第9章　二重积分及其应用

- ❖§9.1 二重积分的概念与性质
- ❖§9.2 二重积分的计算
- ❖§9.3 二重积分的应用

§9.1 二重积分的概念与性质

内容提要

- 一、二重积分的定义
- 二、二重积分的性质

9.1.1 引例

引例 9.1.1 曲顶柱体的体积

设有一个立体，它的底是 xOy 平面上的有界闭区域 D

面是以 D 的边界曲线为准线而母线平行于 z 轴的柱面，

D $z = f(x, y)$ $f(x, y) \geq 0$ 定义在区域

D 上的二元函数 （ ）所表示的曲面，以区域

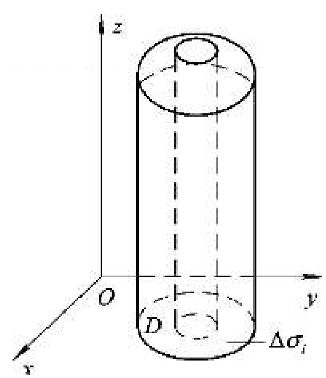


图9-1

现在来求此曲顶柱体的体积．如果 $z = f(x, y)$ 在 D 等于零的常数，则上述曲顶柱体的体积可用公式

体积 = 高 × 底面积

来计算

但当 $z = f(x, y)$ 在 D 上不是恒为常数时，点 (x, y) 在 D 上变化，高 $f(x, y)$ 不断变化，因而曲顶柱体的体积不能用上面的公式来计算．

我们可以借鉴求曲边梯形面积的方法求曲顶柱体的体积．

（1）分割

将区域 D 任意分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$，其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小区域，也表示它的面积．分别以每个小区域为底，以它们的边界曲线为准线作母线平行于 z 轴的柱面，这些柱面把曲顶柱体分成了 n 个小曲顶柱体，其体积记为 $\Delta V_i\ (i=1, 2, \cdots, n)$．

（2）近似

为了求每个小曲顶柱体的体积 ΔV_i ，在每个小区域 $\Delta\sigma_i$ (ξ_i, η_i) ，将第 i 个曲顶柱体的体积 ΔV_i 用高为 $f(\xi_i, \eta_i)$ ，底为 $\Delta\sigma_i$ 体积 $f(\xi_i, \eta_i)\ \Delta\sigma_i$ 来近似表示，即

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i, \quad i=1, 2, \cdots, n.$$

（3）求和

对 n 个小曲顶柱体求和，则所求曲顶柱体体积 V 可近似地表示

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

（4）取极限

用 λ 表示 n 个小区域直径的最大值(有界闭区域的直径是指该区域中任意两点间距离的最大值)．当区域分割越来越细密，λ 越来越小时，和式 $\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 与曲顶柱体的体积越来越接近．因此，当 $\lambda\to 0$ 时，上述和式的极限就是曲顶柱体体积，即

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

引例9.1.2 平面薄片的质量

设有质量非均匀分布的平面薄片，在 xOy 面上所占有的区域记作 D（图 9-2），它的面密度为 $\rho(x, y)$，其中 $\rho(x, y)$ 在 D 上连续，求这个平面薄片的质量.

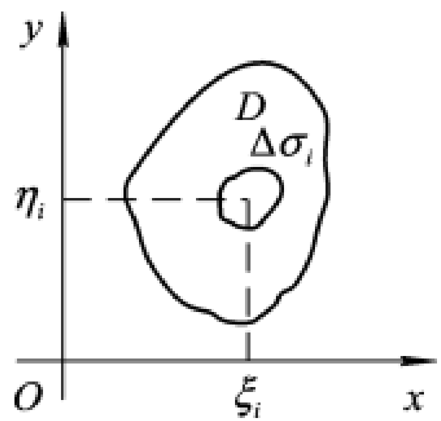


图9-2

当薄片质量分布均匀时，即面密度是常数，其质量可以用公式

质量=　　X
面密度
　　　　面积

来计算.

当面密度是变量，薄片的质量就不能用上式来计算，因此，我们仍采用处理曲顶柱体体积的方法来求质量分布不均匀薄片的质量.

（1）分割

将区域 D 分割成 n 个小区域 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$，仍然用 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小区域的面积.

（2）近似

在每个小区域 $\Delta\sigma_i$ 内任取一点 (ξ_i, η_i)，近似地将小块 $\Delta\sigma_i$ 看成是质量均匀分布的，其面密度为 $\rho(\xi_i, \eta_i)$，则小块 $\Delta\sigma_i$ 的质量 Δm_i 近似表示为

$$\Delta m_i \approx \rho(\xi_i, \eta_i)\,\Delta\sigma_i.$$

（3）求和

整个薄片的质量m可近似地表示为

$$m=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i\approx\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

（4）取极限

用λ表示n个小区域直径的最大值，当$\lambda\to 0$时，上述和式的极限就是平面薄片的质量

$$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

数学本质上，以上两个问题的处理方法及运算结构是完全一样的，最后都归结为求二元函数的同一形式的和式的极限．在几何、力学、物理和工程技术中，有许多几何量和物理量都可归结为形如上述两个例子所求的和式的极限．现把问题的具体背景脱离掉，抽象出处理这类问题的一般数学方法，从而得到数学上二重积分的概念．

9.1.2 二重积分的定义

定义 9.1.1 设 $z=f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数．将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$，其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域，也表示它的面积．在每个 $\Delta\sigma_i$ 内任取一点 (ξ_i,η_i)，作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，并作和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，如果当各小闭区域直径的最大值 $\lambda\to 0$ 时，这和式的极限总存在，且与闭区域 D 的分法和点 (ξ_i,η_i) 的取法无关，则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的二重积分，记作 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，即

$$\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i .$$

其中，$f(x, y)$称为被积函数，$f(x, y)\mathrm{d}\sigma$称为被积表达式，$\mathrm{d}\sigma$称为面积元素，D称为积分区域.

根据二重积分的定义可知，上述讨论的曲顶柱体体积V是$f(x, y)$在区域D上的二重积分

$$V = \iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma .$$

平面薄片的质量M是面密度$\rho(x, y)$在区域D上的二重积分

$$M = \iint_D \rho(x, y)\mathrm{d}\sigma .$$

说明：

（1）如果二重积分$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$存在，就称函数$f(x, y)$在区域$D$上是可积的. 可以证明，如果函数$f(x, y)$在有界闭区域$D$上连续，则$f(x, y)$在$D$上可积.

（2）在二重积分的定义中，对闭区域的划分是任意的. 在直角坐标系下用平行于坐标轴的直线网来划分区域D，则面积元素为$\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，故二重积分可写为

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

（3）在 D 上当 $f(x, y) \geq 0$ 时，$\iint\limits_{D} f(x, y)\mathrm{d}\sigma$ 等于曲面 $z = f(x, y)$ 在区域 D 上所对应的曲顶柱体的体积；在 D 上当 $f(x, y) < 0$ 时，$\iint\limits_{D} f(x, y)\mathrm{d}\sigma$ 等于曲面 $z = f(x, y)$ 在区域 D 上所对应的曲顶柱体的体积的负值；如果 $f(x, y)$ 在 D 上的某些部分上是正的，而在另外的部分上是负的，那么 $\iint\limits_{D} f(x, y)\mathrm{d}\sigma$ 等于这些部分区域上的曲顶柱体体积的代数和.

9.1.3 二重积分的性质

由于二重积分与定积分的定义具有类似的结构，因此二重积分也有与定积分相类似的性质. 而且其证明也与定积分性质的证明类似. 下面所涉及的函数均假定在 D 上可积.

性质 9.1.1 被积函数中的常数因子可以提到二重积分号外面，即

$$\iint_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma = k\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \quad (k\text{ 为常数}).$$

性质 9.1.2 两个函数代数和的二重积分等于这两个函数的二重积分的代数和，即

$$\iint_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \pm \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma .$$

性质 9.1.2 可以推广到有限多个可积函数的情形.

性质 9.1.3 二重积分对积分区域具有可加性，即如果闭区域 D 可被曲线分为两个没有公共内点的闭子区域 D_1 和 D_2，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

性质 9.1.4 如果在闭区域 D 上，$f(x,y)\equiv 1$，S 为 D 的面积，那么

$$\iint_D 1\mathrm{d}\sigma = \iint_D \mathrm{d}\sigma = S.$$

性质 9.1.5 如果在闭区域 D 上，有 $f(x,y)\le g(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

性质 9.1.6 设 M 和 m 分别是函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上的最大值和最小值，σ 为 D 的面积，则

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma \leq M\sigma .$$

这个不等式称为二重积分的估值不等式.

性质 9.1.7 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续，σ 为 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ, η)，使得

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi, \eta)\sigma, \quad (\xi, \eta) \in D.$$

这个性质称为二重积分的中值定理. 其几何意义是：在区域 D 上以曲面 $f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体的体积，等于以区域 D 内某一点 (ξ,η) 的函数值 $f(\xi,\eta)$ 为高的平顶柱体的体积.

小 结

1. 二重积分的定义

（1）理解二重积分的定义

（2）能用自己的语言表述二重积分的定义

2. 二重积分的性质

（1）理解二重积分的性质

（2）会用二重积分的性质解决问题

9.2 二重积分的计算

一、直角坐标系下二重积分的计算

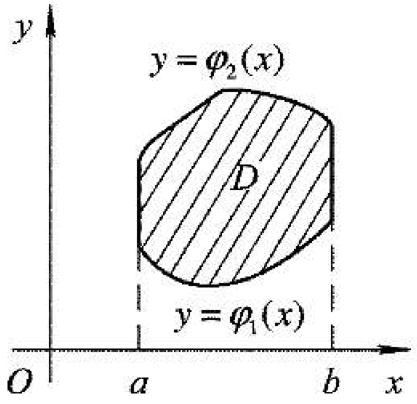
二、极坐标系下二重积分的计算

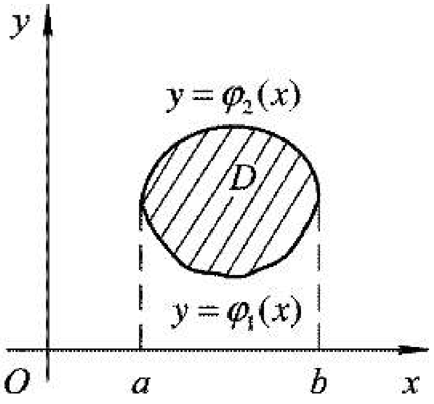
按照二重积分的定义来计算二重积分，对少数特别简单的被积函数和积分区域来说是可行的，但对一般的函数和积分区域来说，这不是一种切实可行的方法．本节介绍一种计算二重积分的方法，其基本思想是将二重积分化为二次定积分来计算，转化后的这种二次定积分常称为二次积分或累次积分．

一、直角坐标系下二重积分的计算

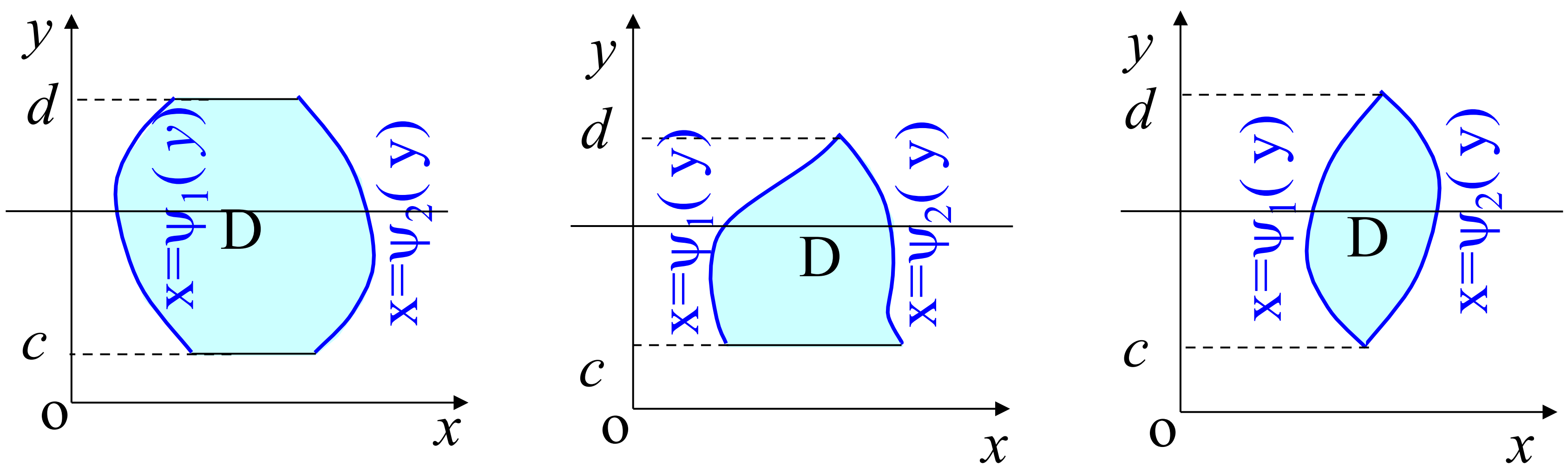
• **1. X型区域和Y型区域**

(1) X型区域　形如$\{(x,y)|a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ 的闭区域称为X型区域, 其中$\varphi_1(x)$和$\varphi_2(x)$在区 间$[a,b]$上连续. 这种区域的特点是:穿过区域且平行于y 轴的直线与区域的边界相交不 多于两个点, 如下图所示.





(2) Y型区域 形如$\{(x,y)|c \le x \le d,\ \psi_1(x) \le x \le \psi_2(x)\}$ 的闭区域称为Y型区域, 其中$\psi_1(x)$和$\psi_2(x)$在区 间$[c,d]$上连续. 这种区域的特点是:穿过区域且平行于x 轴的直线与区域的边界相交不 多于两个点, 如下图所示.



•2. 二重积分的计算

下面用几何观点来讨论二重积分 $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$ 的计算问题.

在直角坐标系下，二重积分可写成

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$