瓜豆原理中动点轨迹直线型最值问题以及逆向构造

【专题说明】

近些年的中考中，经常出现动点的运动轨迹类问题，通常出题以求出轨迹的长度或最值最为常见。很多考生碰到此类试题常常无所适从，不知该从何下手。

动点轨迹问题是中考的重要压轴点.受学生解析几何知识的局限和思维能力的束缚,该压轴点往往成为学生在中考中的一个坎,致使该压轴点成为学生在中考中失分的一个黑洞.掌握该压轴点的基本图形,构建问题解决的一般思路,是中考专题复习的一个重要途径.本文就动点轨迹问题的基本图形作一详述.动点轨迹基本类型为直线型和圆弧型.

其实初中阶段如遇求轨迹长度仅有 2 种类型：“直线型”和“圆弧型”（两种类型中还会涉及点往返探究“往返型”），对于两大类型该如何断定，通常老师会让学生画图寻找 3 处以上的点来确定轨迹类型进而求出答案，对于填空选择题而言不外乎是个好方法，但如果要进行说理很多考生难以解释清楚。

瓜豆原理：一个主动点，一个从动点（根据某种约束条件，跟着主动点动），当主动点运动时，从动点的轨迹相同.

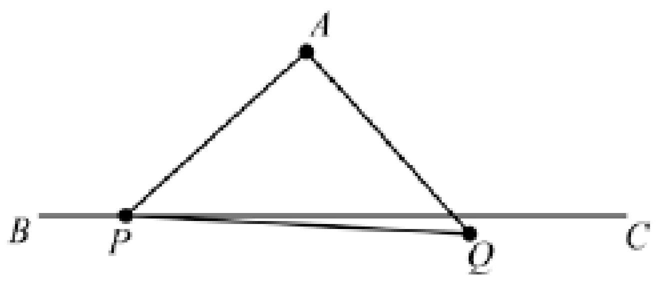
只要满足：

1. 两“动”，一“定”；
2. 两动点与定点的连线夹角是定角
3. 两动点到定点的距离比值是定值。

则两动点的运动轨迹是相似的，运动轨迹长度的比和它们到定点的距离比相同。

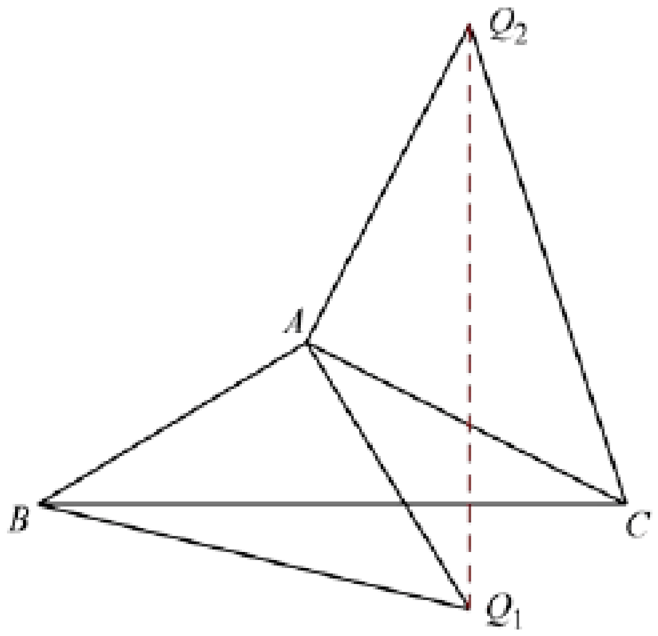
【引例】（选讲）

如图，△APQ 是等腰直角三角形，∠PAQ =90°且 AP =AQ ，当点 P 在直线 BC 上运动时，求 Q 点轨迹？



【分析】当 AP 与 AQ 夹角固定且 AP :AQ 为定值的话，P、Q 轨迹是同一种图形.

当确定轨迹是线段的时候，可以任取两个时刻的 Q 点的位置，连线即可，比如 Q 点的起始位置和终点位置，连接即得 Q 点轨迹线段.



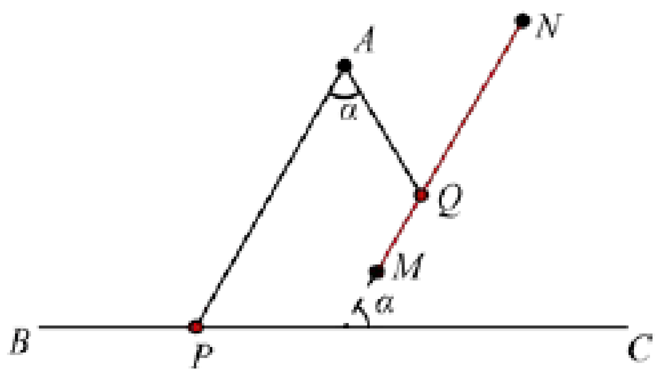
【模型总结】

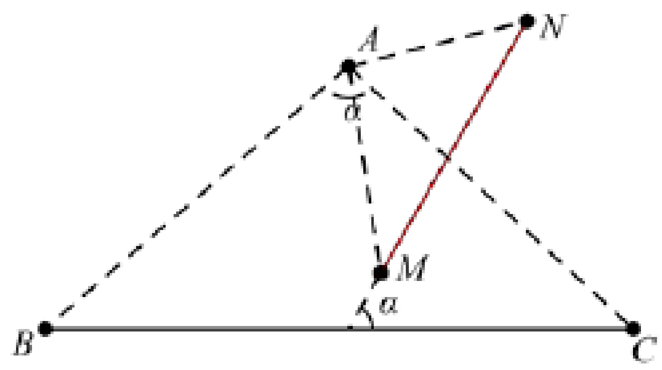
必要条件：

主动点、从动点与定点连线的夹角是定量（∠PAQ 是定值）;

主动点、从动点到定点的距离之比是定量（AP :AQ 是定值).

结论：P、Q 两点轨迹所在直线的夹角等于∠PAQ （当∠PAQ ≤90时，∠PAQ 等于 MN 与 BC 夹角）

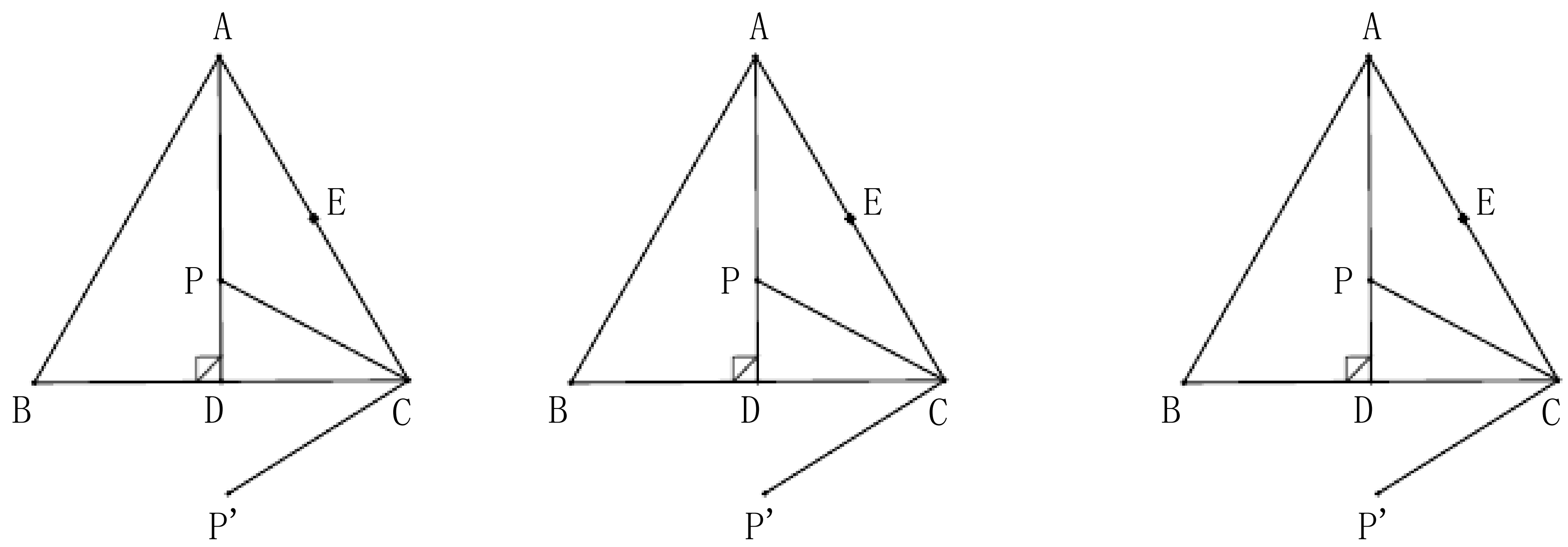




P、Q 两点轨迹长度之比等于 AP :AQ （由△ABC ∽△AMN ，可得 AP :AQ =BC :MN ）

【例题 1】

如图，D、E 是边长为 4 的等边三角形 ABC 上的中点，P 为中线 AD 上的动点，把线段 PC 绕 C 点逆时针旋转 60°，得到 P’，EP’的最小值



【分析】

结合这个例题我们再来熟悉一下瓜豆模型

第一层：点 P’运动的轨迹是直线吗？

第二层：点 P’的运动长度和点 P 的运动长度相同吗？

第三层：手拉手模型怎么构造？

第四层：分析∠CAP 和∠CBP’

第五层：点 P 和点 P’轨迹的夹角和旋转角的关系

总共提到了 3 种处理方式：

1.找始末，定轨迹

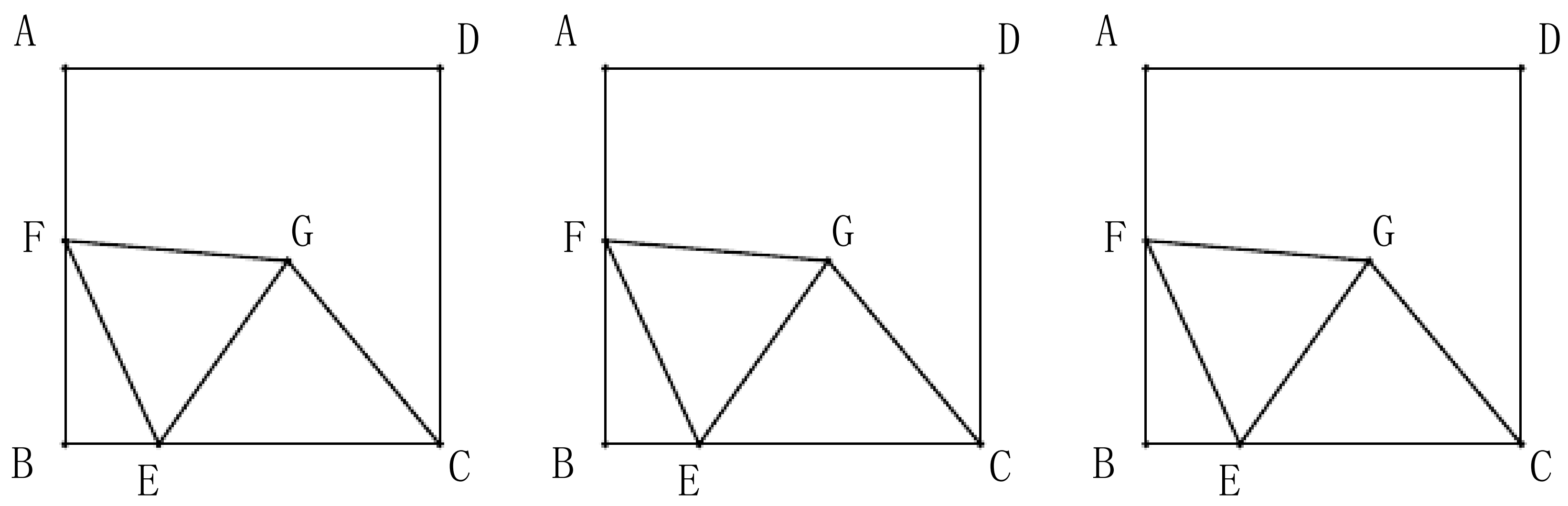
2.在轨迹上找一点旋转，构造手拉手模型，再通过角度相等得到从动点轨迹.

3.反向旋转相关定点，构造手拉手模型，代换所求线段，即逆向构造.

那么什么具体选择什么方法更合适呢？我们再看一道例题

【例题 2 宿迁中考】

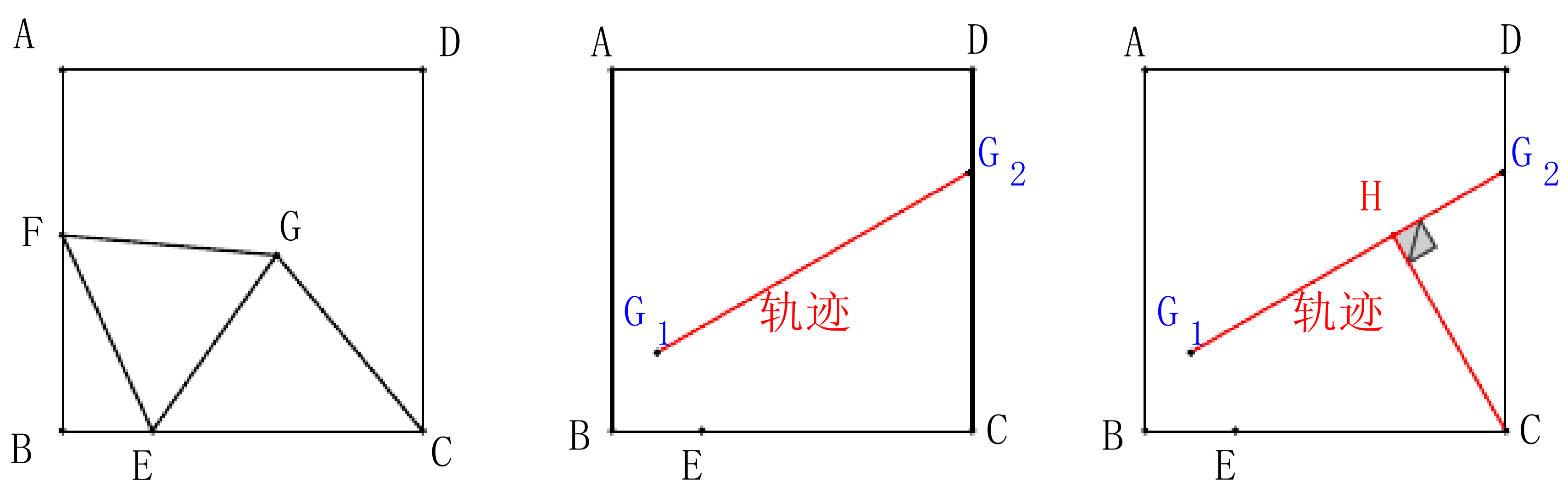
如图，正方形 ABCD 的边长为 4，E 为 BC 上一点，且 BE ＝1，F 为 AB 边上的一个动点，连接 EF ，以 EF 为边向右侧作等边△EFG ，连接 CG ，则 CG 的最小值为____.



现在，我们分别用上面提到的 3 种策略来处理这个题目

策略一：找始末，定轨迹

我们分别以 BE ，AE 为边，按题目要求构造等边三角形得到 G_1 与 G_2，连接 G_1 与 G_2 得到点 G 的轨迹，再作垂线 CH 得到最小值.



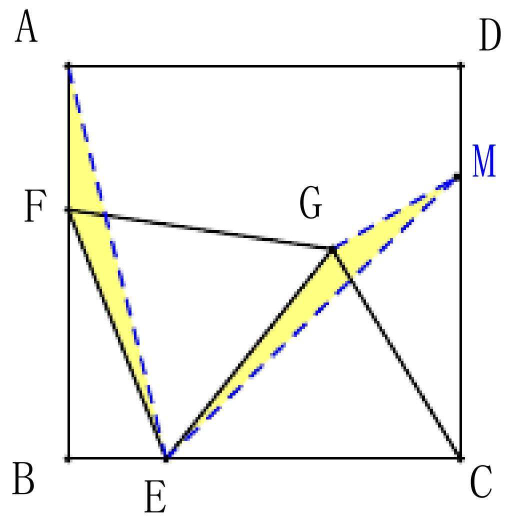
前面提到过从动点轨迹和主动点轨迹的夹角与旋转角有关，我们可以调用这个结论，得到$\angle AMG_1=60°$，

进一步得到$\triangle MBG_1$为等腰三角形后，求 CH 就不难了.

策略二：在点 F 轨迹上找一点进行旋转.

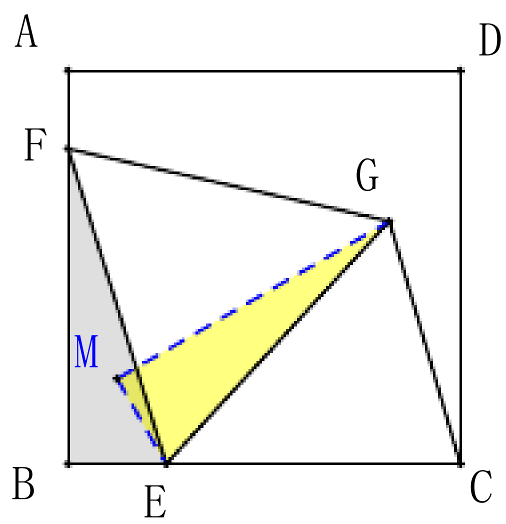
我们分别对 A，B 顺时针旋转 60°，构造手拉手模型，再通过角度相等得到从动点轨迹，

对 A 点旋转会得到一个正切值为$\frac{1}{4}$的角，即 $\tan\angle GM{=}E$ $\tan\angle AFE=\frac{1}{4}$，然后进一步算出最值



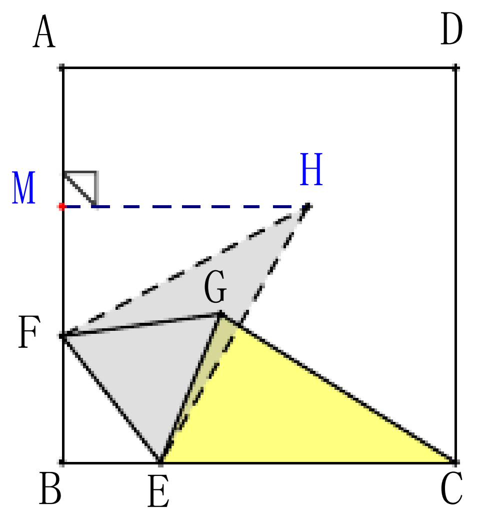
【简证】EM AE $\sqrt{17}$ EN 1 $\angle NEC$ 120° IC $\frac{3}{2}$,则 CH $=\frac{5}{2}$

对 B 点旋转得到$\angle EMG=\angle FBE=90°$，相对来说要容易一些.



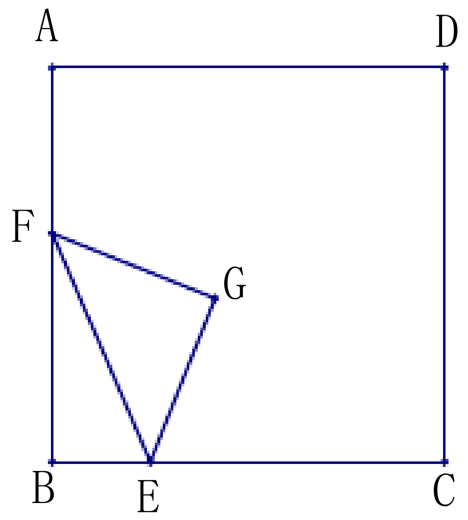
策略三：反向旋转相关定点，构造手拉手模型，代换所求线段.

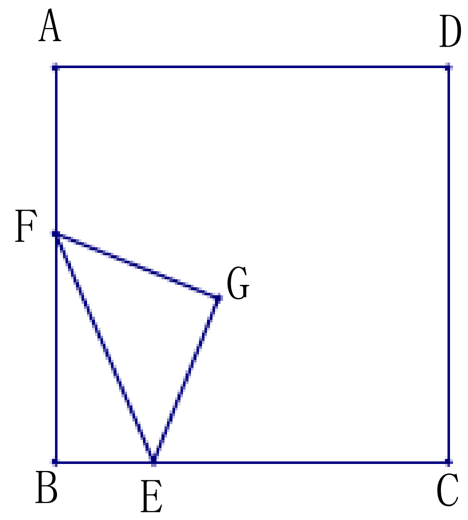
将点 C 逆时针旋转 60°，得到点 H，易证$\triangle CGE\cong\triangle HFE$，则有 $CG=HF$，作 $MH\perp AB$ 于 M，HM 即为所求. 相比之下，先求轨迹后再求垂线段时，比较麻烦，而反向旋转代换所求线段感觉清爽很多.



【变式训练 1】旋转+伸缩

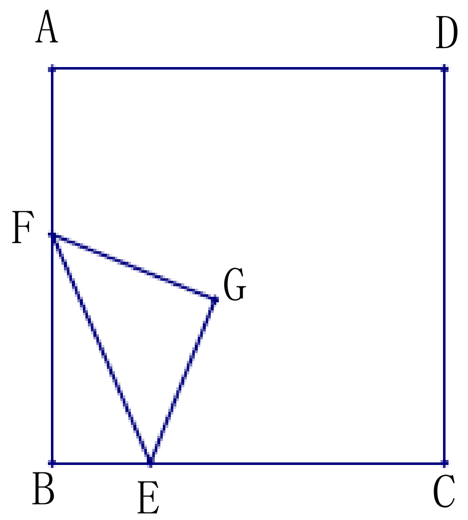
如图，正方形 ABCD 的边长为 4，E 为 BC 上一点，且 BE =1，F 为 AB 边上的一个动点，连接 EF，以 EF 为底向右侧作等腰直角△EFG，连接 CG，则 CG 的最小值为________.





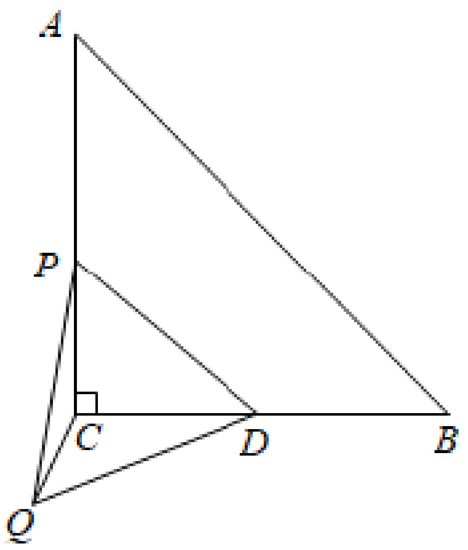
【变式训练 2】双动点

如图，正方形 ABCD 的边长为 4，E 为 BC 上一点，F 为 AB 边上一点，连接 EF，以 EF 为底向右侧作等腰直角△EFG，连接 CG，则 AG 的最小值为________.



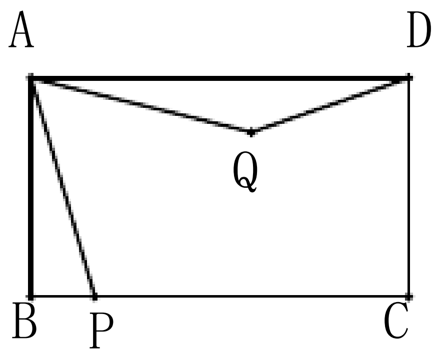
【巩固练习① 2021·四川广元】

1.如图，在△ABC 中，∠ACB =90°，AC =BC =4，点 D 是 BC 边的中点，点 P 是 AC 边上一个动点，连接 PD，以 PD 为边在 PD 的下方作等边△PDQ，连接 CQ．则 CQ 的最小值是______

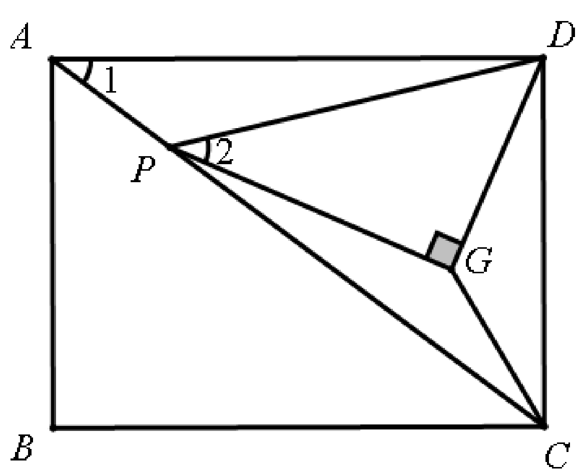


【巩固练习② 2021 山东泰安中考】

2.如图，在矩形 ABCD 中，AB =5，BC =5 $\sqrt{3}$,点 P 在线段 BC 上运动（含 B、C 两点），连接 AP，以点 A 为中心，将线段 AP 逆时针旋转 60°到 AQ，连接 DQ，则线段 DQ 的最小值为______



3、如图,在矩形 ABCD 中,AB=3,BC=4,P 是对角线 AC 上的动点,连接 DP,将直线 DP 绕点 P 顺时针旋转,使∠1=∠2,且过点 D 作 DG ⊥PG,连接 CG. 则 CG 最小值为________



瓜豆原理中动点轨迹直线型最值问题以及逆向构造

【专题说明】

近些年的中考中，经常出现动点的运动轨迹类问题，通常出题以求出轨迹的长度或最值最为常见。很多考生碰到此类试题常常无所适从，不知该从何下手。

动点轨迹问题是中考的重要压轴点.受学生解析几何知识的局限和思维能力的束缚,该压轴点往往成为学生在中考中的一个坎,致使该压轴点成为学生在中考中失分的一个黑洞.掌握该压轴点的基本图形,构建问题解决的一般思路,是中考专题复习的一个重要途径.本文就动点轨迹问题的基本图形作一详述.动点轨迹基本类型为直线型和圆弧型.

其实初中阶段如遇求轨迹长度仅有 2 种类型：“直线型”和“圆弧型”（两种类型中还会涉及点往返探究“往返型”），对于两大类型该如何断定，通常老师会让学生画图寻找 3 处以上的点来确定轨迹类型进而求出答案，对于填空选择题而言不外乎是个好方法，但如果要进行说理很多考生难以解释清楚。

瓜豆原理：一个主动点，一个从动点（根据某种约束条件，跟着主动点动），当主动点运动时，从动点的轨迹相同.

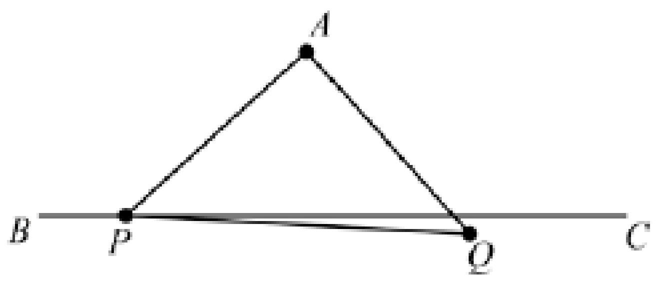
只要满足：

1. 两“动”，一“定”；
2. 两动点与定点的连线夹角是定角
3. 两动点到定点的距离比值是定值。

则两动点的运动轨迹是相似的，运动轨迹长度的比和它们到定点的距离比相同。

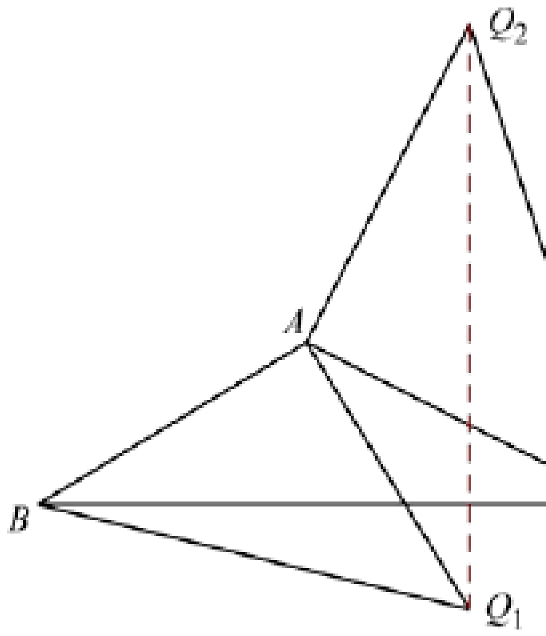
【引例】（选讲）

如图，△APQ 是等腰直角三角形，∠PAQ =90°且 AP =AQ ，当点 P 在直线 BC 上运动时，求 Q 点轨迹？



【分析】当 AP 与 AQ 夹角固定且 AP :AQ 为定值的话，P、Q 轨迹是同一种图形.

当确定轨迹是线段的时候，可以任取两个时刻的 Q 点的位置，连线即可，比如 Q 点的起始位置和终点位置，连接即得 Q 点轨迹线段.



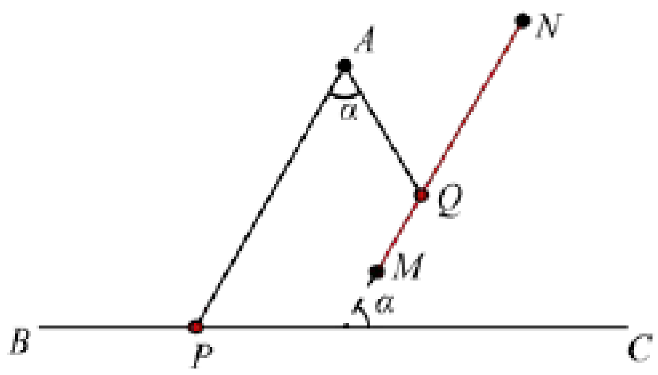
【模型总结】

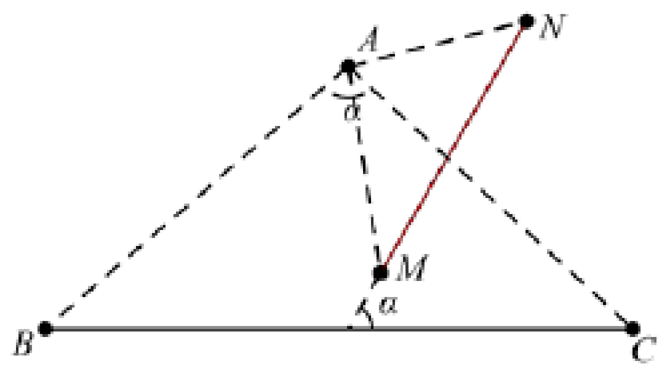
必要条件：

主动点、从动点与定点连线的夹角是定量（∠PAQ 是定值)；

主动点、从动点到定点的距离之比是定量（AP :AQ 是定值).

结论：P、Q 两点轨迹所在直线的夹角等于∠PAQ（当∠PAQ ≤90时，∠PAQ 等于 MN 与 BC 夹角）

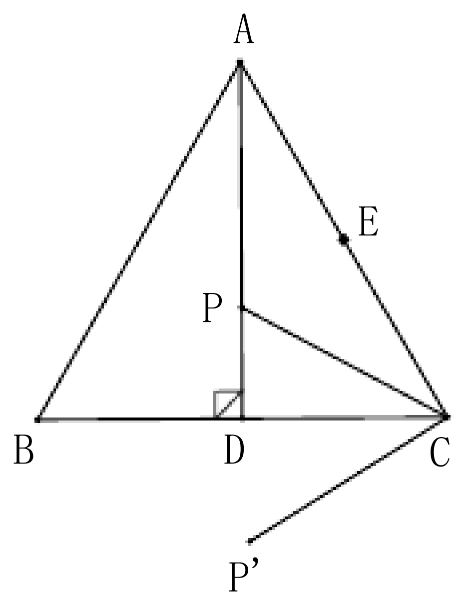




P、Q 两点轨迹长度之比等于 AP :AQ （由△ABC ∽△AMN ，可得 AP :AQ =BC :MN ）

【例题 1】

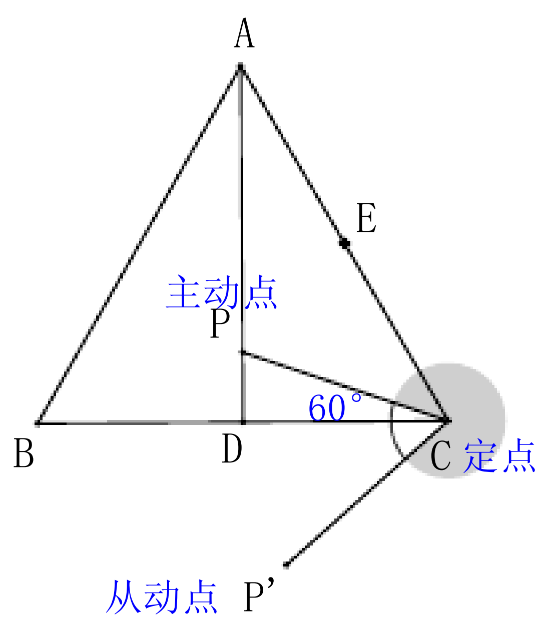
如图，D 、E 是边长为 4 的等边三角形 ABC 上的中点，P 为中线 AD 上的动点，把线段 PC 绕 C 点逆时针旋转 60°，得到 P’，EP’ 的最小值

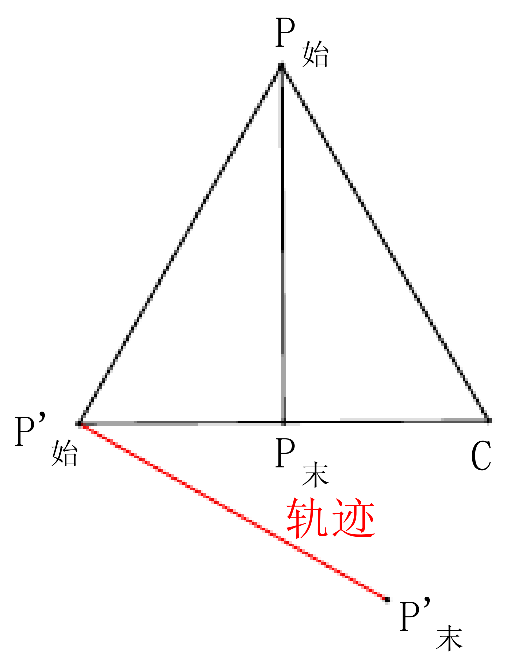


【分析】

结合这个例题我们再来熟悉一下瓜豆模型

第一层：点 P’ 运动的轨迹是直线吗？





答：是直线，可以通过 P 在 A，D 时，即始末位置时 P’ 对应的位置得到直线轨迹，对于选填题，可找出从动点的始末位置，从而快速定位轨迹，若要说理则需要构造手拉手证明.

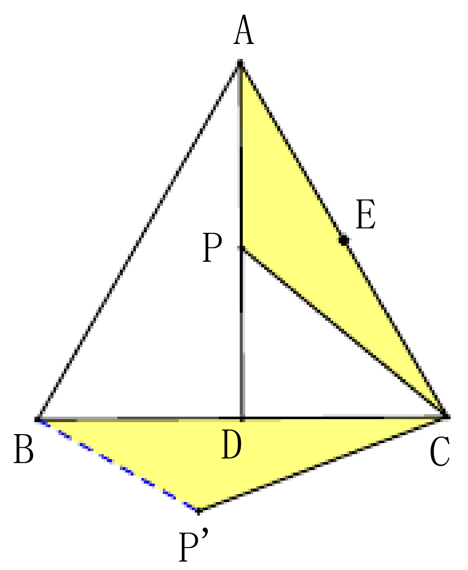
第二层：点 P’ 的运动长度和点 P 的运动长度相同吗？

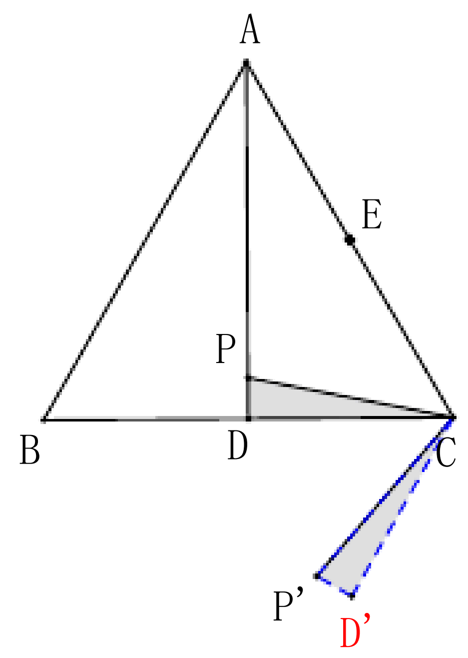
答：因为点 P’ 与点 P 到定点 C 的距离相等，则有运动路径长度相等，若要说理则同样需要构造手拉手结构，通过全等证明.

第三层：手拉手模型怎么构造？

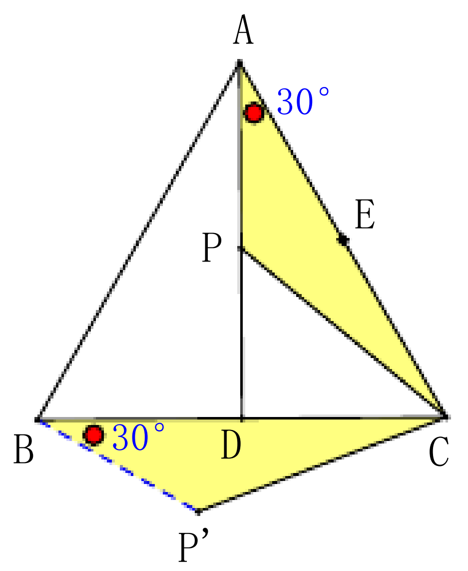
答：以旋转中心 C 为顶点进行构造，其实只要再找一组对应的主从点即可，简单来说就是从 P 点的轨迹即

线段 AD 中再找一个点进行与 P 点类似的的旋转，比如把线段 AD 中的点 A 绕 C 点逆时针旋转 60°，即为点 B，连接 BP’即可得到一组手拉手模型，虽然前面说是任意点，但一般来说我们选择一个特殊位置的点进行旋转后的点位置也是比较容易确定的，比如说点 D 进行旋转也是比较方便的.



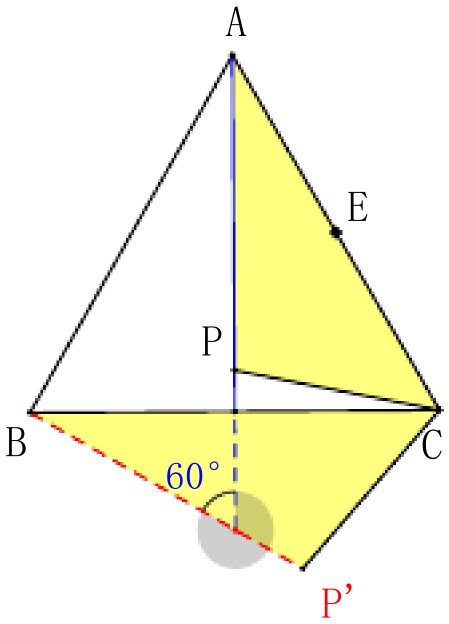


第四层：分析∠CAP 和∠CBP’



答：由全等可知∠CAP ＝∠CBP’，因为 B 为定点，所以得到 P’轨迹为直线 BP’

第五层：点 P 和点 P’轨迹的夹角和旋转角的关系



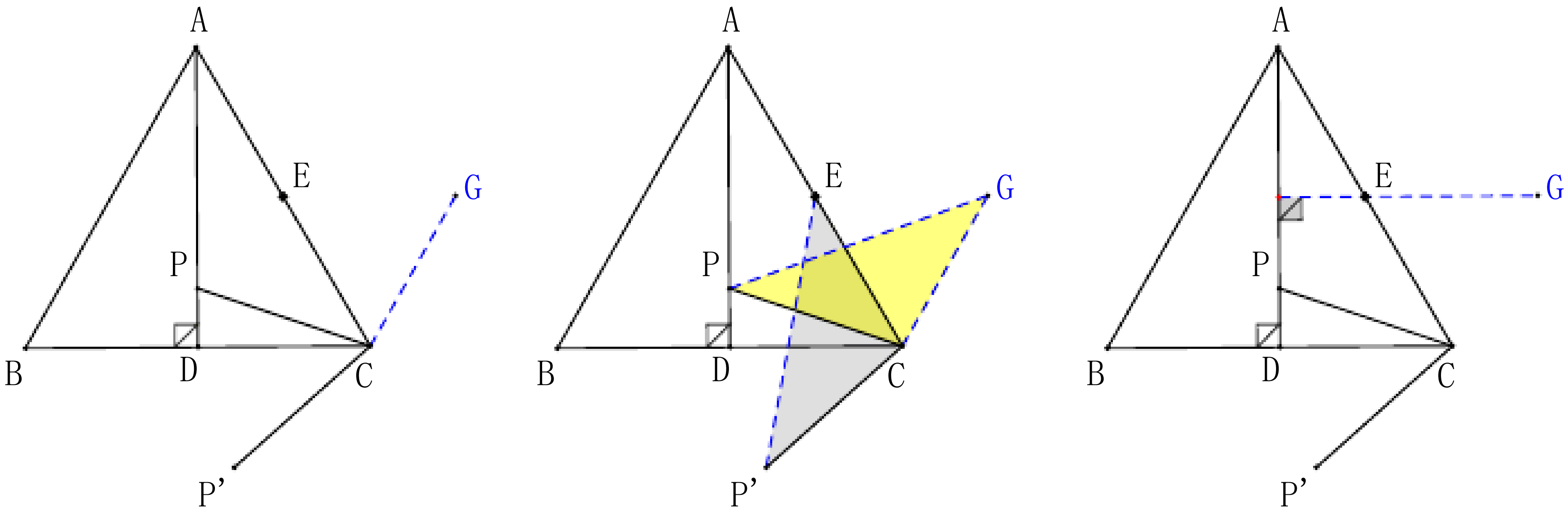
答：不难得出本题主动点与从动点轨迹的夹角等于旋转角，要注意的是如果旋转角是钝角，那么主动点与从动点轨迹的夹角等于旋转角的补角，这个在后面的例题中会出现.

大气层：前面提到，如果是选填题，可以通过找从动点的始末位置快速定位轨迹线段，或者通过构造手拉手，通过全等或相似得出相等角然后得出轨迹，这两种方法都是先找出从动点 P' 的轨迹，再作垂线段并求出垂线段的长得到最小值，那么还有其他方法吗？

答：还可以对关键点进行旋转来构造手拉手模型，从而代换所求线段，构造如下.

将点 EC 绕点 C 顺时针旋转 60°，构造手拉手模型(SAS 全等型)，从而得到 P'E＝PG，最小值即为点 G 到 AD 的距离.

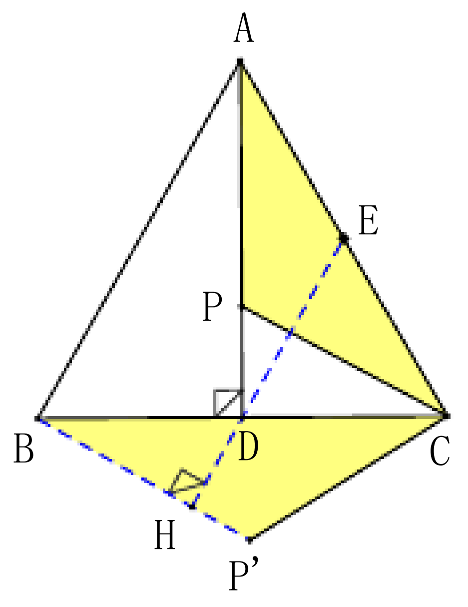
要注意的是因为要代换 P'E，所以 E 点的旋转方式应该是从 P'P，所以是顺时针旋转，求轨迹时的旋转方式则是 P P'，注意区分.



解析

策略一：找从动点轨迹

连接 BP ’，



由旋转可得，CP ＝CP’，∠P’ CP＝60°，

∵△ABC　是等边三角形，

∴AC ＝BC ，∠ACB ＝60°，

∴∠ACB ＝∠PCP’，

∴△ACP ≌△BCP’（SAS ），

∴∠CBP’ ＝∠CAP ，

∵边长为 4 的等边三角形 ABC　中，P 是对称轴 AD　上的一个动点，

∴∠CAP ＝30°，BD ＝2，

∴∠CBP’ ＝30°，

即点 P’的运动轨迹为直线 BP’，

∴当 D P’⊥B P’时，EP’最短，

此时，EP’ ＝$\frac{1}{2}$BD ＋ED＝$\frac{1}{2}\times 2$＋2＝3

∴EP’的最小值是 3