全国百强名校 2023-2024 学年高三 3 月份第一次模拟考试数学试卷

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

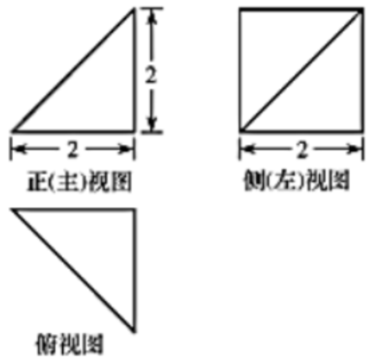
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．设 $a,b\in(1,+\infty)$，则“$a>b$ ”是“$\log_a b<1$”的（ ）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

2．某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的表面积为（　　）



A．8　　B．$\frac{8}{3}$　　C．$8+2\sqrt{2}$　　D．$8+4\sqrt{2}$

3．在三棱锥 $D-ABC$ 中，$AB=BC=CD=DA=1$，且 $AB\perp BC,CD\perp DA,M,N$ 分别是棱 BC，CD 的中点，下面四个结论：

① $AC\perp BD$；

② $MN//$平面 ABD；

③三棱锥 $A-CMN$ 的体积的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{12}$；

④ AD 与 BC 一定不垂直.

其中所有正确命题的序号是（　　）

A．①②③　　B．②③④　　C．①④　　D．①②④

4．已知正三角形 ABC 的边长为 2，D 为边 BC 的中点，E、F 分别为边 AB、AC 上的动点，并满足 $|\overrightarrow{AE}|=2|\overrightarrow{CF}|$，则 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}$ 的取值范围是（　　）

A．$[-\frac{1}{2},\frac{1}{16}]$　　B．$(-\infty,\frac{1}{16}]$　　C．$[-\frac{1}{2},0]$　　D．$(-\infty,0]$

5．若关于x的不等式$\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{k}{x}} \le \frac{1}{27}$有正整数解，则实数$k$的最小值为（　　）

A． 9　　　　**B．** 8　　　　**C．** 7　　　　**D．** 6

6．偶函数$f\left(x\right)$关于点$\left(1,0\right)$对称，当$-1\leqslant x\leqslant 0$时，$f\left(x\right)=-x^2+1$，求$f\left(2020\right)=$（　　）

A． 2　　　　**B．** 0　　　　**C．** -1　　　　**D．** 1

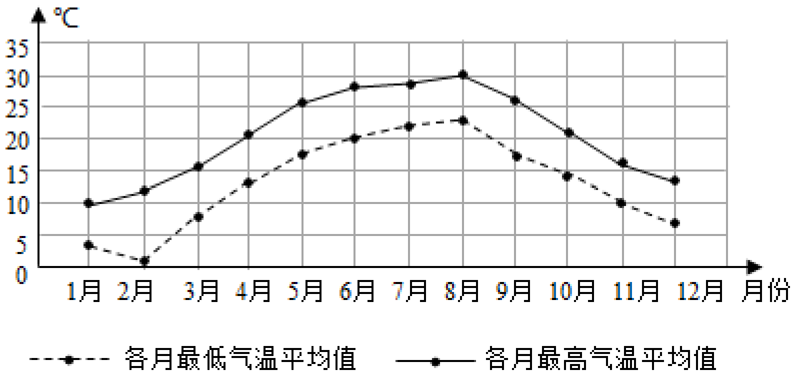
7．已知变量x，y满足不等式组$\begin{cases} x+y\le 2 \\ x-y\le 1 \\ x\ge 0 \end{cases}$，则$2x-y$的最小值为（　　）

A． -4　　　　**B．** -2　　　　**C．** 0　　　　**D．** 4

8．设直线l的方程为$x-2y+m=0(m\in \mathbf{R})$，圆的方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=25$，若直线$l$被圆所截得的弦长为$2\sqrt{5}$，则实数$m$的取值为

A． -9或11　　　　**B．** -7或11　　　　**C．** -7　　　　**D．** -9

9．某市气象部门根据2018年各月的每天最高气温平均数据,绘制如下折线图,那么,下列叙述错误的是(　　)



A． 各月最高气温平均值与最低气温平均值总体呈正相关

B． 全年中,2月份的最高气温平均值与最低气温平均值的差值最大

C． 全年中各月最低气温平均值不高于10°C的月份有5个

D． 从2018年7月至12月该市每天最高气温平均值与最低气温平均值呈下降趋势

10．赵爽是我国古代数学家、天文学家，大约公元222年，赵爽为《周髀算经》一书作序时，介绍了“勾股圆方图”，又称“赵爽弦图”（以弦为边长得到的正方形是由4个全等的直角三角形再加上中间的一个小正方形组成的，如图（1）)，类比“赵爽弦图”，可类似地构造如图（2）所示的图形，它是由6个全等的三角形与中间的一个小正六边形组成的一个大正六边形，设$A'F'=2F'A$，若在大正六边形中随机取一点，则此点取自小正六边形的概率为（　　）

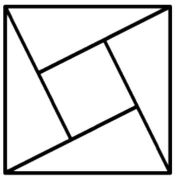


图1

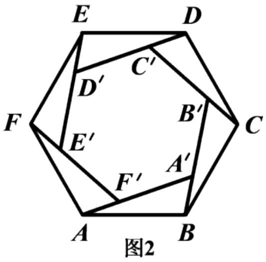


图2

A．$\frac{2\sqrt{13}}{13}$　　B．$\frac{4}{13}$

C．$\frac{2\sqrt{7}}{7}$　　D．$\frac{4}{7}$

11．某工厂利用随机数表示对生产的600个零件进行抽样测试，先将600个零件进行编号，编号分别为001，002，……，599,600.从中抽取60个样本，下图提供随机数表的第4行到第6行：

32 21 18 34 29	78 64 54 07 32	52 42 06 44 38	12 23 43 56 77	35 78 90 56 42
84 42 12 53 31	34 57 86 07 36	25 30 07 32 86	23 45 78 89 07	23 68 96 08 04
32 56 78 08 43	67 89 53 55 77	34 89 94 83 75	22 53 55 78 32	45 77 89 23 45

若从表中第6行第6列开始向右读取数据，则得到的第6个样本编号是（　　）

A．324　　B．522　　C．535　　D．578

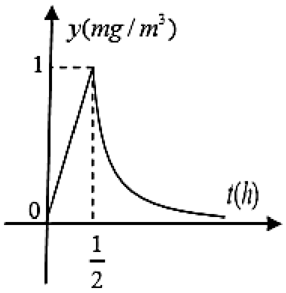
12．集合$P=\{x\in N\mid -2<x-1<2\}$的子集的个数是（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．8

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．已知圆 O: $x^2+y^2=4$，直线l与圆O交于P，Q两点，$A(2,2)$，若$AP^2+AQ^2=40$，则弦PQ的长度的最大值为___________.

14．为了抗击新型冠状病毒肺炎，某医药公司研究出一种消毒剂，据实验表明，该药物释放量$y(mg/m^3)$与时间t(h)的函数关系为$y=\begin{cases}kt, & 0<t<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{kt}, & t\geq\frac{1}{2}\end{cases}$（如图所示），实验表明，当药物释放量$y<0.75(mg/m^3)$对人体无害.（1）$k=$______；（2）为了不使人身体受到药物伤害，若使用该消毒剂对房间进行消毒，则在消毒后至少经过______分钟人方可进入房间.

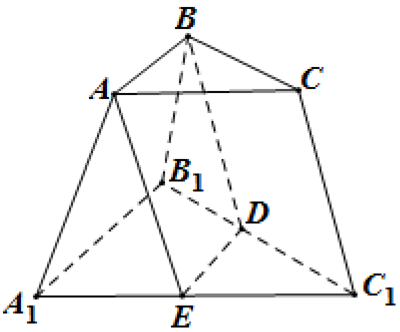


15．在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E是正方形BB_1C_1C的中心，M为C_1D_1的中点，过A_1M的平面α与直线DE垂直，则平面α截正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$所得的截面面积为______.

16．设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且对任意正整数n，都有$\begin{vmatrix} a_n & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2n & S_n \end{vmatrix}=0$，则$a_1=$___

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12分）如图，已知在三棱台$ABC-A_1B_1C_1$中，$AC=2AB=2$，$BC=\sqrt{3}$，$A_1B_1\perp BB_1$.



（1）求证：$AB\perp CC_1$；

（2）过AB的平面$ABDE$分别交B_1C_1，A_1C_1于点D，E，且分割三棱台$ABC-A_1B_1C_1$所得两部分几何体的体积比为$V_{AA_1E-BB_1D}=V_{ABC-BDC_1}=4:3$，几何体$ABC-EDC_1$为棱柱，求$A_1B_1$的长.

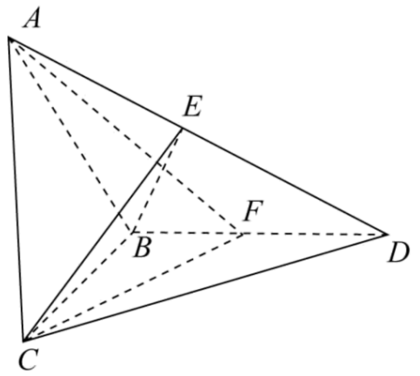
提示：台体的体积公式$V=\frac{1}{3}\left(S'+\sqrt{S'S}+S\right)h$（$S'$，$S$分别为棱台的上、下底面面积，$h$为棱台的高）.

18．（12分）在平面直角坐标系xOy中，直线l的参数方程为$\begin{cases} x=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=1-\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$（$t$为参数），以坐标原点$O$为极点，$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系，圆$C$的极坐标方程为$\rho^2-4\rho\cos\theta=3$.

（1）求直线l的普通方程和圆C的直角坐标方程；

（2）直线l与圆C交于A，B两点，点$P(2,1)$，求$|PA|\cdot|PB|$的值.

19．（12 分）如图所示，在三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB=BC=BD=2$，$AD=2\sqrt{3}$，$\angle CBA=\angle CBD=\dfrac{\pi}{2}$，点 E 为 AD 中点．



（1）求证：平面 $ACD\perp$ 平面 BCE；

（2）若点 F 为 BD 中点，求平面 BCE 与平面 ACF 所成锐二面角的余弦值．

20．（12 分）新高考，取消文理科，实行“$3+3$”，成绩由语文、数学、外语统一高考成绩和自主选考的 **3** 门普通高中学业水平考试等级性考试科目成绩构成.为了解各年龄层对新高考的了解情况，随机调查 **50** 人（把年龄在 $[15,45)$ 称为中青年，年龄在 $[45,75)$ 称为中老年），并把调查结果制成下表：

年龄（岁）	$[15,25)$	$[25,35)$	$[35,45)$	$[45,55)$	$[55,65)$	$[65,75)$
频数	**5**	**15**	**10**	**10**	**5**	**5**
了解	**4**	**12**	**6**	**5**	**2**	**1**

（1）分别估计中青年和中老年对新高考了解的概率；

（2）请根据上表完成下面 2×2 列联表，是否有 **95%** 的把握判断对新高考的了解与年龄（中青年、中老年）有关？

	了解新高考	不了解新高考	总计
中青年			
中老年			
总计			

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

$P\left(K^2 \ge k\right)$	**0.050**	**0.010**	**0.001**
k	**3.841**	**6.635**	**10.828**

（3）若从年龄在$[55,65)$的被调查者中随机选取3人进行调查，记选中的3人中了解新高考的人数为X，求X的分布列以及$E(X)$.

21.（12分）若关于x的方程$x^2+(m-2)x+5-m=0$的两根都大于2，求实数m的取值范围.

22.（10分）在ΔABC中，角A、B、C的对边分别为a、b、c，且$2\sqrt{3}\sin^2\frac{A}{2}+\sin A-\sqrt{3}=0$.

（1）求角A的大小；

（2）已知ΔABC外接圆半径$R=\sqrt{3}$，$AC=\sqrt{3}$,求ΔABC的周长.

参考答案

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

根据充分条件和必要条件的定义结合对数的运算进行判断即可.

【详解】

∵a，b∈（1，+∞），

∴$a>b\Rightarrow \log_a b<1$，

$\log_a b<1\Rightarrow a>b$，

∴$a>b$是$\log_a b<1$的充分必要条件，

故选C.

【点睛】

本题主要考查充分条件和必要条件的判断，根据不等式的解法是解决本题的关键.

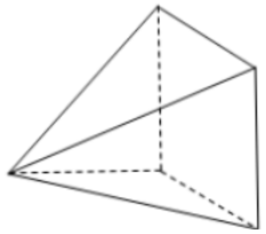
2、D

【解析】

根据三视图还原几何体为四棱锥，即可求出几何体的表面积.

【详解】

由三视图知几何体是四棱锥，如图，



且四棱锥的一条侧棱与底面垂直，四棱锥的底面是正方形,边长为2,棱锥的高为2，

所以$S=2\times2+2\times\frac{1}{2}\times2\times2+2\times\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}=8+4\sqrt{2}$，

故选：D

【点睛】

本题主要考查了由三视图还原几何体，棱锥表面积的计算，考查了学生的运算能力，属于中档题.

3、D

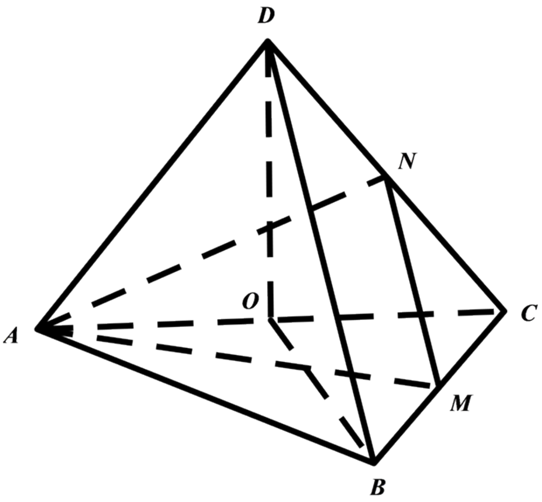
【解析】

①通过证明$AC\perp$平面OBD，证得$AC\perp BD$；②通过证明$MN//BD$，证得$MN//$平面ABD；③求得三棱锥$A-CMN$体积的最大值，由此判断③的正确性；④利用反证法证得AD与BC一定不垂直.

【详解】

设AC的中点为O，连接OB,OD，则$AC\perp OB$，$AC\perp OD$，又$OB\cap OD=O$，所以$AC\perp$平面OBD，所以$AC\perp BD$，故①正确；因为$MN//BD$，所以$MN//$平面ABD，故②正确；当平面DAC与平面ABC垂直时，V_{A-CMN}最大，最大值为$V_{A-CMN}=V_{N-ACM}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{48}$，故③错误；若$AD$与$BC$垂直，又因为$AB\perp BC$，所以$BC\perp$平面$ABD$，所以$BC\perp BD$，又$BD\perp AC$，所以$BD\perp$平面$ABC$，所以$BD\perp OB$，因为$OB=OD$，所以显然$BD$与$OB$不可能垂直，故④正确.

故选：D



【点睛】

本小题主要考查空间线线垂直、线面平行、几何体体积有关命题真假性的判断，考查空间想象能力和逻辑推理能力，属于中档题.

4、A

【解析】

建立平面直角坐标系，求出直线 $AB: y=\sqrt{3}(x+1)$， $AC: y=-\sqrt{3}(x-1)$

设出点 $E(m,\sqrt{3}(m+1)), F(n,-\sqrt{3}(n-1))$，通过 $|\overrightarrow{AE}|=2|\overrightarrow{CF}|$，找出 m 与 n 的关系.

通过数量积的坐标表示，将 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}$ 表示成 m 与 n 的关系式，消元，转化成 m 或 n 的二次函数，利用二次函数的相关知识，求出其值域，即为 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}$ 的取值范围.

【详解】

以 D 为原点，BC 所在直线为 x 轴，AD 所在直线为 y 轴建系，

设 $A(0,\sqrt{3}), B(-1,0), C(1,0)$，则直线 $AB: y=\sqrt{3}(x+1)$ ， $AC: y=-\sqrt{3}(x-1)$

设点 $E(m,\sqrt{3}(m+1)), F(n,-\sqrt{3}(n-1))$， $-1\le m<0, 0<n\le 1$

所以 $\overrightarrow{AE}=(m,\sqrt{3}m), \overrightarrow{CF}=(n-1,-\sqrt{3}(n-1))$

由 $|\overrightarrow{AE}|=2|\overrightarrow{CF}|$ 得 $m^2=4(n-1)^2$ ，即 $m=2(n-1)$ ，

所以 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=mn-3(m+1)(n-1)=-4n^2+7n-3=-4(n-\frac{7}{8})^2+\frac{1}{16}$，

由 $-1\le m=2(n-1)<0$ 及 $0<n\le 1$，解得 $\frac{1}{2}\le n<1$，由二次函数 $y=-4(n-\frac{7}{8})^2+\frac{1}{16}$ 的图像知， $y\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{16}]$，所以 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}$ 的取值范围是 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{16}]$．故选 A.

【点睛】

本题主要考查解析法在向量中的应用，以及转化与化归思想的运用.

5、**A**

【解析】

根据题意可将$\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{k}{x}}\le\frac{1}{27}$转化为$\frac{\ln x}{x}\ge\frac{3\ln 3}{k}$，令$f\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}$，利用导数，判断其单调性即可得到实数$k$的最小值.

【详解】

因为不等式有正整数解，所以$x>0$，于是$\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{k}{x}}\le\frac{1}{27}$转化为$\frac{k\ln x}{x}\ge 3\ln 3$，　$x=1$显然不是不等式的解，当$x>1$时，$\ln x>0$，所以$\frac{k\ln x}{x}\ge 3\ln 3$可变形为$\frac{\ln x}{x}\ge\frac{3\ln 3}{k}$.

令$f\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}$，则$f'\left(x\right)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

∴函数$f\left(x\right)$在$\left(0,e\right)$上单调递增，在$\left(e,+\infty\right)$上单调递减，而$2<e<3$，所以

当$x\in\mathbf{N}^*$时，$f_{\max}=\max\left\{f\left(2\right),f\left(3\right)\right\}=\frac{\ln 3}{3}$，故$\frac{\ln 3}{3}\ge\frac{3\ln 3}{k}$，解得$k\ge 9$.

故选：**A.**

【点睛】

本题主要考查不等式能成立问题的解法，涉及到对数函数的单调性的应用，构造函数法的应用，导数的应用等，意在考查学生的转化能力，属于中档题.

6、**D**

【解析】

推导出函数$y=f\left(x\right)$是以4为周期的周期函数，由此可得出$f\left(2020\right)=f\left(0\right)$，代值计算即可.

【详解】

由于偶函数$y=f\left(x\right)$的图象关于点$\left(1,0\right)$对称，则$f\left(-x\right)=f\left(x\right)$，$f\left(2+x\right)+f\left(-x\right)=0$，

$\therefore f\left(x+2\right)=-f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$，则$f\left(x+4\right)=-f\left(x+2\right)=f\left(x\right)$，

所以，函数$y=f\left(x\right)$是以4为周期的周期函数，

由于当$-1\leqslant x\leqslant 0$时，$f\left(x\right)=-x^2+1$，则$f\left(2020\right)=f\left(4\times 505\right)=f\left(0\right)=1$.

故选：**D.**

【点睛】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/467044032052006116