac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)} \cdot \frac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(A|\bar{B})} = 6$$

2. (2022 高考北京卷·第 18 题) 在校运动会上，只有甲、乙、丙三名同学参加铅球比赛，比赛成绩达到 9.50m 以上(含 9.50m) 的同学将获得优秀奖。为预测获得优秀奖的人数及冠军得主，收集了甲、乙、丙以往的比赛成绩，并整理得到如下数据(单位：m)：

甲：9. 80, 9. 70, 9. 55, 9. 54, 9. 48, 9. 42, 9. 40, 9. 35, 9. 30, 9. 25；

乙：9. 78, 9. 56, 9. 51, 9. 36, 9. 32, 9. 23；

丙：9. 85, 9. 65, 9. 20, 9. 16。

假设用频率估计概率，且甲、乙、丙的比赛成绩相互独立。

- (1) 估计甲在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的概率；
- (2) 设 X 是甲、乙、丙在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的总人数，估计 X 的数学期望 $E(X)$ ；
- (3) 在校运动会铅球比赛中，甲、乙、丙谁获得冠军的概率估计值最大？（结论不要求证明）

【答案】解析：(1) 由频率估计概率可得

甲获得优秀的概率为 0.4，乙获得优秀的概率为 0.5，丙获得优秀的概率为 0.5，故答案为 0.4

(2) 设甲获得优秀为事件 A_1 ，乙获得优秀为事件 A_2 ，丙获得优秀为事件 A_3

$$P(X=0) = P(\overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3}) = 0.6 \times 0.5 \times 0.5 = \frac{3}{20},$$

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(\overline{A_1}\overline{A_2}A_3) + P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}) + P(A_1\overline{A_2}\overline{A_3}) \\ &= 0.4 \times 0.5 \times 0.5 + 0.6 \times 0.5 \times 0.5 + 0.6 \times 0.5 \times 0.5 = \frac{8}{20}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=2) &= P(A_1A_2\overline{A_3}) + P(A_1\overline{A_2}A_3) + P(\overline{A_1}A_2A_3) \\ &= 0.4 \times 0.5 \times 0.5 + 0.4 \times 0.5 \times 0.5 + 0.6 \times 0.5 \times 0.5 = \frac{7}{20}, \end{aligned}$$

$$P(X=3) = P(A_1A_2A_3) = 0.4 \times 0.5 \times 0.5 = \frac{2}{20}.$$

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{3}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{2}{20}$

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{3}{20} + 1 \times \frac{8}{20} + 2 \times \frac{7}{20} + 3 \times \frac{2}{20} = \frac{7}{5}$$

(3) 丙夺冠概率估计值最大.

因为铅球比赛无论比赛几次就取最高成绩. 比赛一次，丙获得 9.85 的概率为 $\frac{1}{4}$ ，甲获得 9.80 的概率为 $\frac{1}{10}$ ，乙获得 9.78 的概率为 $\frac{1}{6}$. 并且丙的最高成绩是所有成绩中最高的，比赛次数越多，对丙越有利.

3. (2020 年高考课标 I 卷理科·第 19 题) 甲、乙、丙三位同学进行羽毛球比赛，约定赛制如下：累计负两场者被淘汰；比赛前抽签决定首先比赛的两人，另一人轮空；每场比赛的胜者与轮空者进行下一场比赛，负者下一场轮空，直至有一人被淘汰；当一人被淘汰后，剩余的两人继续比赛，直至其中一人被淘汰，另一人最终获胜，比赛结束. 经抽签，甲、乙首先比赛，丙轮空. 设每场比赛双方获胜的概率都为 $\frac{1}{2}$ ，

- (1) 求甲连胜四场的概率；
 (2) 求需要进行第五场比赛的概率；
 (3) 求丙最终获胜的概率.

【答案】 (1) $\frac{1}{16}$; (2) $\frac{3}{4}$; (3) $\frac{7}{16}$.

【解析】 (1) 记事件 M : 甲连胜四场, 则 $P(M) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$;

(2) 记事件 A 为甲输, 事件 B 为乙输, 事件 C 为丙输,
 则四局内结束比赛的概率为

$$P' = P(ABAB) + P(ACAC) + P(BCBC) + P(BABA) = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4},$$

所以, 需要进行第五场比赛的概率为 $P = 1 - P' = \frac{3}{4}$;

(3) 记事件 A 为甲输, 事件 B 为乙输, 事件 C 为丙输,
 记事件 M : 甲赢, 记事件 N : 丙赢,

则甲赢的基本事件包括: $BCBC$ 、 $ABCBC$ 、 $ACBCB$ 、
 $BABCC$ 、 $BACBC$ 、 $BCACB$ 、 $BCABC$ 、 $BCBAC$,

所以, 甲赢的概率为 $P(M) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{9}{32}$.

由对称性可知, 乙赢的概率和甲赢的概率相等,

所以丙赢的概率为 $P(N) = 1 - 2 \times \frac{9}{32} = \frac{7}{16}$.

【点睛】 本题考查独立事件概率的计算, 解答的关键就是列举出符合条件的基本事件, 考查计算能力, 属于中等题.

4. (2019 · 全国 II · 理 · 第 18 题) 11 分制乒乓球比赛, 每赢一球得 1 分, 当某局打成 10:10 平后, 每球交换发球权, 先多得 2 分的一方获胜, 该局比赛结束. 甲、乙两位同学进行单打比赛, 假设甲发球时甲得分的概率为 0.5, 乙发球时甲得分的概率为 0.4, 各球的结果相互独立. 在某局双方 10:10 平后, 甲先发球, 两人又打了 X 个球该局比赛结束.

- (1) 求 $P(X=2)$;
 (2) 求事件“ $X=4$ 且甲获胜”的概率.

【答案】 (1) 0.5; (2) 0.1.

【官方解析】

- (1) $X=2$ 就是 10:10 平后, 两人又打了 2 个球该局比赛结束, 则这 2 个球均由甲得分, 或者均由乙得分. 因此 $P(X=2) = 0.5 \times 0.4 + (1-0.5) \times (1-0.4) = 0.5$.

(2) $X = 4$ 且甲获胜，就是 10:10 平后，两人又打了 4 个球该局比赛结束，且这 4 个球的得分情况为：前两球是甲、乙各得 1 分，后两球均为甲得分。

因此所求概率为

$$[0.5 \times (1 - 0.4) + (1 - 0.5) \times 0.4] \times 0.5 \times 0.4 = 0.1.$$

【分析】

(1) 本题首先可以通过题意推导出 $P(X = 2)$ 所包含的事件为“甲连赢两球或乙连赢两球”，然后计算出每种事件的概率并求和即可得出结果；

(2) 本题首先可以通过题意推导出 $P(X = 4)$ 所包含的事件为“前两球甲乙各得 1 分，后两球均为甲得分”，然后计算出每种事件的概率并求和即可得出结果。

【解析】 (1) 由题意可知， $P(X = 2)$ 所包含的事件为“甲连赢两球或乙连赢两球”，

$$\text{所以 } P(X = 2) = 0.5 \times 0.4 + 0.5 \times 0.6 = 0.5.$$

(2) 由题意可知， $P(X = 4)$ 包含的事件为“前两球甲乙各得 1 分，后两球均为甲得分”

$$\text{所以 } P(X = 4) = 0.5 \times 0.6 \times 0.5 \times 0.4 + 0.5 \times 0.4 \times 0.5 \times 0.4 = 0.1.$$

【点评】 本题考查古典概型的相关性质，能否通过题意得出 $P(X = 2)$ 以及 $P(X = 4)$ 所包含的事件是解决本题的关键，考查推理能力，考查学生从题目中获取所需信息的能力，是中档题。

5. (本小题满分 12 分) 甲、乙两台机床相互没有影响地生产某种产品，甲机床产品的正品率是 0.9，乙机床产品的正品率是 0.95。

(I) 从甲机床生产的产品中任取 3 件，求其中恰有 2 件正品的概率(用数字作答)；

(II) 从甲、乙两台机床生产的产品中各任取 1 件，求其中至少有 1 件正品的概率(用数字作答)。

【答案】 分析：本小题考查互斥事件、相互独立事件的概率等基础知识，及分析和解决实际问题的能力。

(I) 任取甲机床的 3 件产品恰有 2 件正品的概率为

$$P_3(2) = C_3^2 \times 0.9^2 \times 0.1 = 0.243.$$

(II) 解法一：记“任取甲机床的 1 件产品是正品”为事件 A，“任取乙机床的 1 件产品是正品”为事件 B。则任取甲、乙两台机床的产品各 1 件，其中至少有 1 件正品的概率为

$$P(A \cdot B) + P(A \cdot \bar{B}) + P(\bar{A} \cdot B) = 0.9 \times 0.95 + 0.9 \times 0.05 + 0.1 \times 0.95 = 0.995.$$

解法二：运用对立事件的概率公式，所求的概率为

$$1 - P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = 1 - 0.1 \times 0.05 = 0.995.$$

6. (2019 · 天津 · 理 · 第 16 题) 设甲、乙两位同学上学期间，每天 7:30 之前到校的概率均为 $\frac{2}{3}$ 。假定甲、

乙两位同学到校情况互不影响，且任一同学每天到校情况相互独立。

(I) 用 X 表示甲同学上学期间的三天中 7:30 之前到校的天数，求随机变量 X 的分布列和数学期望；

(II) 设 M 为事件“上学期间的三天中，甲同学在 7:30 之前到校的天数比乙同学在 7:30 之前到校的天数恰好多 2”，求事件 M 发生的概率。

【答案】 本小题主要考查离散型随机变量的分布列与数学期望，互斥事件和相互独立事件的概率计算

公式等基础知识，考查运用概率知识解决简单实际问题的能力，满分 13 分。

(I) 解：因为甲同学上学期间的三天中到校情况相互独立，且每天 7:30 之前到校的概率均为 $\frac{2}{3}$ ，故

$$X \sim B\left(3, \frac{2}{3}\right), \text{ 从而 } P(X=k) = C_3^k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{3-k}, \quad k=0,1,2,3.$$

所以，随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

随机变量 X 的数学期望 $E(X) = 3 \times \frac{2}{3} = 2$ 。

(II) 解：设乙同学上学期间的三天中 7:30 之前到校的天数为 Y ，则 $Y \sim B\left(3, \frac{2}{3}\right)$ ，

且 $M = \{X=3, Y=1\} \cup \{X=2, Y=0\}$ 。由题意知事件 $\{X=3, Y=1\}$ 与 $\{X=2, Y=0\}$ 互斥，

且事件 $\{X=3\}$ 与 $\{Y=1\}$ ，事件 $\{X=2\}$ 与 $\{Y=0\}$ 均相互独立，从而由 (I) 知

$$P(M) = P(\{X=3, Y=1\} \cup \{X=2, Y=0\}) = P(X=3, Y=1) + P(X=2, Y=0)$$

$$= P(X=3)P(Y=1) + P(X=2)P(Y=0) = \frac{8}{27} \times \frac{2}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{27} = \frac{20}{243}.$$

题型三：随机变量的分布列与期望、方差

1. (2022 年高考全国甲卷数学(理)·第 19 题) 甲、乙两个学校进行体育比赛，比赛共设三个项目，每个项目胜方得 10 分，负方得 0 分，没有平局。三个项目比赛结束后，总得分高的学校获得冠军。已知甲学校在三个项目中获胜的概率分别为 0.5, 0.4, 0.8，各项目的比赛结果相互独立。

(1) 求甲学校获得冠军的概率；

(2) 用 X 表示乙学校的总得分，求 X 的分布列与期望。

【答案】 (1) 0.6； (2) 分布列见解析， $E(X)=13$ 。

【解析】 (1) 设甲在三个项目中获胜的事件依次记为 A, B, C ，所以甲学校获得冠军的概率为

$$\begin{aligned} P &= P(ABC) + P(\bar{A}BC) + P(A\bar{B}C) + P(ABC\bar{C}) \\ &= 0.5 \times 0.4 \times 0.8 + 0.5 \times 0.4 \times 0.8 + 0.5 \times 0.6 \times 0.8 + 0.5 \times 0.4 \times 0.2 \\ &= 0.16 + 0.16 + 0.24 + 0.04 = 0.6. \end{aligned}$$

(2) 依题可知， X 的可能取值为 0, 10, 20, 30，所以，

$$P(X=0) = 0.5 \times 0.4 \times 0.8 = 0.16,$$

$$P(X=10) = 0.5 \times 0.4 \times 0.8 + 0.5 \times 0.6 \times 0.8 + 0.5 \times 0.4 \times 0.2 = 0.44,$$

$$P(X=20) = 0.5 \times 0.6 \times 0.8 + 0.5 \times 0.4 \times 0.2 + 0.5 \times 0.6 \times 0.2 = 0.34,$$

$$P(X=30) = 0.5 \times 0.6 \times 0.2 = 0.06.$$

即 X 的分布列为

X	0	10	20	30
P	0.16	0.44	0.34	0.06

$$\text{期望 } E(X) = 0 \times 0.16 + 10 \times 0.44 + 20 \times 0.34 + 30 \times 0.06 = 13.$$

2. (2021 高考北京·第 18 题)在核酸检测中，“ k 合 1” 混采核酸检测是指：先将 k 个人的样本混合在一起进行 1 次检测，如果这 k 个人都没有感染新冠病毒，则检测结果为阴性，得到每人的检测结果都为阴性，检测结束；如果这 k 个人中有人感染新冠病毒，则检测结果为阳性，此时需对每人再进行 1 次检测，得到每人的检测结果，检测结束。

现对 100 人进行核酸检测，假设其中只有 2 人感染新冠病毒，并假设每次检测结果准确。

(I) 将这 100 人随机分成 10 组，每组 10 人，且对每组都采用“10 合 1” 混采核酸检测。

(i) 如果感染新冠病毒的 2 人在同一组，求检测的总次数；

(ii) 已知感染新冠病毒的 2 人分在同一组的概率为 $\frac{1}{11}$ 。设 X 是检测的总次数，求 X 的

分布列与数学期望 $E(X)$ 。

(II) 将这 100 人随机分成 20 组，每组 5 人，且对每组都采用“5 合 1” 混采核酸检测。设 Y 是检测的总次数，试判断数学期望 $E(Y)$ 与 (I) 中 $E(X)$ 的大小。（结论不要求证明）

【答案】 (1) ① 20 次；② 分布列见解析；期望为 $\frac{320}{11}$ ；(2) $E(Y) > E(X)$ 。

解析： (1) ① 对每组进行检测，需要 10 次；再对结果为阳性的组每个人进行检测，需要 10 次；

所以总检测次数为 20 次；

② 由题意， X 可以取 20, 30,

$$P(X=20) = \frac{1}{11}, \quad P(X=30) = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11},$$

则 X 的分布列：

X	20	30
P	$\frac{1}{11}$	$\frac{10}{11}$

所以 $E(X) = 20 \times \frac{1}{11} + 30 \times \frac{10}{11} = \frac{320}{11}$;

(2) 由题意, Y 可以取 25, 30,

两名感染者在同一组的概率为 $P_1 = \frac{20C_2^2 C_{98}^3}{C_{100}^5} = \frac{4}{99}$, 不在同一组的概率为 $P_2 = \frac{95}{99}$,

则 $E(Y) = 25 \times \frac{4}{99} + 30 \times \frac{95}{99} = \frac{2950}{99} > E(X)$.

3. (2019 · 江苏 · 第 25 题) 在平面直角坐标系 xOy 中, 设点集 $A_n = \{(0,0), (1,0), (2,0), \dots, (n,0)\}$, $B_n = \{(0,1), (n,1)\}$, $C_n = \{(0,2), (1,2), (2,2), \dots, (n,2)\}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

令 $M_n = A_n \cup B_n \cup C_n$. 从集合 M_n 中任取两个不同的点, 用随机变量 X 表示它们之间的距离.

- (1) 当 $n=1$ 时, 求 X 的概率分布;
 (2) 对给定的正整数 $n(n \geq 3)$, 求概率 $P(X \leq n)$ (用 n 表示).

【答案】 见解析

【解析】 (1) 当 $n=1$ 时, X 的所有可能取值是 $1, \sqrt{2}, 2, \sqrt{5}$.

X 的概率分布为 $P(X=1) = \frac{7}{C_6^2} = \frac{7}{15}$, $P(X=\sqrt{2}) = \frac{4}{C_6^2} = \frac{4}{15}$,

$P(X=2) = \frac{2}{C_6^2} = \frac{2}{15}$, $P(X=\sqrt{5}) = \frac{2}{C_6^2} = \frac{2}{15}$.

(2) 设 $A(a, b)$ 和 $B(c, d)$ 是从 M_n 中取出的两个点.

因为 $P(X \leq n) = 1 - P(X > n)$, 所以仅需考虑 $X > n$ 的情况.

① 若 $b=d$, 则 $AB \leq n$, 不存在 $X > n$ 的取法;

② 若 $b=0, d=1$, 则 $AB = \sqrt{(a-c)^2 + 1} \leq \sqrt{n^2 + 1}$, 所以 $X > n$ 当且仅当 $AB = \sqrt{n^2 + 1}$, 此时 $a=0, c=n$ 或 $a=n, c=0$, 有 2 种取法;

③ 若 $b=0, d=2$, 则 $AB = \sqrt{(a-c)^2 + 4} \leq \sqrt{n^2 + 4}$, 因为当 $n \geq 3$ 时, $\sqrt{(n-1)^2 + 4} \leq n$, 所以 $X > n$ 当且仅当 $AB = \sqrt{n^2 + 4}$, 此时 $a=0, c=n$ 或 $a=n, c=0$, 有 2 种取法;

④ 若 $b=1, d=2$, 则 $AB = \sqrt{(a-c)^2 + 1} \leq \sqrt{n^2 + 1}$, 所以 $X > n$ 当且仅当 $AB = \sqrt{n^2 + 1}$, 此时 $a=0, c=n$ 或 $a=n, c=0$, 有 2 种取法.

综上，当 $X > n$ 时， X 的所有可能取值是 $\sqrt{n^2+1}$ 和 $\sqrt{n^2+4}$ ，且

$$P(X = \sqrt{n^2+1}) = \frac{4}{C_{2n+4}^2}, P(X = \sqrt{n^2+4}) = \frac{2}{C_{2n+4}^2}.$$

因此， $P(X \leq n) = 1 - P(X = \sqrt{n^2+1}) - P(X = \sqrt{n^2+4}) = 1 - \frac{6}{C_{2n+4}^2}$.

4. (2014 高考数学陕西理科·第 21 题) 在一块耕地上种植一种作物，每季种植成本为 1000 元，此作物的市场价格和这块地上的产量具有随机性，且互不影响，具体情况如下表：

作物产量 (kg)	300	500	作物市场价格 (元/kg)	6	10
概率	0.5	0.5	概率	0.4	0.6

(1) 设 X 表示在这块地上种植 1 季此作物的利润，求 X 的分布列；

(2) 若在这块地上连续 3 季种植此作物，求这 3 季中至少有 2 季的利润不少于 2000 元的概率。

【答案】 (1) 详见解析； (2) 0.896

解析：(1) 设 A 表示事件“作物产量为 300 kg”， B 表示事件“作物市场价格为 6 元/kg”，

由题设知 $P(A) = 0.5$ ， $P(B) = 0.4$ ，

\therefore 利润 = 产量 \times 市场价格 - 成本，

$\therefore X$ 有可能的取值为

$$500 \times 10 - 1000 = 4000, \quad 500 \times 6 - 1000 = 2000,$$

$$300 \times 10 - 1000 = 2000, \quad 300 \times 6 - 1000 = 800.$$

$$P(X = 4000) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = (1 - 0.5) \times (1 - 0.4) = 0.3,$$

$$P(X = 2000) = P(\bar{A})P(B) + P(A)P(\bar{B}) = (1 - 0.5) \times 0.4 + 0.5 \times (1 - 0.4) = 0.5,$$

$$P(X = 800) = P(A)P(B) = 0.5 \times 0.4 = 0.2,$$

$\therefore X$ 的分布列为

X	4000	2000	800
P	0.3	0.5	0.2

(2) 设 C_i 表示事件“第 i 季利润不少于 2000 元” ($i = 1, 2, 3$)，

由题意知 C_1, C_2, C_3 相互独立，由(1)知，

$$P(C_i) = P(X = 4000) + P(X = 2000) = 0.3 + 0.5 = 0.8 \quad (i = 1, 2, 3),$$

3 季的利润均不少于 2000 元的概率为

$$P(C_1 C_2 C_3) = P(C_1)P(C_2)P(C_3) = 0.8^3 = 0.512,$$

3 季中有 2 季利润不少于 2000 元的概率为

$$P(\bar{C}_1 C_2 C_3) + P(C_1 \bar{C}_2 C_3) + P(C_1 C_2 \bar{C}_3) = 3 \times 0.8^2 \times 0.2 = 0.384,$$

所以，这 3 季中至少有 2 季的利润不少于 2000 元的概率为 $0.512 + 0.384 = 0.896$.

5. (2014 高考数学重庆理科·第 18 题) 一盒中装有 9 张各写有一个数字的卡片，其中 4 张卡片上的数字是 1, 3 张卡片上的数字

是 2, 2 张卡片上的数字是 3，从盒中任取 3 张卡片.

(1) 求所取 3 张卡片上的数字完全相同的概率；

(2) X 表示所取 3 张卡片上的数字的中位数，求 X 的分布列(注：若三个数 a, b, c 满足 $a \leq b \leq c$ ，则称 b 为这三个数的中位数).

【答案】 (1) $\frac{5}{84}$; (2) $\frac{1}{12}$

解析：(1) 由古典概型计算公式可得 $P = \frac{C_4^3 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{5}{84}$.

(2) X 的可能值为 1, 2, 3，由题意

$$p(X=1) = \frac{C_4^3 + C_4^2 C_5^1}{C_9^3} = \frac{34}{84} = \frac{17}{42},$$

$$p(X=2) = \frac{C_4^1 C_3^2 + C_4^1 C_3^1 C_2^1 + C_3^3 + C_3^2 C_2^1}{C_9^3} = \frac{43}{84},$$

$$p(X=3) = \frac{C_7^1 C_2^2}{C_9^3} = \frac{7}{84} = \frac{1}{12},$$

所以 X 的分布列为：

X	1	2	3
P	$\frac{17}{42}$	$\frac{43}{84}$	$\frac{11}{12}$

从而 $E(X) = 1 \times \frac{17}{42} + 2 \times \frac{43}{84} + 3 \times \frac{1}{12} = \frac{47}{28}$.

6. (2023 年新课标全国 I 卷·第 21 题) 甲、乙两人投篮，每次由其中一人投篮，规则如下：若命中则此人继续投篮，若未命中则换为对方投篮. 无论之前投篮情况如何，甲每次投篮的命中率均为 0.6，乙每次投篮的命中率均为 0.8. 由抽签确定第 1 次投篮的人选，第 1 次投篮的人是甲、乙的概率各为 0.5.

(1) 求第 2 次投篮的人是乙的概率；

(2) 求第 i 次投篮的人是甲的概率；

(3) 已知：若随机变量 X_i 服从两点分布，且 $P(X_i=1) = 1 - P(X_i=0) = q_i, i=1, 2, \dots, n$ ，则

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n q_i. \text{ 记前 } n \text{ 次(即从第 1 次到第 } n \text{ 次投篮)中甲投篮的次数为 } Y, \text{ 求 } E(Y).$$

【答案】 (1) 0.6

$$(2) \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{i-1} + \frac{1}{3}$$

$$(3) E(Y) = \frac{5}{18} \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n \right] + \frac{n}{3}$$

解析：(1) 记“第*i*次投篮的人是甲”为事件 A_i ，“第*i*次投篮的人是乙”为事件 B_i ，

$$\begin{aligned} \text{所以, } P(B_2) &= P(A_1 B_2) + P(B_1 B_2) = P(A_1)P(B_2 | A_1) + P(B_1)P(B_2 | B_1) \\ &= 0.5 \times (1 - 0.6) + 0.5 \times 0.8 = 0.6. \end{aligned}$$

(2) 设 $P(A_i) = p_i$ ，依题可知， $P(B_i) = 1 - p_i$ ，则

$$P(A_{i+1}) = P(A_i A_{i+1}) + P(B_i A_{i+1}) = P(A_i)P(A_{i+1} | A_i) + P(B_i)P(A_{i+1} | B_i),$$

$$\text{即 } p_{i+1} = 0.6p_i + (1 - 0.8) \times (1 - p_i) = 0.4p_i + 0.2,$$

构造等比数列 $\{p_i + \lambda\}$ ，

$$\text{设 } p_{i+1} + \lambda = \frac{2}{5}(p_i + \lambda), \text{ 解得 } \lambda = -\frac{1}{3}, \text{ 则 } p_{i+1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{5}\left(p_i - \frac{1}{3}\right),$$

又 $p_1 = \frac{1}{2}, p_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ ，所以 $\left\{p_i - \frac{1}{3}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{6}$ ，公比为 $\frac{2}{5}$ 的等比数列，

$$\text{即 } p_i - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}, p_i = \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{i-1} + \frac{1}{3}.$$

$$(3) \text{ 因为 } p_i = \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{i-1} + \frac{1}{3}, i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\text{所以当 } n \in \mathbb{N}^* \text{ 时, } E(Y) = p_1 + p_2 + \dots + p_n = \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{2}{5}} + \frac{n}{3} = \frac{5}{18} \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n \right] + \frac{n}{3},$$

$$\text{故 } E(Y) = \frac{5}{18} \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n \right] + \frac{n}{3}.$$

7. (2020 江苏高考·第 25 题) 甲口袋中装有 2 个黑球和 1 个白球，乙口袋中装有 3 个白球。现从甲、乙两口袋中各任取一个球交换放入另一口袋，重复 n 次这样的操作，记甲口袋中黑球个数为 X_n ，恰有 2 个黑球的概率为 p_n ，恰有 1 个黑球的概率为 q_n 。

(1) 求 $p_1 \cdot q_1$ 和 $p_2 \cdot q_2$ ；

(2) 求 $2p_n + q_n$ 与 $2p_{n-1} + q_{n-1}$ 的递推关系式和 X_n 的数学期望 $E(X_n)$ (用 n 表示)。

【答案】 (1) $p_1 = \frac{1}{3}, q_1 = \frac{2}{3}; p_2 = \frac{7}{27}, q_2 = \frac{16}{27};$ (2) $2p_n + q_n = \frac{1}{3}(2p_{n-1} + q_{n-1}) + \frac{2}{3}$

【解析】 (1) $p_1 = \frac{1 \times 3}{3 \times 3} = \frac{1}{3}, q_1 = \frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{2}{3},$

$$p_2 = p_1 \times \frac{1 \times 3}{3 \times 3} + q_1 \times \frac{1 \times 2}{3 \times 3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{9} = \frac{7}{27},$$

$$q_2 = p_1 \times \frac{2 \times 3}{3 \times 3} + q_1 \times \frac{1 \times 1 + 2 \times 2}{3 \times 3} + 0 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{5}{9} = \frac{16}{27}.$$

(2) $p_n = p_{n-1} \times \frac{1 \times 3}{3 \times 3} + q_{n-1} \times \frac{1 \times 2}{3 \times 3} = \frac{1}{3} p_{n-1} + \frac{2}{9} q_{n-1},$

$$q_n = p_{n-1} \times \frac{2 \times 3}{3 \times 3} + q_{n-1} \times \frac{1 \times 1 + 2 \times 2}{3 \times 3} + (1 - p_{n-1} - q_{n-1}) \times \frac{3 \times 2}{3 \times 3} = -\frac{1}{9} q_{n-1} + \frac{2}{3},$$

因此 $2p_n + q_n = \frac{2}{3} p_{n-1} + \frac{1}{3} q_{n-1} + \frac{2}{3},$

从而 $2p_n + q_n = \frac{1}{3}(2p_{n-1} + q_{n-1}) + \frac{2}{3}, \therefore 2p_n + q_n - 1 = \frac{1}{3}(2p_{n-1} + q_{n-1} - 1),$

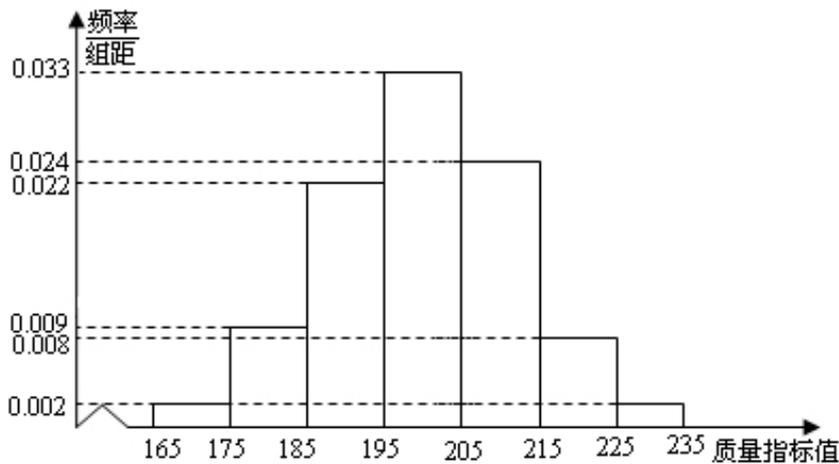
即 $2p_n + q_n - 1 = (2p_1 + q_1 - 1) \frac{1}{3^{n-1}}, \therefore 2p_n + q_n = 1 + \frac{1}{3^n}.$

又 X_n 的分布列为

X_n	0	1	2
P	$1 - p_n - q_n$	q_n	p_n

故 $E(X_n) = 2p_n + q_n = 1 + \frac{1}{3^n}.$

8. (2014 高考数学课标 1 理科·第 18 题) 从某企业的某种产品中抽取 500 件, 测量这些产品的一项质量指标值, 由测量结果得如下频率分布直方图:



(1) 求这 500 件产品质量指标值的样本平均数 \bar{x} 和样本方差 s^2 (同一组数据用该区间的中点值作代表);

(2) 由频率分布直方图可以认为, 这种产品的质量指标值 Z 服从正态分布 $N(\mu, \delta^2)$, 其中 μ 近似为样本平均数 \bar{x} , δ^2 近似为样本方差 s^2 .

(i) 利用该正态分布, 求 $P(187.8 < Z < 212.2)$;

(ii) 某用户从该企业购买了 100 件这种产品, 记 X 表示这 100 件产品中质量指标值为于区间 $(187.8, 212.2)$ 的产品件数, 利用 (i) 的结果, 求 EX .

附: $\sqrt{150} \approx 12.2$.

若 $Z \sim N(\mu, \delta^2)$, 则 $P(m-d < Z < m+d) = 0.6826$ $P(m-2d < Z < m+2d) = 0.9544$.

【答案】 解析: (1) 抽取产品质量指标值的样本平均数 \bar{x} 和样本方差 s^2 分别为

$$\bar{x} = 170 \times 0.02 + 180 \times 0.09 + 190 \times 0.22 + 200 \times 0.33$$

$$+ 210 \times 0.24 + 220 \times 0.08 + 230 \times 0.02$$

$$= 200$$

$$s^2 = (-30)^2 \times 0.02 + (-20)^2 \times 0.09 + (-10)^2 \times 0.22 + 0 \times 0.33$$

$$+ (10)^2 \times 0.24 + (20)^2 \times 0.08 + (30)^2 \times 0.02$$

$$= 150$$

(2) (i) 由 (1) 知 $Z \sim N(200, 150)$, 从而

$$P(187.8 < Z < 212.2) = P(200 - 12.2 < Z < 200 + 12.2) = 0.6826.$$

(ii) 由 (i) 知, 一件产品中质量指标值为于区间 $(187.8, 212.2)$ 的概率为 0.6826

依题意知 $X \sim B(100, 0.6826)$, 所以 $EX = 100 \times 0.6826 = 68.26$.

考点: (1) 频率分布直方图的绘制及应用; (2) 离散型随机变量的均值及方差; (3) 正态分布的应用; (4) 数形结合思想

难度: C

备注: 高频考点

8. (2014 高考数学天津理科·第 16 题) 某大学志愿者协会有 6 名男同学, 4 名女同学. 在这 10 名同学中, 3 名同学来自数学学院, 其余 7 名同学来自物理、化学等其他互不相同的七个学院. 现从这 10 名同学中随机选取 3 名同学, 到希望小学进行支教活动(每位同学被选到的可能性相同).

(I) 求选出的 3 名同学是来自互不相同学院的概率;

(II) 设 X 为选出的 3 名同学中女同学的人数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望.

【答案】 (I) $\frac{49}{60}$; (II) 详见解析.

解析: (I) 设“选出的 3 名同学是来自互不相同的学院”为事件 A , 则 $P(A) = \frac{C_3^1 \cdot C_7^2 + C_3^0 \cdot C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{49}{60}$.

所以, 选出的 3 名同学是来自互不相同学院的概率为 $\frac{49}{60}$.

(II) 随机变量 X 的所有可能值为 0, 1, 2, 3, 则 $P(X = k) = \frac{C_4^k \cdot C_6^{3-k}}{C_{10}^3} (k = 0, 1, 2, 3)$.

所以, 随机变量 X 的分布列是

X	0	1	2	3
-----	---	---	---	---

P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$
-----	---------------	---------------	----------------	----------------

随机变量 X 的数学期望 $E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{30} = \frac{6}{5}$.

9. (2014 高考数学四川理科·第 17 题) 一款击鼓小游戏的规则如下：每盘游戏都需要击鼓三次，每次击鼓要么出现一次音乐，要么不出现音乐；每盘游戏击鼓三次后，出现一次音乐获得 10 分，出现两次音乐获得 20 分，出现三次音乐获得 100 分，没有出现音乐则扣除 200 分(即获得-200 分). 设每次击鼓出现音乐的概率为 $\frac{1}{2}$ ，且各次击鼓出现音乐相互独立.

(I) 设每盘游戏获得的分数为 X ，求 X 的分布列；

(II) 玩三盘游戏，至少有一盘出现音乐的概率是多少？

(III) 玩过这款游戏的许多人发现，若干盘游戏后，与最初的分数相比，分数没有增加反而减少了. 请运用概率统计的相关知识分析分数减少的原因.

【答案】 解析：(I) X 可能的取值为：10, 20, 100, -200. 根据题意，有

$$P(X = -200) = C_3^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \quad P(X = 10) = C_3^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8},$$

$$P(X = 20) = C_3^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}, \quad P(X = 100) = C_3^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8},$$

所以 X 的分布列为

X	-200	10	20	100
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

(II) 设“第 i 盘游戏没有出现音乐”为事件 A_i ($i=1, 2, 3$)，则

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(X = -200) = \frac{1}{8}.$$

所以“三盘游戏中至少有一次出现音乐”的概率为

$$1 - P(A_1 A_2 A_3) = 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^3 = 1 - \frac{1}{512} = \frac{511}{512}.$$

因此，玩三盘游戏至少有一盘出现音乐的概率是 $\frac{511}{512}$.

(III) X 的数学期望为 $EX = 10 \times \frac{3}{8} + 20 \times \frac{3}{8} + 100 \times \frac{1}{8} - 200 \times \frac{1}{8} = -\frac{5}{4}$.

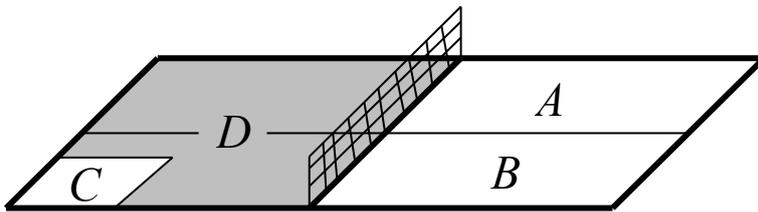
这表明，获得分数 X 的均值为负，

因此，多次游戏之后分减少的可能性更大.

10. (2014 高考数学山东理科·第 18 题) 乒乓球台面被球网分隔成甲、乙两部分，如图，甲上有两个不相交

的区域 A, B ，乙被划分为两个不相交的区域 C, D 。某次测试要求队员接到落点在甲上的来球后向乙回球。规定：回球一次，落点在 C 上记 3 分，在 D 上记 1 分，其它情况记 0 分。对落点在 A 上的来球，队员小明回球的落点在 C 上的概率为 $\frac{1}{2}$ ，在 D 上的概率为 $\frac{1}{3}$ ；对落点在 B 上的来球，小明回球的落点在 C 上的概率为 $\frac{1}{5}$ ，在 D 上的概率为 $\frac{3}{5}$ 。假设共有两次来球且落在 A, B 上各一次，小明的两次回球互不影响。求：

- (I) 小明两次回球的落点中恰有一次的落点在乙上的概率；
 (II) 两次回球结束后，小明得分之和 ξ 的分布列与数学期望。



【答案】 (I) $\frac{3}{10}$ ；(II) 见解析

解析：(I) 记 A_i 为事件“小明对落点在 A 上的来球回球的得分为 i 分” ($i = 0, 1, 3$)

$$\text{则 } P(A_3) = \frac{1}{2}, P(A_1) = \frac{1}{3}, P(A_0) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6};$$

记 B_i 为事件“小明对落点在 B 上的来球回球的得分为 i 分” ($i = 0, 1, 3$)

$$\text{则 } P(B_3) = \frac{1}{5}, P(B_1) = \frac{3}{5}, P(B_0) = 1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5};$$

记 D 为事件“小明两次回球的落点中恰有一次的落点在乙上”，

由题意， $D = A_3B_0 + A_1B_0 + A_0B_1 + A_0B_3$ ，由事件的独立性及互斥性得

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A_3B_0 + A_1B_0 + A_0B_1 + A_0B_3) \\ &= P(A_3B_0) + P(A_1B_0) + P(A_0B_1) + P(A_0B_3) \\ &= P(A_3)P(B_0) + P(A_1)P(B_0) + P(A_0)P(B_1) + P(A_0)P(B_3) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

所以小明两次回球的落点中恰有一次的落点在乙上的概率为 $\frac{3}{10}$ 。

(II) 由题意，随机变量 ξ 可能的取值为 0, 1, 2, 3, 4, 6。

由事件的独立性及互斥性得

$$P(\xi = 0) = P(A_0B_0) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{30};$$

$$P(\xi = 1) = P(A_1B_0 + A_0B_1) = P(A_1B_0) + P(A_0B_1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{6};$$

$$P(\xi = 2) = P(A_1B_1) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5};$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/467022025021006160>