

许昌市重点中学 2024 年数学高三上期末复习检测试题

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

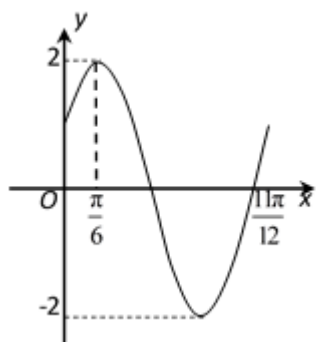
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知定义在 R 上函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称，且 $f(1+x)+f(2-x)=0$ ，若 $f(1)=1$ ，则

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2020)=\quad(\quad)$$

- A. 0 B. 1 C. 673 D. 674

2. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ ($A>0, \omega>0, |\varphi|<\frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示，且 $f(a+x)+f(a-x)=0$ ，则 $|a|$ 的最小值为 ($\quad$)

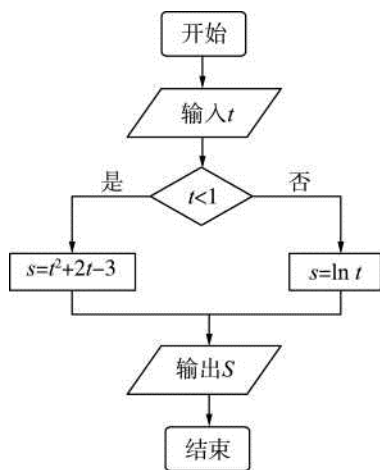


- A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$
C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{12}$

3. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的顶点都在球 O 的球面上， $PA=\sqrt{2}$ ， $PB=\sqrt{14}$ ， $AB=4$ ， $CA=CB=\sqrt{10}$ ，面 $PAB\perp$ 面 ABC ，则球 O 的表面积为 ($\quad$)

- A. $\frac{10\pi}{3}$ B. $\frac{25\pi}{6}$ C. $\frac{40\pi}{9}$ D. $\frac{50\pi}{3}$

4. 执行如图所示的程序框图，如果输入 $t\in[-2, e^2]$ ，则输出 S 属于 ($\quad$)



- A. $[-3, 2]$ B. $[-4, 2]$ C. $[0, 2]$ D. $[-3, e^2]$

5. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 $E(0, t) (t > 0)$. 已知动点 P 在双曲线 C 的右支上, 且点 P, E, F_2 不共线. 若 $\triangle PEF_2$ 的周长的最小值为 $4b$, 则双曲线 C 的离心率 e 的取值范围是 ()

- A. $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ B. $\left[1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ C. $[\sqrt{3}, +\infty)$ D. $(1, \sqrt{3}]$

6. 已知六棱锥 $P-ABCDEF$ 各顶点都在同一个球 (记为球 O) 的球面上, 且底面 $ABCDEF$ 为正六边形, 顶点 P 在底面上的射影是正六边形 $ABCDEF$ 的中心 G , 若 $PA = \sqrt{6}$, $AB = \sqrt{2}$, 则球 O 的表面积为 ()

- A. $\frac{16\pi}{3}$ B. $\frac{9\pi}{4}$ C. 6π D. 9π

7. 正四棱锥 $P-ABCD$ 的五个顶点在同一个球面上, 它的底面边长为 $\sqrt{6}$, 侧棱长为 $2\sqrt{3}$, 则它的外接球的表面积为 ()

- A. 4π B. 8π C. 16π D. 20π

8. 已知函数 $f(x) = \frac{e \ln x}{x^2}$, 若关于 x 的方程 $[f(x)]^2 - mf(x) + \frac{1}{8} = 0$ 有 4 个不同的实数根, 则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $(0, \frac{3}{4})$ B. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ C. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{4})$ D. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$

9. 2020 年是脱贫攻坚决战决胜之年, 某市为早日实现目标, 现将甲、乙、丙、丁 4 名干部派遣到 A 、 B 、 C 三个贫困县扶贫, 要求每个贫困县至少分到一人, 则甲被派遣到 A 县的分法有 ()

- A. 6 种 B. 12 种 C. 24 种 D. 36 种

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a \cos B + b \sin A = c$. 若 $a = 2$, $\triangle ABC$ 的面积为 $3(\sqrt{2} - 1)$, 则 $b + c =$ ()

- A. 5 B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. 16

11. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 满足 $f(x+2) = 2f(x)$, 且当 $x \in (0, 2]$ 时, $f(x) = -x(x-2)$. 若对任意 $x \in (-\infty, m]$, 都有 $f(x) \leq \frac{40}{9}$, 则 m 的取值范围是 () .

- A. $\left(-\infty, \frac{9}{4}\right]$ B. $\left(-\infty, \frac{19}{3}\right]$ C. $(-\infty, 7]$ D. $\left(-\infty, \frac{23}{3}\right]$

12. 甲乙丙丁四人中, 甲说: 我年纪最大, 乙说: 我年纪最大, 丙说: 乙年纪最大, 丁说: 我不是年纪最大的, 若这四人中只有一个人说的是真话, 则年纪最大的是 ()

- A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 从一箱产品中随机地抽取一件, 设事件 $A = \{\text{抽到一等品}\}$, 事件 $B = \{\text{抽到二等品}\}$, 事件 $C = \{\text{抽到三等品}\}$, 且已知 $P(A) = 0.65$, $P(B) = 0.2$, $P(C) = 0.1$, 则事件“抽到的产品不是一等品”的概率为_____

14. 设函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x - a|, & 0 < x \leq 4 \\ f(8-x), & 4 < x < 8 \end{cases}$, 若存在实数 m , 使得关于 x 的方程 $f(x) = m$ 有 4 个不相等的实根, 且这 4 个根的平方和存在最小值, 则实数 a 的取值范围是_____.

15. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为棱 AA_1, D_1A_1 的中点, 则直线 EF 与直线 A_1B 所成角的正切值为_____.

16. 如果复数 z 满足 $i \cdot z = 1 + i$, 那么 $|z| =$ _____ (i 为虚数单位) .

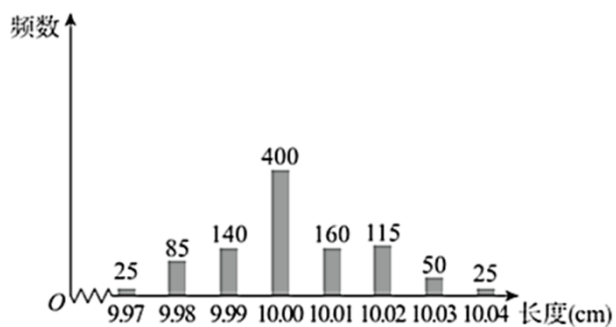
三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 4 \cos \alpha \\ y = 2 \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 将曲线 C 上各点纵坐标伸长到原来的 2 倍 (横坐标不变) 得到曲线 C_1 , 以坐标原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴, 建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $4\rho \cos \theta + 3\rho \sin \theta - 25 = 0$.

(1) 写出 C_1 的极坐标方程与直线 l 的直角坐标方程;

(2) 曲线 C_1 上是否存在不同的两点 $M(4, \theta_1)$, $N(4, \theta_2)$ (以上两点坐标均为极坐标, $0 < \theta_1 < 2\pi$, $0 < \theta_2 < 2\pi$), 使点 M, N 到 l 的距离都为 3? 若存在, 求 $|\theta_1 - \theta_2|$ 的值; 若不存在, 请说明理由.

18. (12 分) 某工厂生产一种产品的标准长度为 10.00cm，只要误差的绝对值不超过 0.03cm 就认为合格，工厂质检部抽检了某批次产品 1000 件，检测其长度，绘制条形统计图如图：



(1) 估计该批次产品长度误差绝对值的数学期望；

(2) 如果视该批次产品样本的频率为总体的概率，要求从工厂生产的产品中随机抽取 2 件，假设其中至少有 1 件是标准长度产品的概率不小于 0.8 时，该设备符合生产要求. 现有设备是否符合此要求？若不符合此要求，求出符合要求时，生产一件产品为标准长度的概率的最小值.

19. (12 分) 已知点 P 是抛物线 $C: y = \frac{1}{4}x^2 - 3$ 的顶点， A, B 是 C 上的两个动点，且 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = -4$.

(1) 判断点 $D(0,1)$ 是否在直线 AB 上？说明理由；

(2) 设点 M 是 $\triangle PAB$ 的外接圆的圆心，点 M 到 x 轴的距离为 d ，点 $N(1,0)$ ，求 $|MN| - d$ 的最大值.

20. (12 分) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ， $a^2 - ab - 2b^2 = 0$.

(1) 若 $C = \frac{\pi}{3}$ ，证明： $\sqrt{3} \sin B = \sin C$.

(2) 若 $C = \frac{2\pi}{3}$ ， $c = 7$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积.

21. (12 分) 如图，在正四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA = AB = \sqrt{2}$ ，点 M, N 分别在线段 PA, BD 上， $BN = \frac{1}{3}BD$.

(1) 若 $PM = \frac{1}{3}PA$ ，求证： $MN \perp AD$ ；

(2) 若二面角 $M-BD-A$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$ ，求线段 MN 的长.

22. (10 分) 已知 $P(0,-2)$ ，点 A, B 分别为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点，直线 BP 交 E 于另一点

$Q, \triangle ABP$ 为等腰直角三角形, 且 $|PQ|:|QB|=3:2$.

(I) 求椭圆 E 的方程;

(II) 设过点 P 的直线 l 与椭圆 E 交于 M, N 两点, 总使得 $\angle MON$ 为锐角, 求直线 l 斜率的取值范围.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、B

【解析】

由题知 $f(x)$ 为奇函数, 且 $f(1+x)+f(2-x)=0$ 可得函数 $f(x)$ 的周期为 3, 分别求出

$f(0)=0, f(1)=1, f(2)=-1$, 知函数在一个周期内的和是 0, 利用函数周期性对所求式子进行化简可得.

【详解】

因为 $f(x)$ 为奇函数, 故 $f(0)=0$;

因为 $f(1+x)+f(2-x)=0$, 故 $f(1+x)=-f(2-x)=f(x-2)$,

可知函数 $f(x)$ 的周期为 3;

在 $f(1+x)+f(2-x)=0$ 中, 令 $x=1$, 故 $f(2)=-f(1)=-1$,

故函数 $f(x)$ 在一个周期内的函数值和为 0,

故 $f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(2020)=f(1)=1$.

故选: B.

【点睛】

本题考查函数奇偶性与周期性综合问题. 其解题思路: 函数的奇偶性与周期性相结合的问题多考查求值问题, 常利用奇偶性及周期性进行变换, 将所求函数值的自变量转化到已知解析式的函数定义域内求解.

2、A

【解析】

a 是函数 $f(x)$ 的零点, 根据五点法求出图中零点及 y 轴左边第一个零点可得.

【详解】

由题意 $\frac{3}{4}T = \frac{11\pi}{12} - \frac{\pi}{6}$, $T = \pi$, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 y 轴右边的第一个零点为 $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$, 在 y 轴左边第一个零点是

$$\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12},$$

$\therefore |a|$ 的最小值是 $\frac{\pi}{12}$.

故选: A.

【点睛】

本题考查三角函数的周期性, 考查函数的对称性. 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的零点就是其图象对称中心的横坐标.

3、D

【解析】

由题意画出图形, 找出 $\triangle PAB$ 外接圆的圆心及三棱锥 $P-BCD$ 的外接球心 O , 通过求解三角形求出三棱锥 $P-BCD$ 的外接球的半径, 则答案可求.

【详解】

如图: 设 AB 的中点为 D ;

$$\because PA = \sqrt{2}, PB = \sqrt{14}, AB = 4,$$

$\therefore \triangle PAB$ 为直角三角形, 且斜边为 AB , 故其外接圆半径为: $r = \frac{1}{2}AB = AD = 2$;

设外接球球心为 O ;

$$\because CA = CB = \sqrt{10}, \text{面 } PAB \perp \text{面 } ABC,$$

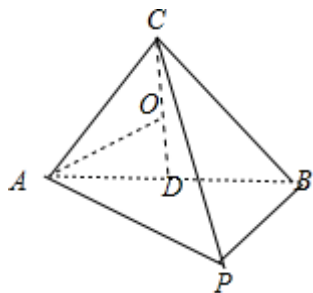
$$\therefore CD \perp AB \text{ 可得 } CD \perp \text{面 } PAB; \text{ 且 } DC = \sqrt{CA^2 - AD^2} = \sqrt{6}.$$

$\therefore O$ 在 CD 上;

$$\text{故有: } AO^2 = OD^2 + AD^2 \Rightarrow R^2 = (\sqrt{6} - R)^2 + r^2 \Rightarrow R = \frac{5}{\sqrt{6}};$$

$$\therefore \text{球 } O \text{ 的表面积为: } 4\pi R^2 = 4\pi \times \left(\frac{5}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{50\pi}{3}.$$

故选: D.



【点睛】

本题考查多面体外接球表面积的法，考查数形结合的解题思想方法，考查思维能力与计算能力，属于中档题.

4、B

【解析】

由题意，框图的作用是求分段函数 $S(t) = \begin{cases} t^2 + 2t - 3, & t \in [-2, 1] \\ \ln t, & t \in [1, e^2] \end{cases}$ 的值域，求解即得解.

【详解】

由题意可知，

框图的作用是求分段函数 $S(t) = \begin{cases} t^2 + 2t - 3, & t \in [-2, 1] \\ \ln t, & t \in [1, e^2] \end{cases}$ 的值域，

当 $t \in [-2, 1), S \in [-4, 0)$;

当 $t \in [1, e^2], S \in [0, 2]$

综上: $S \in [-4, 2]$.

故选: B

【点睛】

本题考查了条件分支的程序框图，考查了学生逻辑推理，分类讨论，数学运算的能力，属于基础题.

5、A

【解析】

依题意可得 $C_{\triangle PEF_2} = PE + PF_2 + EF_2 = PE + PF_2 + EF_1 \geq 2PF_1 - 2a = 4b$

即可得到 $2a + 4b > 2(a + c)$ ，从而求出双曲线的离心率的取值范围；

【详解】

解：依题意可得如下图象， $C_{\triangle PEF_2} = PE + PF_2 + EF_2 = PE + PF_2 + EF_1$

$= PE + PF_1 + EF_1 - 2a$

$\geq 2PF_1 - 2a = 4b$

$$\therefore 2PF_1 = 2a + 4b > 2(a + c)$$

所以 $2b > c$

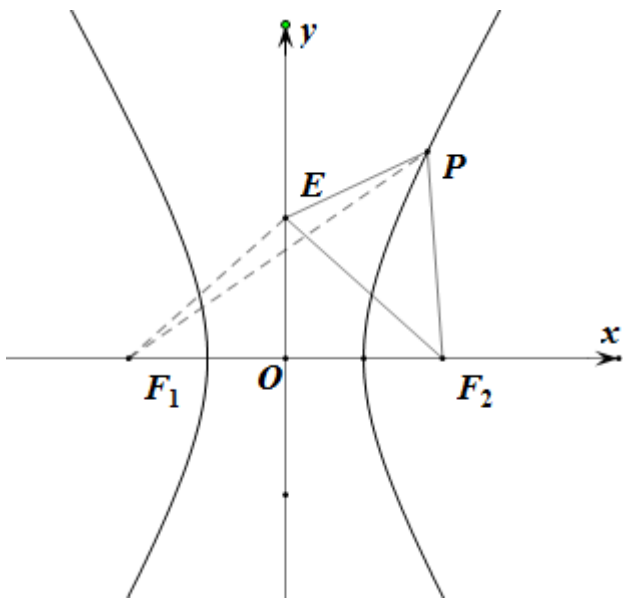
$$\text{则 } 4c^2 - 4a^2 > c^2$$

$$\text{所以 } 3c^2 > 4a^2$$

$$\text{所以 } e^2 = \frac{c^2}{a^2} > \frac{4}{3}$$

$$\text{所以 } e > \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ 即 } e \in \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty \right)$$

故选：A



【点睛】

本题考查双曲线的简单几何性质，属于中档题.

6、D

【解析】

由题意，得出六棱锥 $P-ABCDEF$ 为正六棱锥，求得 $PG = \sqrt{PA^2 - AG^2} = 2$ ，再结合球的性质，求得球的半径

$$R = \frac{3}{2}, \text{ 利用表面积公式，即可求解.}$$

【详解】

由题意，六棱锥 $P-ABCDEF$ 底面 $ABCDEF$ 为正六边形，顶点 P 在底面上的射影是正六边形 $ABCDEF$ 的中心 G ，可得此六棱锥为正六棱锥，

$$\text{又由 } AB = \sqrt{2}, \text{ 所以 } AG = \sqrt{2},$$

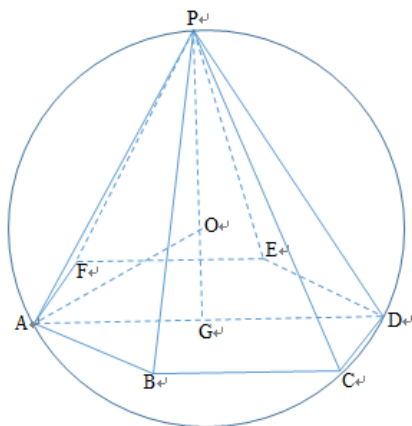
在直角 $\triangle PAG$ 中，因为 $PA = \sqrt{6}$ ，所以 $PG = \sqrt{PA^2 - AG^2} = 2$ ，

设外接球的半径为 R ，

在 $\triangle AOG$ 中，可得 $AO^2 = AG^2 + OG^2$ ，即 $R^2 = (2 - R)^2 + (\sqrt{2})^2$ ，解得 $R = \frac{3}{2}$ ，

所以外接球的表面积为 $S = 4\pi R^2 = 9\pi$ 。

故选:D.



【点睛】

本题主要考查了正棱锥的几何结构特征，以及外接球的表面积的计算，其中解答中熟记几何体的结构特征，熟练应用球的性质求得球的半径是解答的关键，着重考查了空间想象能力，以及推理与计算能力，属于中档试题。

7、C

【解析】

如图所示，在平面 $ABCD$ 的投影为正方形的中心 E ，故球心 O 在 PE 上，计算长度，设球半径为 R ，则

$(PE - R)^2 + BE^2 = R^2$ ，解得 $R = 2$ ，得到答案。

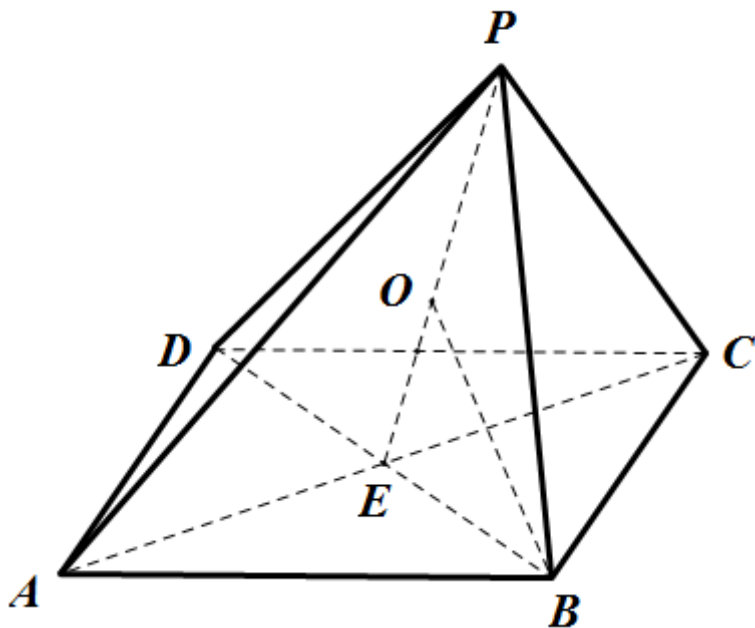
【详解】

如图所示： P 在平面 $ABCD$ 的投影为正方形的中心 E ，故球心 O 在 PE 上，

$BD = \sqrt{2}AB = 2\sqrt{3}$ ，故 $BE = \frac{1}{2}BD = \sqrt{3}$ ， $PE = \sqrt{PB^2 - BE^2} = 3$ ，

设球半径为 R ，则 $(PE - R)^2 + BE^2 = R^2$ ，解得 $R = 2$ ，故 $S = 4\pi R^2 = 16\pi$ 。

故选：C。



【点睛】

本题考查了四棱锥的外接球问题，意在考查学生的空间想象能力和计算能力.

8、C

【解析】

求导，先求出 $f(x)$ 在 $x \in (0, \sqrt{e})$ 单增，在 $x \in (\sqrt{e}, +\infty)$ 单减，且 $f(x)_{\max} = f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$ 知设 $f(x) = t$ ，则方程

$[f(x)]^2 - mf(x) + \frac{1}{8} = 0$ 有 4 个不同的实数根等价于方程

$t^2 - mt + \frac{1}{8} = 0$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上有两个不同的实数根，再利用一元二次方程根的分布条件列不等式组求解可得.

【详解】

依题意， $f'(x) = \frac{\frac{e}{x} \cdot x^2 - 2xe \ln x}{x^4} = \frac{e(1 - 2 \ln x)}{x^3}$ ，

令 $f'(x) = 0$ ，解得 $\ln x = \frac{1}{2}$ ， $x = \sqrt{e}$ ，故当 $x \in (0, \sqrt{e})$ 时， $f'(x) > 0$ ，

当 $x \in (\sqrt{e}, +\infty)$ ， $f'(x) < 0$ ，且 $f(\sqrt{e}) = \frac{e \ln \sqrt{e}}{e} = \frac{1}{2}$ ，

故方程 $t^2 - mt + \frac{1}{8} = 0$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上有两个不同的实数根，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/468073067007006051>