山东名校考试联盟

2024-2025 学年高三年级上学期期中检测

数学试题

2024．11

本试卷共 4 页，19 题，全卷满分 150 分．考试用时 120 分钟．

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的考生号、姓名、考场号及座位号填写在答题卡上．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需要改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\{x\mid \log_2 x<2\}$，$B=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{x\mid x<4\}$　　B. $\{x\mid -1<x<3\}$

C. $\{x\mid 0<x<3\}$　　D. $\{x\mid 3<x<4\}$

【答案】C

【解析】

【详解】因为 $A=\{x\mid \log_2 x<2\}=\{x\mid \log_2 x<\log_2 4\}=(0,4)$，

$B=\{x\mid (x+1)(x-3)<0\}=(-1,3)$，

所以 $A\cap B=(0,3)$，

故选：C

2. 若 $1+\mathrm{i}$（i 为虚数单位）是关于 x 的方程 $x^2+ax+b=0(a,b\in\mathbf{R})$ 的一个根，则 $b=$（　　）

A. 0　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】由题知 $1-\mathrm{i}$ 也是关于 x 的方程 $x^2+ax+b=0(a,b\in\mathbf{R})$ 的一个根，进而结合韦达定理求解即可.

【详解】解：因为$1+\mathrm{i}$（i为虚数单位）是关于x的方程$x^2+ax+b=0(a,b\in\mathbf{R})$的一个根

所以，$1-\mathrm{i}$也是关于x的方程$x^2+ax+b=0(a,b\in\mathbf{R})$的一个根，

所以，由韦达定理得：$\begin{cases}-a=1+\mathrm{i}+1-\mathrm{i}=2\\ b=(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=2\end{cases}$，

所以，$b=2$.

故选：B

3. 已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$不共线，$\overrightarrow{AB}=\lambda\vec{a}+2\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\mu\vec{b}$，若A，$B$，$C$三点共线，则$\lambda\mu=$（　　）

A. -2　　　　B. -1.　　　　C. 1　　　　D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】因为A，B，C三点共线，则$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$共线，由此可以根据向量共线的性质列出等式，进而求出λ与μ的关系，最后得出$\lambda\mu$ 的值.

【详解】由于A，B，C三点共线，所以$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$共线.

存在实数k，使得$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$，即$\lambda\vec{a}+2\vec{b}=k(\vec{a}+\mu\vec{b})$.

因为$\vec{a}$，$\vec{b}$不共线，根据向量相等的性质，若$\lambda\vec{a}+2\vec{b}=k\vec{a}+k\mu\vec{b}$，则$\begin{cases}\lambda=k\\ 2=k\mu\end{cases}$.

由$\lambda=k$，将其代入$2=k\mu$可得$2=\lambda\mu$.

故选：D.

4. 设a，$b\in\mathbf{R}$，则使$a>b$成立的一个充分不必要条件是（　　）

A. $a^3>b^3$　　　　B. $\ln(a-b)>0$　　　　C. $a^2>b^2$　　　　D. $|a|>b$

【答案】B

【解析】

【分析】根据充分条件及必要条件定义结合不等式的性质判定各个选项即可.

【详解】对于A，$a^3>b^3\Leftrightarrow a>b$，故$a^3>b^3$是$a>b$的充要条件；

对于B，由$\ln(a-b)>0$得$a>b+1$，能推出$a>b$，则充分性成立，反之不成立，则必要性不成立，所以$\ln(a-b)>0$是$a>b$的充分不必要条件；

对于C，由$a^2>b^2$无法得到a，b之间的大小关系，则充分性不成立，反之也是，则必要性不成立，所以

$a^2>b^2$ 是 $a>b$ 的既不充分也不必要条件；

对于 D，由 $|a|>b$ 不能推出 $a>b$，则充分性不成立，反之不成立，则必要性不成立，所以 $|a|>b$ 是 $a>b$ 的既不充分也不必要条件.

故选：B.

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_n-a_{n+1}=2a_na_{n+1}$，则数列 $\{a_na_{n+1}\}$ 的前 8 项和为（　　）

A. $\frac{8}{17}$　　B. $\frac{12}{25}$　　C. $\frac{7}{8}$　　D. $\frac{8}{9}$

【答案】A

【解析】

【分析】首先对已知等式进行变形，可得到数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的性质，进而求出 a_n 的表达式，然后得出 a_na_{n+1} 的表达式，再利用裂项相消法求出前 8 项和.

【详解】已知 $a_n-a_{n+1}=2a_na_{n+1}$，等式两边同时除以 a_na_{n+1}，得到 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$.

因为 $a_1=1$，所以 $\frac{1}{a_1}=1$，那么数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以 1 为首项，2 为公差的等差数列.

得 $\frac{1}{a_n}=1+(n-1)\times2=2n-1$，则 $a_n=\frac{1}{2n-1}$.

$a_na_{n+1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$.

求数列 $\{a_na_{n+1}\}$ 的前 8 项和 S_8

$$S_8=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{17}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{17}\right)=\frac{8}{17}.$$

故选：A.

6. 若 $\sin2\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin(\beta-\alpha)=\frac{\sqrt{10}}{10}$，且 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，$\beta\in\left[\pi,\frac{3}{2}\pi\right]$，则 $\alpha+\beta=$（　　）

A. $\frac{4\pi}{3}$　　B. $\frac{5\pi}{3}$　　C. $\frac{7\pi}{4}$　　D. $\frac{11\pi}{6}$

【答案】C

【解析】

【分析】先根据已知角的范围确定三角函数值的正负，再利用两角和的余弦公式求出$\cos(\alpha+\beta)$的值，最后根据$\alpha+\beta$的范围确定其具体值.

【详解】因$\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]$，所以$2\alpha\in\left[\frac{\pi}{2},2\pi\right]$.又$\sin 2\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}>0$，所以$2\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

根据$\sin^2 A+\cos^2 A=1$，得$\cos 2\alpha=-\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，同时也能确定

$\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

因为$\sin(\beta-\alpha)=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\beta\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，所以$\beta-\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{5}{4}\pi\right)$.

$\cos(\beta-\alpha)=-\sqrt{1-\sin^2(\beta-\alpha)}=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

将$\cos(\alpha+\beta)$转化为$\cos[(\beta-\alpha)+2\alpha]$.

所以$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\beta-\alpha)\cos 2\alpha-\sin(\beta-\alpha)\sin 2\alpha$

$=\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)-\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{3\sqrt{10}\times 2\sqrt{5}}{10\times 5}-\frac{\sqrt{10}\times\sqrt{5}}{10\times 5}=\frac{6\sqrt{50}-\sqrt{50}}{50}=\frac{5\sqrt{50}}{50}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

因为$\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$，所以$\alpha+\beta\in\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right)$.

在这个区间内，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$\alpha+\beta=\frac{7\pi}{4}$.

故选：C.

7. 用$\min\{a,b,c\}$表示a，b，c中的最小数，若函数$f(x)$为偶函数，且当$x\geq 0$时，

$f(x)=\min\left\{x+1,x^2-x+1,-x+6\right\}$，则$f(x)$的极值点的个数为（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

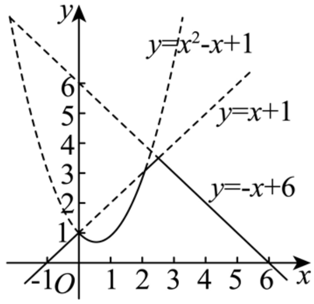
【答案】D

【解析】

【分析】画出$x\geq 0$时图象，结合偶函数图象对称性及极值点概念即可判断.

【详解】由$f(x)=\min\left\{x+1,x^2-x+1,-x+6\right\}$，$x\geq 0$，

可得函数的大致图象，



由图象可知当 $x>0$ 时，有两个极值点，由对称性可知当 $x<0$ 时，也有两个极值点，

同时由图象可知：$x=0$ 也是极值点，

所以共有 5 个极值点.

故选：D

8. 若定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)+f(x)=f(4)$，$f(2x+1)$ 是奇函数，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，则

$\sum_{k=1}^{5} kf\left(k-\frac{1}{2}\right)=$（　　）

A. 2　　　　B. 3　　　　C. 4　　　　D. 5

【答案】D

【解析】

【分析】根据条件判断抽象函数的周期，对称性，根据周期性和对称性求函数值，再代入求和.

【详解】根据 $f(x+2)+f(x)=f(4)$，以 $x+2$ 代换 x 得：$f(x+4)+f(x+2)=f(4)$，所以

$f(x+4)=f(x)$，可知函数 $f(x)$ 的周期为 4，

因为 $f(2x+1)$ 是 R 上的奇函数，所以 $f(-2x+1)+f(2x+1)=0$，即 $f(x)$ 关于点 $(1,0)$ 对称，

于是 $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)=0$，$f\left(\frac{5}{2}\right)+f\left(\frac{7}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)+f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，

由 $f(x+4)+f(x+2)=f(4)$，取 $x=0$ 得 $f(4)+f(2)=f(4)$，即 $f(2)=0$，

则 $f(4)=f(0)=-f(2)=0$，因此 $f(x+2)+f(x)=0$，取 $x=\frac{3}{2}$，得 $f\left(\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{7}{2}\right)=0$，

于是 $f\left(\frac{1}{2}\right)+2f\left(\frac{3}{2}\right)+3f\left(\frac{5}{2}\right)+4f\left(\frac{7}{2}\right)=\left[f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)\right]+3\left[f\left(\frac{5}{2}\right)+f\left(\frac{7}{2}\right)\right]+f\left(\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{7}{2}\right)=0$，

因此，$\sum_{k=1}^{5} k\left(k-\frac{1}{2}\right)=5f\left(\frac{9}{2}\right)=5f\left(4+\frac{1}{2}\right)=5f\left(\frac{1}{2}\right)=5$.

故选：D.

【点睛】关键点点睛：本题的关键是利用赋值，赋变量，转化抽象关系式，判断函数的周期性和对称性.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每个小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 已知函数 $f(x)=\sin(2\omega x+\theta)+1(\omega>0,|\theta|<\pi)$，两条相邻对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，且 $f(x)\le f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，则（　　）

A. $\omega=1$

B. $\theta=\frac{\pi}{6}$

C. $f(x)$ 关于 $\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$ 对称

D. $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增

【答案】ABD

【解析】

【分析】先利用题给条件求得 ω，θ 的值，进而求得函数 $f(x)$ 的解析式，即可判断选项 AB；再利用整体代入法验证选项 C；利用正弦函数图像性质判断选项 D.

【详解】因为函数 $f(x)$ 的两条相邻对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，

所以 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，则 $T=\pi=\frac{2\pi}{2\omega}$，即 $\omega=1$，故 A 正确；

此时 $f(x)=\sin(2x+\theta)+1$，

又 $f(x)\le f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，则 $f(\frac{\pi}{6})=\sin(\frac{\pi}{3}+\theta)+1=2$，

即 $\sin(\frac{\pi}{3}+\theta)=1$，因为 $|\boldsymbol{\theta}|<\boldsymbol{\pi}$，所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$，故 B 正确；

此时 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+1$，

因为 $f(-\frac{\pi}{12})=\sin(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6})+1=1$，所以 $f(x)$ 关于 $\left(-\frac{\pi}{12},1\right)$ 对称，故 C 错误；

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，

因为函数 $y=\sin x$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增，故 D 正确.

故选：ABD.

10. 记$\triangle ABC$内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $c=4$，$b=2$，若 O 为$\triangle ABC$的外心，则（　　）

A. $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$

B. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}+6=0$

C. $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{AB}=0$

D. $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

【答案】AC

【解析】

【分析】$\triangle ABC$的外心即为$\triangle ABC$外接圆的圆心，即$\triangle ABC$三边中垂线的交点，即可判断 A，根据数量积的运算律判断 B、C，利用奔驰定理判断 D.

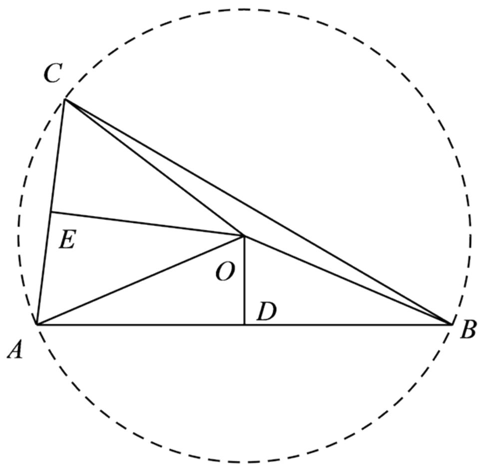
【详解】$\triangle ABC$的外心即为$\triangle ABC$外接圆的圆心，即$\triangle ABC$三边中垂线的交点，

所以$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$，故 A 正确；

取 AB 的中点 D，连接 OD，所以 $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，故 C 正确；

因为 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2+\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=-\frac{1}{2}\times2^2+\frac{1}{2}\times4^2=6$，故 B 错误；



因为 O 为$\triangle ABC$的外心，

则可设$\triangle ABC$的外接圆半径为 R，$\angle BOC=2\angle BAC$，$\angle AOC=2\angle ABC$，

$\angle AOB=2\angle ACB$，故 $S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}R^2\sin2\angle BAC$，

同理 $S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}R^2\sin2\angle ABC$，$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}R^2\sin2\angle ACB$，

又$S_{\triangle BOC}\overrightarrow{OA}+S_{\triangle AOC}\overrightarrow{OB}+S_{\triangle AOB}\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，

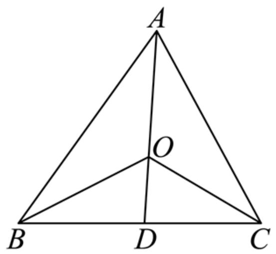
即$\frac{1}{2}R^2\cdot\sin 2\angle BAC\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}R^2\sin 2\angle ABC\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}R^2\sin 2\angle ACB\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

所以$\sin 2\angle BAC\cdot\overrightarrow{OA}+\sin 2\angle ABC\cdot\overrightarrow{OB}+\sin 2\angle ACB\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，

即$\sin 2A\cdot\overrightarrow{OA}+\sin 2B\cdot\overrightarrow{OB}+\sin 2C\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，故D错误；

其中$S_{\triangle BOC}\overrightarrow{OA}+S_{\triangle AOC}\overrightarrow{OB}+S_{\triangle AOB}\overrightarrow{OC}=\vec{0}$（奔驰定理）的证明如下：

如图延长OA与BC边相交于点D则



所以$\frac{BD}{DC}=\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle COD}}=\frac{S_{\triangle ABD}-S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle ACD}-S_{\triangle COD}}=\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOC}}$,

又$\overrightarrow{OD}=\frac{DC}{BC}\overrightarrow{OB}+\frac{BD}{BC}\overrightarrow{OC}=\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle AOC}+S_{\triangle AOB}}\overrightarrow{OB}+\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOC}+S_{\triangle AOB}}\overrightarrow{OC}$,

又$\frac{OD}{OA}=\frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle BOA}}=\frac{S_{\triangle COD}}{S_{\triangle COA}}=\frac{S_{\triangle BOD}+S_{\triangle COD}}{S_{\triangle BOA}+S_{\triangle COA}}=\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle BOA}+S_{\triangle COA}}$,

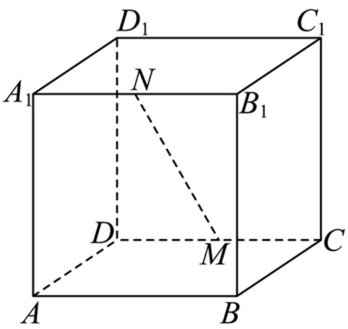
所以$\overrightarrow{OD}=-\frac{S_{\triangle COB}}{S_{\triangle AOC}+S_{\triangle AOB}}\overrightarrow{OA}$,

所以$\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle AOC}+S_{\triangle AOB}}\overrightarrow{OB}+\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOC}+S_{\triangle AOB}}\overrightarrow{OC}=-\frac{S_{\triangle COB}}{S_{\triangle AOC}+S_{\triangle AOB}}\overrightarrow{OA}$,

所以$S_{\triangle BOC}\overrightarrow{OA}+S_{\triangle AOC}\overrightarrow{OB}+S_{\triangle AOB}\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

故选：AC.

11. 如图，已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为2，M，N分别为CD，A_1B_1的中点，点P为MN上一动点，则（　　）



A. 存在点 P 使得 $AP \perp BP$

B. $PA_1 + PD$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$

C. 以 MN 为直径的球面与正方体每条棱的交点总数为 12

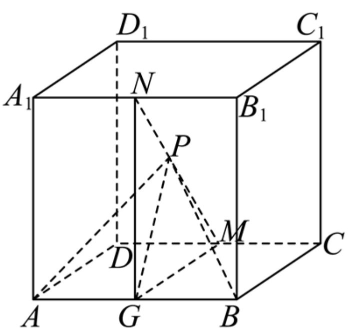
D. 已知球 O 为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的内切球，若在正方体内部与球 O 外部之间的空隙处放入一个小球，则放入的小球体积最大值为 $\dfrac{(104-60\sqrt{3})\pi}{3}$

【答案】BCD

【解析】

【分析】对于 A:取 AB 中点 G，通过 $\angle GPB < 45^{\circ}$，即可判断，对于 B：由 $PA_1 + PD = PA_1 + PC$ 可判断，对于 C：由以 MN 为直径的球的球心为正方体中心，半径为 $\sqrt{2}$，即可判断，对于 D，由球 O 与小球 O_1 相切，球 O 半径为 1，设小球 O_1 的半径为 r，得到 $\dfrac{r}{1} = \dfrac{\sqrt{3}-1-r}{\sqrt{3}}$，进而可求解.

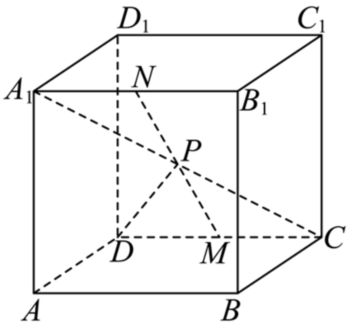
【详解】对于 A:



由题意可知：$PA = PB$，取 AB 中点 G，所以 $\angle APB = 2\angle GPB$，因为 $\triangle GPB$ 为直角三角形，同时 $\triangle NGM$ 为等腰直角三角形，$NG = GM = 2, NM = 2\sqrt{2}$，

所以当 P 在运动中时，$PG \in [\sqrt{2}, 2]$，$GB = 1 < PG$，所以 $\angle GPB < 45^{\circ}$，$\angle APB < 90^{\circ}$，故 A 错；

对于 B:



由对称性得 $PD=PC$，即求 $PA_1+PD=PA_1+PC$，在面 CDA_1B_1 中，

$\left(PA_1+PC\right)_{\min}=A_1C=2\sqrt{3}$，故 B 对；

对于 C:因为以 MN 为直径的球的球心为正方体中心，半径为 $\sqrt{2}$，而正方体中心到各棱距离均为 $\sqrt{2}$，

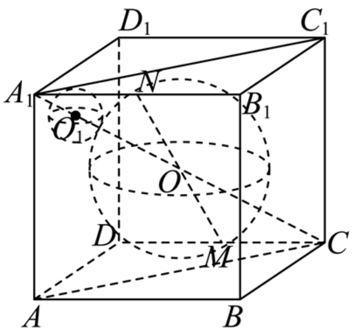
所以该球与正方体 12 条棱均相切，所以有 12 个交点，故 C 对；

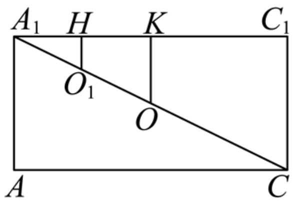
对于 D:因为体积最大的小球为小球与正方体和球 O 均相切时取到.研究截面 A_1ACC_1

，分别过 O 和小球球心 O_1 作 A_1C_1 的垂线，垂足分别为 K，H，则 $\triangle A_1OK\sim\triangle A_1O_1H$，

因为球 O 与小球 O_1 相切，球 O 半径为 1，设小球 O_1 的半径为 r，则 $\dfrac{r}{1}=\dfrac{\sqrt{3}-1-r}{\sqrt{3}}$，

所以 $r=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}$，所以小球体积最大值为 $V=\dfrac{4\pi}{3}(2-\sqrt{3})^3=\dfrac{(104-60\sqrt{3})\pi}{3}$，故 D 对.





故选：BCD.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x},2\le x<3,\\ ex+\dfrac{1}{x},0\le x<2,\end{cases}$ 则 $f\left(\dfrac{1}{e}\right)+f(e)=$________.

【答案】$e+\dfrac{3}{2}$

【解析】

【分析】根据分段函数的解析式求函数值即可得解.

【详解】因为 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x},2\le x<3,\\ ex+\dfrac{1}{x},0\le x<2,\end{cases}$

所以 $f\left(\dfrac{1}{e}\right)+f(e)=e\times\dfrac{1}{e}+e+\ln\sqrt{e}=1+e+\dfrac{1}{2}=e+\dfrac{3}{2}$，

故答案为：$e+\dfrac{3}{2}$

13. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $a_{n+2}+(-1)^n a_n=n+2$， $S_4=9$，则 $a_1=$________.

【答案】1

【解析】

【分析】根据递推公式可得 $a_3-a_1=3$①，$a_4+a_2=4$②，$S_4=a_1+a_2+a_3+a_4$③，由此可求解.

【详解】由题意可知 $a_3-a_1=3$①，$a_4+a_2=4$②，$S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=9$③

将①②式相加可得 $a_4+a_3+a_2-a_1=7$，与③式相减可得 $2a_1=2$，则 $a_1=1$.

故答案为：1

14. 已知函数 $f(x)=me^x+\dfrac{x^3}{3}$，曲线 $y=f(x)$ 在不同的三点处的切线斜率均为 3，则实数 m 的取值范围是________.

【答案】$\left(-\dfrac{6}{e^3},0\right)$.

【解析】

【分析】根据切线斜率与导数的关系，结合函数与方程的关系，利用数形结合的思想，由函数交点个数，可得答案.

【详解】因为函数 $f(x)=me^x+\dfrac{x^3}{3}$ 图象在不同的三点处的切线斜率均为 3，

所以 $f'(x)=me^x+x^2=3$ 有三个不同的根，即 $m=\dfrac{3-x^2}{e^x}$ 有三个不同的根，

转化为函数 $y=m$ 图象和函数 $g(x)=\dfrac{3-x^2}{e^x}$ 图象有三个不同的交点，

下面分析函数 $g(x)=\dfrac{3-x^2}{e^x}$ 图象，$g'(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{e^x}=\dfrac{(x-3)(x+1)}{e^x}$，