

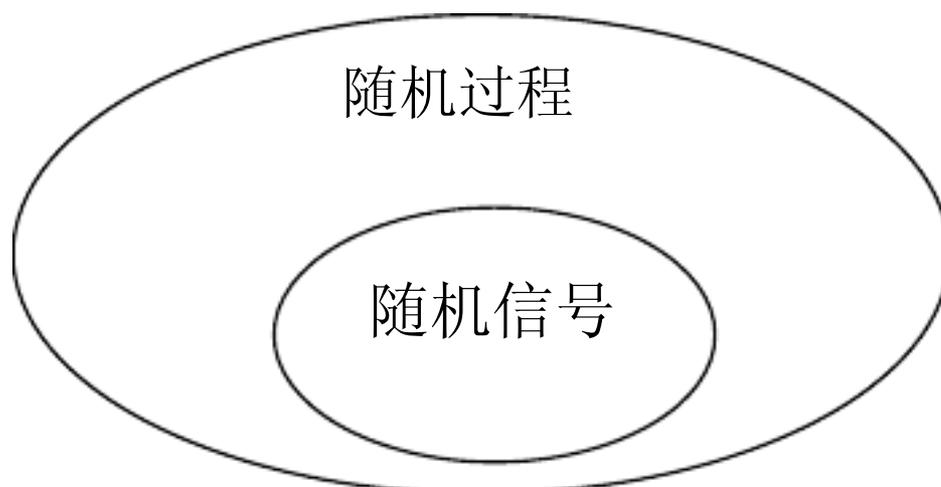
# 第 4 章 随机信号与线性系统

陈明

东南大学移动通信国家重点实验室

chenming@seu.edu.cn

## 随机过程和随机信号的概念



当用随机过程来表示一组信号时，此时的随机过程就被称为随机信号。

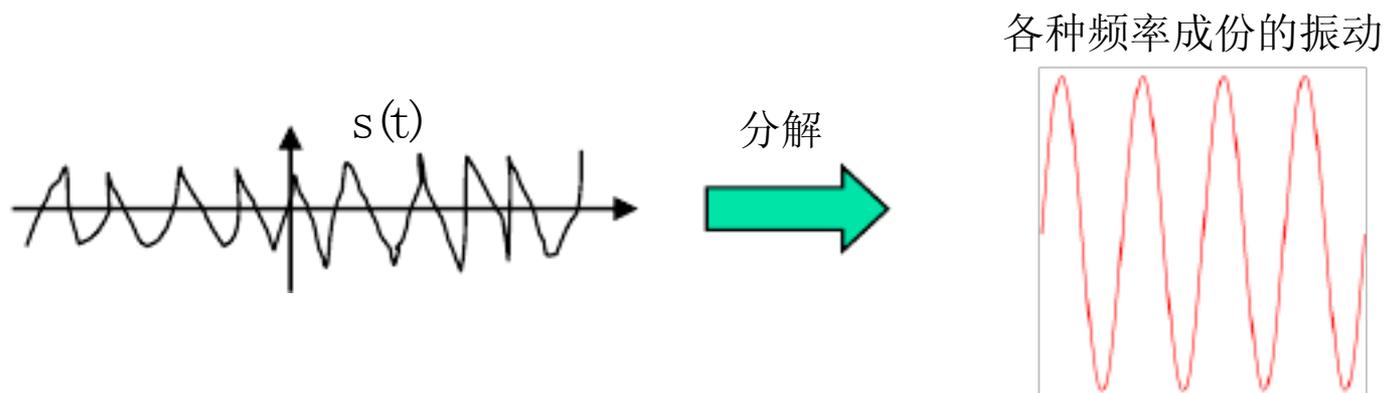
## 4.1 随机信号的功率谱密度

### 确定性信号的频谱

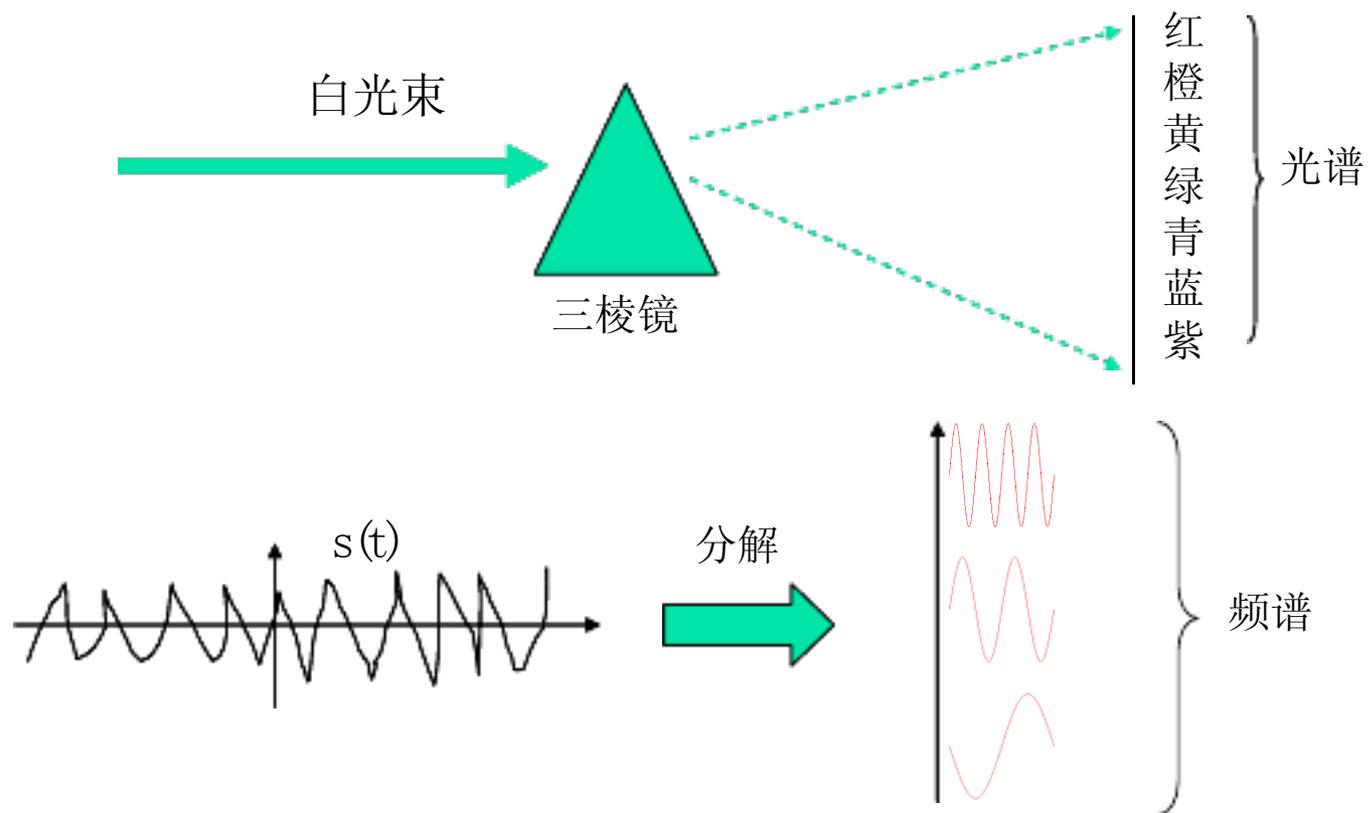
信号的频谱特性是描述信号的一个重要指标。对于确定性信号，其 Fourier 变换可以反映其频谱特性。

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos 2\pi n t$$
$$\hat{s}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j2\pi f t} dt$$

## Fourier分解的物理意义



## 频谱与光谱进行对比



### 如何反应随机信号的频谱？

---

由于随机信号实际上是一族确定性信号，要从统计意义上反映其频谱特性，需要用功率谱密度的概念。

#### 4.1.1 连续时间随机信号的功率谱密度

## 第 4 章 随机信号与线性系统

---

若  $X(t)$  是一个定义于  $i$  上的连续时间随机过程，则  $[-T, T]$  上的平均功率为

$$P_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E \left\{ |X(t)|^2 \right\} dt$$

## 第 4 章 随机信号与线性系统

---

利用 Fourier 变换的 Parseval 等式, 可以得到  $X(t)$  在  $(-\infty, \infty)$  上的平均功率为

$$\begin{aligned}
 P &= \lim_{T \rightarrow \infty} P_T \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[ \frac{1}{T} \int_{-T}^T |X(t) e^{-j2\pi f t}|^2 df \right]
 \end{aligned}$$

从上式可以看出, 下式所定义的关于频率  $f$  的函数

$$S_X(f) = \lim_T E \left[ \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T X(t) e^{-j2\pi f t} dt \right|^2 \right]$$

反映了随机信号功率在单位频率上的分布情况，因此定义函数  $S_X(f)$  为连续时间随机过程  $X(t)$  的功率谱密度。

## 功率谱密度的性质

性质 4.1 设  $X(t)$  是定义于  $J$  上的连续时间随机过程,  $S_X(f)$  是其功率谱密度, 则有如下性质:

① 功率谱密度在  $J$  上的积分为信号总功率,

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df.$$

②  $S_X(f) \geq 0$ , 也即  $S_X(f)$  是一个非负实函数。

③ 实随机信号的功率谱密度是偶函数

## 第 4 章 随机信号与线性系统

---

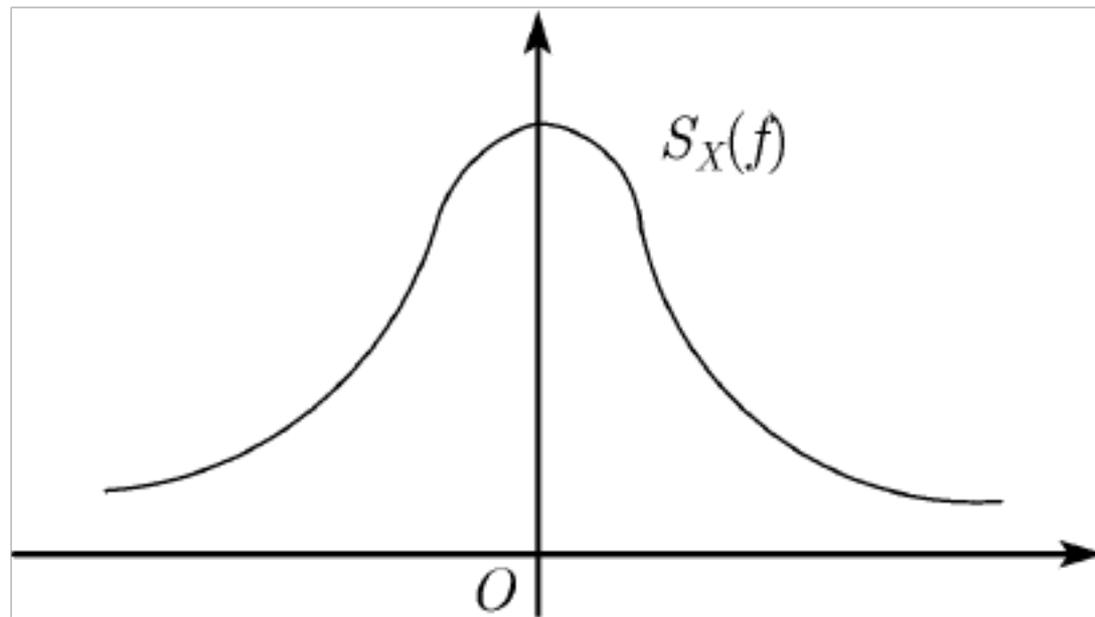


图 4.1 实随机信号的功率谱密度是非负偶函数

对于宽平稳过程来说, 有下列

Wiener-Khinchin 定理

定理 4.1 (Wiener-Khinchin 定理) 若  $X(t)$  为  $\mathbb{R}$  上的宽平稳过程, 且其自相关函数  $R_X(t)$  满足  $\int_{-\infty}^{\infty} |R_X(t)| dt < \infty$ , 则有

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

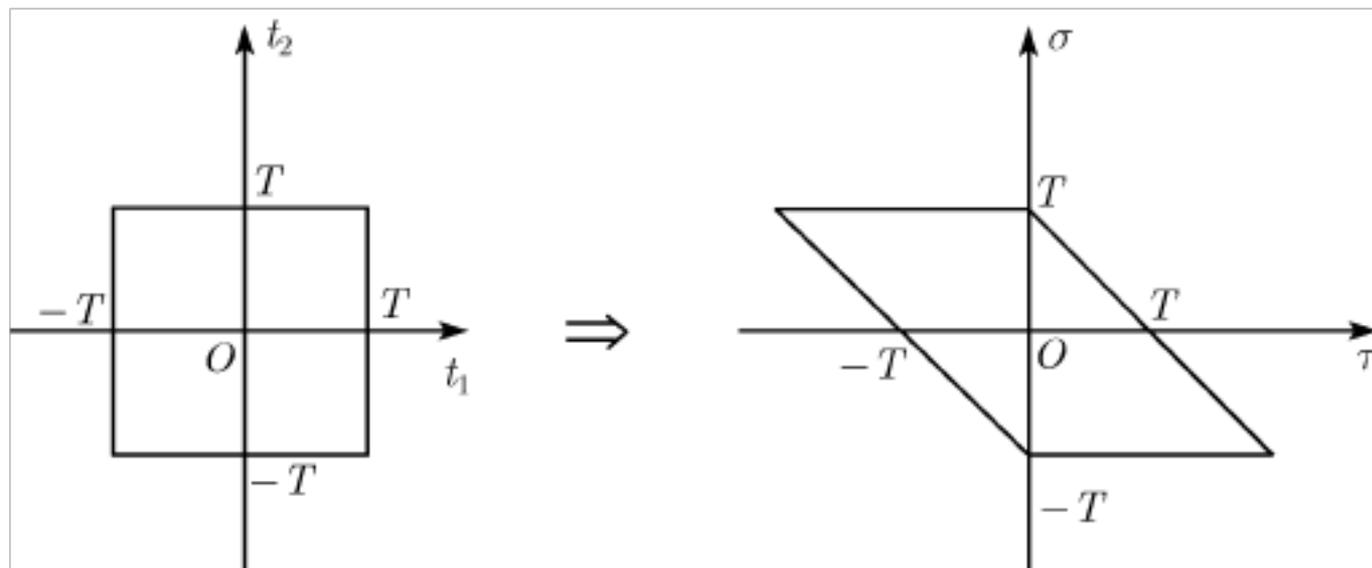
证明 由功率谱密度的定义式知

$$\begin{aligned}
 S_X(f) &= \lim_T \frac{1}{2T} E \left\{ \int_{-T}^T X(t_1) e^{-j2\pi f t_1} dt_1 \int_{-T}^T X^*(t_2) e^{j2\pi f t_2} dt_2 \right\} \\
 &= \lim_T \frac{1}{2T} E \int_{-T}^T \int_{-T}^T X(t_1) X^*(t_2) e^{-j2\pi f(t_1 - t_2)} dt_1 dt_2 \\
 &= \lim_T \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T E \{ X(t_1) X^*(t_2) \} e^{-j2\pi f(t_1 - t_2)} dt_1 dt_2 \\
 &= \lim_T \frac{1}{2T} \int_{-T}^T R_X(t_1 - t_2) e^{-j2\pi f(t_1 - t_2)} dt_1 dt_2
 \end{aligned}$$

如图 4.2 所示，对积分区域作变换

## 第 4 章 随机信号与线性系统

---



$t = t_1 - t_2, t_2 = s$ , 则

## 第 4 章 随机信号与线性系统

$$\begin{aligned}
 S_X(f) &= \lim_T \frac{1}{2T} \left\{ \int_{-T}^T R_X(t) e^{-j2\pi ft} dt + \int_0^{T-t} R_X(t) e^{-j2\pi ft} dt \right\} \\
 &= \lim_T \frac{1}{2T} \left\{ \int_{-2T}^{-T} R_X(t) e^{-j2\pi ft} (T+t) dt + \int_0^{2T} R_X(t) e^{-j2\pi ft} (T-t) dt \right\} \\
 &= \lim_T \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} R_X(t) e^{-j2\pi ft} \left(1 - \frac{|t|}{2T}\right) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t) e^{-j2\pi ft} dt
 \end{aligned}$$

于是定理得证。

对于宽平稳过程，其功率谱密度是其自相关函数的 Fourier 变换，因此由 Fourier 逆变换公式有

$$R_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{j2\pi ft} df$$

所以，对于宽平稳过程来讲，其自相关函数和功率谱密度是互相唯一确定的关系，一个是随机过程时域特性的反映，一个是随机过程频域特性的反映。此外由式(4.3)知，对于宽平稳随机过程来说，平均功率为

## 第 4 章 随机信号与线性系统

---

$$R_X(0) = E \left\{ |X(t)|^2 \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df$$

若  $X(t)$  为实随机过程，则其自相关函数为偶函数，即  $R_X(t) = R_X(-t)$ ，则

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t) \cos 2\pi f t dt$$

## 第 4 章 随机信号与线性系统

例 4.1 试求 Poisson 随机电报过程的功率谱密度。

解 由习题 2B-73 可知, Poisson 随机电报过程为宽平稳过程, 其自相关函数为

$R_X(t) = e^{-2a|t|}$ , 其中  $a$  是信号平均传输速率。  
由 Wiener-Khinchin 定理知其功率谱密度为

$$\begin{aligned} S_X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2at} e^{-j2\pi ft} dt + \int_0^{\infty} e^{-2at} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \frac{1}{2a - j2\pi f} + \frac{1}{2a + j2\pi f} = \frac{4a}{4a^2 + 4\pi^2 f^2} \end{aligned}$$

## 第 4 章 随机信号与线性系统

---

例 4.2 设  $X(t)$  是定义在  $i$  上的实随机过程，其功率谱密度为  $S_X(f)$ 。则  $X(t)$  的解析过程  $Z(t) = X(t) + jX^{(c)}(t)$  的功率谱密度为

$$S_Z(f) = 4S_X(f)U(f)$$

其中  $U(f)$  为 Heavyside 函数。

解 由习题 3B-39 和例 3.29 知， $Z(t)$  的自相关函数为

$$R_Z(t) = 2R_X(t) + jR_{XX}(t)$$

## 第 4 章 随机信号与线性系统

---

对其作 Fourier 变换, 由

$$S_{XX}(f) = S_X(f)H(f) = -j\operatorname{sgn}(f)S_X(f)$$

知

$$S_Z(f) = 4S_X(f)U(f)$$

所以, 解析过程没有负功率谱密度。

例 4.3 试求随机相位余弦信号

$$X(t) = a \cos(2\pi f_0 t + Q)$$

的功率谱密度  $S_X(f)$ ，其中  $Q$  是  $(-p, p)$  上的均匀分布。

解 由例 2.72 知， $X(t)$  为平稳过程，且其自相关函数为

$$R_X(t) = \frac{a^2}{2} \cos 2\pi f_0 t$$

则其功率谱密度为

## 第 4 章 随机信号与线性系统

---

$$\begin{aligned} S_X(f) &= \frac{a^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi f_0 t e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \frac{a^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt + \frac{a^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \\ &= \frac{a^2}{4} \delta(f-f_0) + \frac{a^2}{4} \delta(f+f_0) \end{aligned}$$

其中，用到了常数 1 的 Fourier 变换是  $\delta$  函数的性质。由此可见，随机相位余弦信号  $x(t)$  的功率集中于频点  $\pm f_0$ 。

## 第 4 章 随机信号与线性系统

例 4.4(白噪声过程) 如图 4.3 所示, 若宽平稳随机过程  $w(t)$  的功率谱密度在任意频点上是常数, 即  $S_w(f) = N_0/2$ , 则称  $w(t)$  为白噪声过程, 由 Wiener-Khinchin 定理知其自相关函数为

$$R_w(t) = \frac{N_0}{2} \delta(t)$$

若宽平稳随机过程  $x(t)$  的功率谱密度为

$$S_x(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{2}, & |f| \leq w \\ 0, & |f| > w \end{cases}$$

## 第 4 章 随机信号与线性系统

其中  $w$  为某个正常数，则称  $X(t)$  为带限白噪声过程。该过程的平均功率为

$$E \left\{ |X(t)|^2 \right\} = \int_{-w}^w \frac{N_0}{2} df = N_0 w$$

自相关函数为

$$R_X(t) = \int_{-w}^w \frac{N_0}{2} e^{j2\pi ft} df = \frac{N_0 \sin(2\pi w t)}{2\pi t}$$

由上式可见，当  $t = k/(2w)$ ,  $k = 1, 2, L$  时， $X(t)$  和  $X(t + t)$  互相正交。

## 第 4 章 随机信号与线性系统

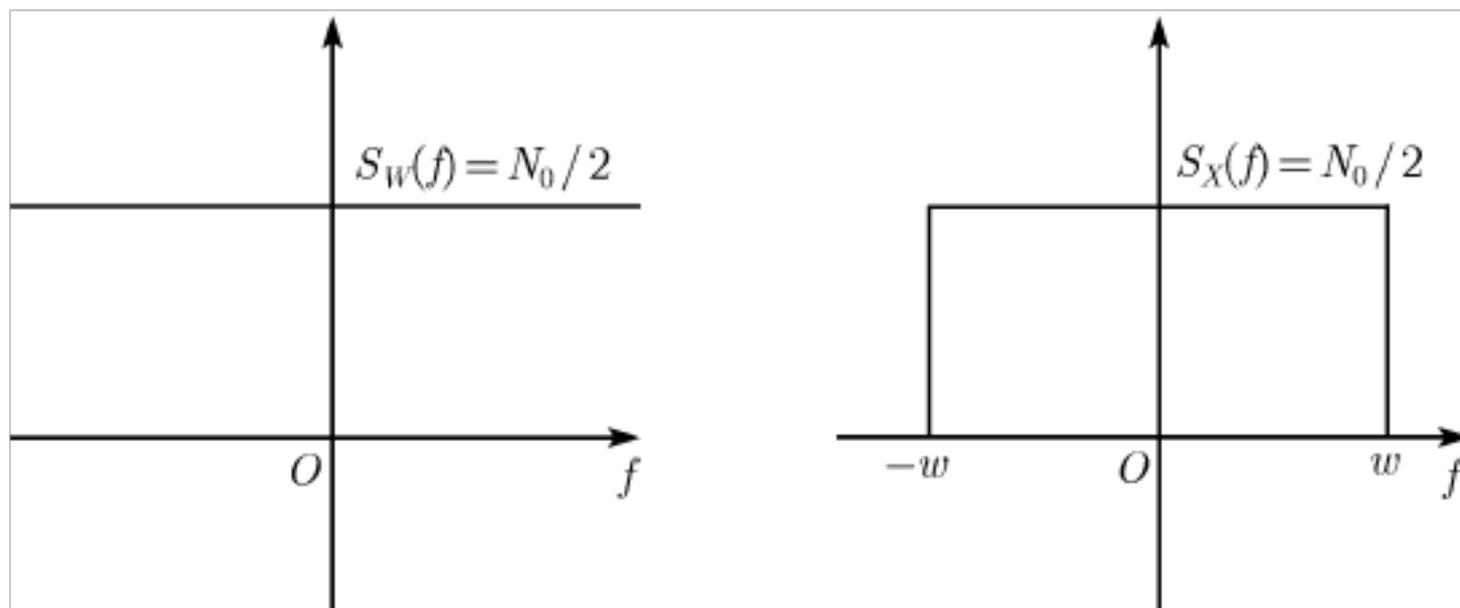


图 4.3 白噪声和带限白噪声的功率谱密度

## 互功率谱

若  $X(t)$  和  $Y(t)$  是两个随机过程，和随机信号功率谱密度的定义类似，可以定义  $X(t)$  和  $Y(t)$  的互功率谱密度为

$$S_{XY}(f) = \lim_T \frac{1}{2T} E \left\{ \int_{-T}^T X(t) e^{-j2\pi f t} dt \int_{-T}^T Y(t) e^{-j2\pi f t} dt^* \right\}$$

和 Wiener-Khinchin 定理的证明类似，若  $X(t)$  和  $Y(t)$  为两个联合宽平稳的随机过程，且

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_{XY}(t)| dt < \infty, \text{ 则有}$$

## 第 4 章 随机信号与线性系统

---

$$S_{XY}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$R_{XY}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(t) e^{j2\pi ft} df$$

式中， $R_{XY}(f)$  为  $X(t)$  和  $Y(t)$  的互相关函数。

此外，还可以证明互功率谱密度具有以下性质。

性质 4.2

$$\textcircled{1} \quad S_{XY}(f) = S_{YX}^*(f);$$

$$\textcircled{2} \quad |S_{XY}(f)|^2 \leq S_X(f)S_Y(f)。$$

证明作为练习。

## 第 4 章 随机信号与线性系统

例 4.5 设  $X(t)$  和  $Y(t)$  是两个联合宽平稳过程，试给出  $Z(t) = X(t) + Y(t)$  的功率谱密度。

解  $Z(t)$  的自相关函数为

$$\begin{aligned} R_Z(t) &= E \left\{ Z(t+\tau)Z^*(t) \right\} \\ &= E \left\{ \underbrace{X(t+\tau) + Y(t+\tau)}_{\text{横}} \underbrace{[X(t) + Y(t)]^*}_{\text{横}} \right\} \\ &= R_X(t) + R_{YX}(t) + R_{XY}(t) + R_Y(t) \end{aligned}$$

因此， $Z(t)$  的功率谱密度为

## 第 4 章 随机信号与线性系统

---

$$\begin{aligned} S_Z(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} (R_X(t) + R_{YX}(t) + R_{XY}(t) + R_Y(t)) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= S_X(f) + S_{YX}(f) + S_{XY}(f) + S_Y(f) \\ &= S_X(f) + S_Y(f) + 2\operatorname{Re}[S_{XY}(f)] \end{aligned}$$

在信号分析中，常常要讨论两个联合宽平稳随机过程的和，从上述表达式可以看出，互相关函数及互功率谱密度的概念的引进是必需的。

例 4.6 设联合平稳的两个随机过程  $X(t)$

## 第4章 随机信号与线性系统

---

和 $Y(t)$ 的互功率谱密度为

$$S_{XY}(f) = \begin{cases} \frac{1}{2p} + j2\pi f, & -1/2p < f < 1/2p \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则互相关函数为

$$\begin{aligned} R_{XY}(t) &= \int_{-1/2p}^{1/2p} \left( \frac{1}{2p} + j2\pi f \right) e^{j2\pi ft} df \\ &= \frac{(\sin t + \cos t)t - \sin t}{p t^2} \end{aligned}$$

### 4.1.2 离散时间随机信号的功率谱密度

信号的频率刻画了信号变化的快慢，因而对于离散时间随机过程，只有指定了离散时间的绝对时间间隔 $T_0$ ，功率谱密度才有意义。这时，离散时间随机信号可看成连续时间随机信号每隔 $T_0$ 时间间隔的采样。为了讨论的方便，将绝对时间间隔 $T_0$ 标准化为 1。

## 第 4 章 随机信号与线性系统

和连续时间随机过程类似， $X[n]$  的功率谱密度定义为

$$S_X(f) = \lim_N \frac{1}{2N} E \left| \sum_{n=-N}^N X[n] e^{-jn2\pi f} \right|^2$$

而  $X[n]$  和  $Y[n]$  的互功率谱密度定义为

$$S_{XY}(f) = \lim_N \frac{1}{2N} E \left| \sum_{n=-N}^N X[n] e^{-jn2\pi f} \right| \left| \sum_{m=-N}^N Y[m] e^{-jm2\pi f} \right|^*$$

## 第 4 章 随机信号与线性系统

---

由定义知，功率谱密度和互功率谱密度是周期为  $T_1$  的函数。

和连续时间随机过程的证明完全类似可得 Wiener-Khinchin 定理。

## 第 4 章 随机信号与线性系统

定理 4.2 若  $X[n]$  宽平稳, 其自相关函数为

$R_X[m]$ , 且  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} |mR_X[m]| < \infty$ , 则有

$$S_X(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_X[m] e^{-jm 2\pi f}$$

$$R_X(m) = \int_{-1/2}^{1/2} S_X(f) e^{jm 2\pi f} df$$

若  $X[n]$  和  $Y[n]$  联合宽平稳, 互相关函数为

$R_{XY}[m]$ , 且  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} |mR_{XY}[m]| < \infty$ , 则  $X[n]$  和  $Y[n]$  的互功率谱密度为

## 第 4 章 随机信号与线性系统

---

$$S_{XY}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$R_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

## 第 4 章 随机信号与线性系统

---

例 4.7 (离散时间白噪声过程) 设为离散时间随机过程, 且是独立同分布的随机变量序列, 其均值为零, 方差为  $d_X^2$ , 试求  $S_X(f)$ 。

解 离散时间随机过程  $X[n]$  的自相关函数为

$$R_X[k] = \begin{cases} d_X^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

因此, 功率谱密度为

## 第 4 章 随机信号与线性系统

---

$$S_X(f) = d_x^2$$

上述过程称为离散时间白噪声过程。

## 第 4 章 随机信号与线性系统

---

例 4.8 设  $Y[n] = X[n] + aX[n-1]$ ，其中  $X[n]$  为例 4.7 中的离散时间白噪声过程，试求  $S_Y(f)$ 。

解 容易证明  $Y[n]$  的自相关函数为

$$E\{Y[n]Y[n+k]\} = \begin{cases} (1+a^2)d_X^2, & k=0 \\ ad_X^2, & k=\pm 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因此，功率谱密度为

## 第 4 章 随机信号与线性系统

---

$$\begin{aligned} S_Y(f) &= (1 + a^2) s_X^2 + a s_X^2 (e^{j2\pi f} + e^{-j2\pi f}) \\ &= s_X^2 [(1 + a^2) + 2a \cos 2\pi f] \end{aligned}$$

## 第 4 章 随机信号与线性系统

---

例 4.9 设  $Z[n] = X[n] + Y[n]$ ，其中  $X[n]$  是要观测的宽平稳实随机信号，且对任意  $n$ ，

$X[n] = A$ ， $A$  是一个均值为零且方差为  $s_A^2$  的随机变量； $Y[n]$  是零均值的、且平均功率为  $s_Y^2$  的离散时间白噪声。此外， $X[n]$  和  $Y[n]$  相互独立。试求  $Z[n]$  的功率谱密度。

解 显然， $Z[n]$  的均值

$$E\{Z[n]\} = E\{A\} + E\{Y[n]\} = 0,$$

自相关函数为

## 第 4 章 随机信号与线性系统

---

$$\begin{aligned} E \{Z[n+k]Z[n]\} &= E \{(X[n+k]+Y[n+k])(X[n]+Y[n])\} \\ &= E \{A^2\} + R_Y[k] \end{aligned}$$

所以  $Z[n]$  为宽平稳过程，因此其功率谱密度为

$$S_Z(f) = S_A^2(f) + S_Y(f)$$

## 4.2 随机信号的带宽

随机信号所占据的频带宽度被称为随机信

## 第 4 章 随机信号与线性系统

---

号的带宽。随机信号的带宽反映了随机信号的大量样本函数在统计意义上所占有的频带宽度。在实际的信号传输系统中，被传输的信号客观上总是占据一定的带宽，由于频带资源的有限性，系统设计者对所有传输信号的带宽必须有一个清楚的了解。

由于随机信号功率谱密度函数的多样性，

## 第 4 章 随机信号与线性系统

---

所以关于随机信号带宽的定义就有很多种，这里给出几个常用的带宽定义。虽然这些定义有所差别，但是其基本思想是给出一个带宽，在该带宽上分布随机信号的主要功率。

设宽平稳随机信号  $X(t)$  的功率谱密度为

## 第 4 章 随机信号与线性系统

---

$S_X(f)$ ，自相关函数为  $R_X(t)$ ，则有如下几种带宽形式：

① 若  $S_X(f)$  在  $f \geq 0$  时的支集为  $(f_1, f_2)$ ，也即在区间  $(f_1, f_2)$  外  $S_X(f)$  为零，则称  $f_2 - f_1$  为随机信号  $X(t)$  的绝对带宽。

② 设  $S_X(f)$  在  $f \geq 0$  时在  $f_0$  取得最大值，则称

$$B_{\text{eq}} = \frac{\int_0^{\infty} S_X(f) df}{S_X(0)}$$

为随机信号  $X(t)$  的等效噪声带宽，如图 4.4 所示。

③ 若  $t^* = \inf\{t > 0 | R_X(t) = 0\}$ ，则称  $t^*$  为随机信号  $X(t)$  的去相关时间，称  $B_{\text{eff}} = 1/t^*$  为随机信号  $X(t)$  的有效带宽。

④ 设  $S_X(f)$  在  $f_0$  取得最大值, 若  $f_0 \in (f_1, f_2)$  且

$$S_X(f_1) = S_X(f_2) = S_X(f_0) / 2$$

则称  $f_2 - f_1$  为随机信号  $X(t)$  的 3dB 带宽, 如图 4.5 所示。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/468024024037007007>