北京市八一学校 2024～2025 学年度第一学期期中试卷

高二数学考试

时长 90 分钟

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 设向量 $\vec{a}=(1,2,-1)$，$\vec{b}=(x,4,2)$，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $x=$（　　）

A. -2　　B. 2　　C. -6　　D. 6

【答案】C

【解析】

【分析】依题意可得 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，根据数量积的坐标表示计算可得.

【详解】因为 $\vec{a}=(1,2,-1)$，$\vec{b}=(x,4,2)$ 且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，

所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=x+2\times4+2\times(-1)=0$，解得 $x=-6$.

故选：C

2. 已知 $\vec{v}$ 为直线 l 的一个方向向量，$\vec{n}$ 为平面 α 的一个法向量，则下列选项中正确的是（　　）

A. $\vec{v}//\vec{n}\Leftrightarrow l//\alpha$　　B. $\vec{v}//\vec{n}\Leftrightarrow l\perp\alpha$　　C. $\vec{v}\perp\vec{n}\Leftrightarrow l//\alpha$　　D. $\vec{v}\perp\vec{n}\Leftrightarrow l\perp\alpha$

【答案】B

【解析】

【分析】利用平面的法向量和直线的方向向量平行和垂直的性质即可判断.

【详解】解：对 A，当 $\vec{v}//\vec{n}$ 时，由平行的传递性得，直线 $l\perp\alpha$，故 A 错误；

对 B，当 $\vec{v}//\vec{n}$ 时，由平行的传递性得，直线 $l\perp\alpha$，故 B 正确；

对 C，当 $\vec{v}\perp\vec{n}$ 时，直线 l 有可能在平面 α 里面，故 C 错误；

对 D，当 $\vec{v}\perp\vec{n}$ 时，直线可能包含于平面 α，也可能平行于平面 α，故 D 错误.

故选：B.

3. 已知 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 不共面，$\vec{e}=3\vec{a}-t\vec{b}-\vec{c}$，$\vec{d}=-2t\vec{a}+6\vec{b}+2\vec{c}$，若 $\vec{e}$ 与 $\vec{d}$ 共线，则实数 t 的值为（　　）

A. -3　　B. 1　　C. 3　　D. -3 或 3

【答案】C

【解析】

【分析】利用空间向量平行充要条件即可求得实数t的值.

【详解】$\vec{e}=3\vec{a}-t\vec{b}-\vec{c}$，$\vec{d}=-2t\vec{a}+6\vec{b}+2\vec{c}$，

若$\vec{e}$与$\vec{d}$共线，则有$\vec{e}=\lambda\vec{d}$，

即$\begin{cases}3=-2t\lambda\\-t=6\lambda\\-1=2\lambda\end{cases}$，解之得$\begin{cases}t=3\\\lambda=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$，则$t$的值为3.

故选：C

4. 已知函数$f\left(x\right)=\sin\left(2x+\varphi\right)\left(0<\varphi<\pi\right)$的图象关于直线$x=\dfrac{\pi}{6}$对称，则$\varphi$的值为（　　）

A. $\dfrac{\pi}{12}$　　B. $\dfrac{\pi}{6}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{2\pi}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】由正弦函数的图象的对称性可得$\dfrac{\pi}{3}+\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\left(k\in Z\right)$，由此可以求出$\varphi$的值.

【详解】由题得：$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\pm1$，故$\dfrac{\pi}{3}+\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\left(k\in Z\right)$，而$0<\varphi<\pi$，所以$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

故选：B.

5. 在空间直角坐标系中，已知长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的顶点$D\left(0,0,0\right)$，$A\left(3,0,0\right)$，$B\left(3,2,0\right)$，$C_1\left(0,2,4\right)$，则直线A_1B_1与平面ABC_1D_1之间的距离为（　　）

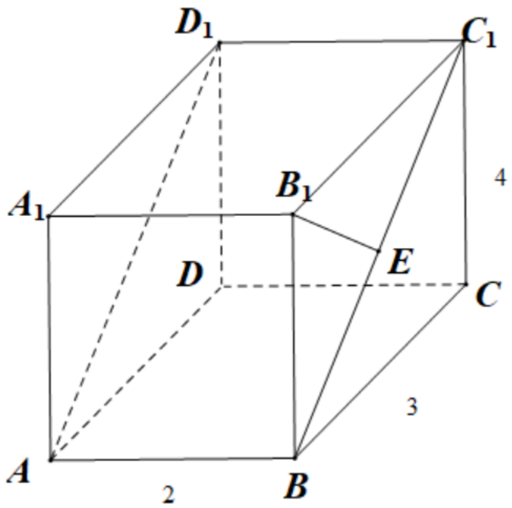
A. $\dfrac{12}{5}$　　B. $\dfrac{4}{3}$　　C. 1　　D. 2

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意可知$\left|AB\right|=2$，$\left|AD\right|=3$，$\left|AA_1\right|=4$，直线A_1B_1与平面ABC_1D_1之间的距离可转化为点B_1到平面ABC_1D_1的距离，结合线面垂直的性质与三角形面积公式，即可求解.

【详解】由$D\left(0,0,0\right)$，$A\left(3,0,0\right)$，$B\left(3,2,0\right)$，$C_1\left(0,2,4\right)$，得$\left|AB\right|=2$，$\left|AD\right|=3$，$\left|AA_1\right|=4$且$\left|BC_1\right|=5$.如图所示，连接BC_1，过点B_1作$B_1E\perp BC_1$，垂足E在BC_1上.



由长方体的性质易得 $AB\perp B_1E$，又因 $B_1E\perp BC_1$ 且 $AB\cap BC_1=B$，所以 $B_1E\perp$ 平面 ABC_1D_1，因此直线 A_1B_1 与平面 ABC_1D_1 之间的距离为线段 $|B_1E|$ 的长.

因 $S_{\triangle BB_1C_1}=\dfrac{|BB_1|\cdot|B_1C_1|}{2}=\dfrac{|BC_1|\cdot|B_1E|}{2}$，所以 $|B_1E|=\dfrac{|BB_1|\cdot|B_1C_1|}{|BC_1|}=\dfrac{4\times 3}{5}=\dfrac{12}{5}$，

因此直线 A_1B_1 与平面 ABC_1D_1 之间的距离为 $\dfrac{12}{5}$.

故选：A.

6. 已知平面 α，β，直线 $l\subset\alpha$，直线 $m\subset\beta$，$l//\beta$，则“$l//m$”是“$m//\alpha$”的（　　）

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】D

【解析】

【分析】根据充分条件、必要条件的定义判断即可.

【详解】平面 α，β，直线 $l\subset\alpha$，直线 $m\subset\beta$，$l//\beta$，

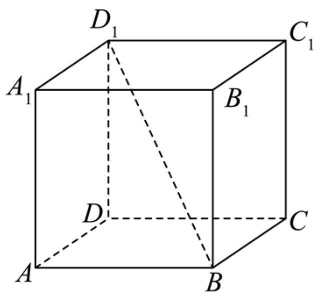
如果 $\alpha\cap\beta=m$，则 $m\subset\alpha$，则 $l//m$ 不能推出 $m//\alpha$；

当 $m//\alpha$ 时，m 与 l 可能平行也可能异面，即 $m//\alpha$ 不能推出 $l//m$，

所以“$l//m$”是“$m//\alpha$”的既不充分也不必要条件.

故选：D.

7. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为对角线 BD_1 的三等分点，P 到各顶点的距离的不同取值有（ ）



A. 3个

B. 4个

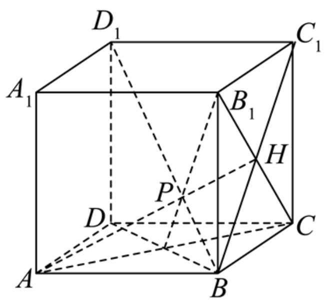
C. 5个

D. 6个

【答案】B

【解析】

【详解】如图,取底面 ABCD 的中心 O,连接 PA,PC,PO.



∵$AC\perp$平面 DD_1B,

又 $PO\subset$平面 DD_1B,

∴$AC\perp PO$.

又 O 是 AC 的中点,

∴$PA=PC$.

同理,取 B_1C 与 BC_1 的交点 H,易证 $B_1C\perp$平面 D_1C_1B,

∴$B_1C\perp PH$.

又 H 是 B_1C 的中点,

∴$PB_1=PC$,

∴$PA=PB_1=PC$.

同理可证 $PA_1=PC_1=PD$.

又 P 是 BD_1 的三等分点,

∴$PB\neq PD_1\neq PB_1\neq PD$,

故点 P 到正方体的顶点的不同距离有 4 个.

8. 已知一个正四棱锥的侧棱与底面所成角的正弦值为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，则该四棱锥侧面与底面所成角的余弦值为

（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】做出图象，设底面边长为$a\left(a>0\right)$，求出侧棱长和高，从而求出斜高，再求出二面角的余弦值.

【详解】如图，正四棱锥$P-ABCD$中，O是底面中心，E是BC中点，$PO\perp$平面$ABCD$，

即PO是棱锥的高，PE是斜高，$\angle PBO$是侧棱PB与底面所成的角，$\angle PEO$是四棱锥侧面与底面所成的角，

设底面边长为$a\left(a>0\right)$，则$OB=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+a^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，

因为正四棱锥的侧棱与底面所成角的正弦值为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，所以$\sin\angle PBO=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

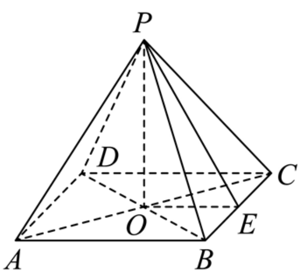
则$\cos\angle PBO=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，即$\cos\angle PBO=\dfrac{OB}{PB}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，所以$PB=\sqrt{5}OB=\dfrac{\sqrt{10}}{2}a$，

所以$PO=\sqrt{PB^2-OB^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}a\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=\sqrt{2}a$，

所以$PE=\sqrt{PB^2-BE^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}a\right)^2-\dfrac{1}{4}a^2}=\dfrac{3}{2}a$，

所以$\cos\angle PEO=\dfrac{OE}{PE}=\dfrac{\dfrac{1}{2}a}{\dfrac{3}{2}a}=\dfrac{1}{3}$，即该四棱锥侧面与底面所成角的余弦值为$\dfrac{1}{3}$.

故选：C.



9. 在空间直角坐标系中，一定点到三个坐标轴的距离都是1，则该点到原点的距离是

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】求出定点到三个坐标平面的距离$|x_1|$，$|y_1|$，$|z_1|$利用空间两点距离公式求解.

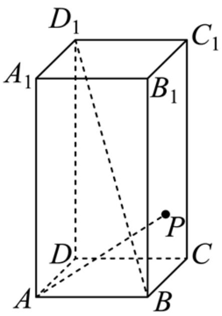
【详解】由题意可知，该点到三个坐标平面的距离都是$\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以该点到原点的距离是$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

【点睛】本题主要考查了空间两点距离公式：$A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，则

$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

10. 如图，在四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，底面$ABCD$为正方形，侧棱$AA_1\perp$底面$ABCD$，$AB=3$，$AA_1=6$，P是侧面BCC_1B_1内的动点，且$AP\perp BD_1$，记AP与平面BCC_1B_1所成的角为θ，则$\tan\theta$的最大值为（　　）.



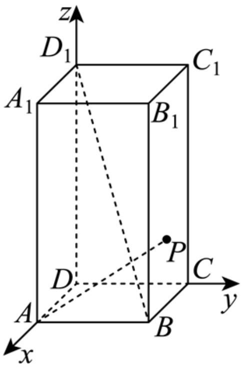
A. $\sqrt{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　C. 2　　D. $\frac{25}{9}$

【答案】A

【解析】

【分析】建立空间直角坐标系，确定各点坐标，根据垂直关系得到$x=2z$，确定平面的法向量为$\vec{n}=(0,1,0)$，再根据向量的夹角公式计算得到答案.

【详解】如图所示：以DA,DC,DD_1为x,y,z轴建立空间直角坐标系，



则 $A(3,0,0)$，$B(3,3,0)$，$C(0,3,0)$，$C_1(0,3,6)$，$B_1(3,3,6)$，$D_1(0,0,6)$，

所以 $\overrightarrow{BD_1}=(-3,-3,6)$，

设 $P(x,3,z)\ (0\le x\le 3, 0\le z\le 6)$，则 $\overrightarrow{AP}=(x-3,3,z)$，

因为 $AP\perp BD_1$，

所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BD_1}=9-3x-9+6z=0$，即 $x=2z$，则 $0\le z\le\frac{3}{2}$，所以 $\overrightarrow{AP}=(2z-3,3,z)$，

平面 BCC_1B_1 的一个法向量为 $\vec{n}=(0,1,0)$，

则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{AP},\vec{n}\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{3}{\sqrt{(2z-3)^2+9+z^2}}=\frac{3}{\sqrt{5\left(z-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{54}{5}}}$，

又 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以当 $z=\frac{6}{5}$ 时，$\sin\theta$ 最大为 $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$，则 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{1}{\sqrt{6}}$，此时 $\tan\theta$ 最大为 $\sqrt{5}$.

故选：A

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 已知 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是空间两向量，若 $|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=2,|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为______.

【答案】$\frac{\pi}{3}$

【解析】

【分析】利用平方的方法化简已知条件，从而求得 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角.

【详解】设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ，

所以根据 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\theta$，

$7=9+4-2\times3\times2\times\cos\theta$，

即 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，

又 $0\le\theta\le\pi$，$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

故答案为：$\dfrac{\pi}{3}$

12. 已知 $A(1,1,1)$，$B(-2,1,-1)$，点 P 在坐标平面 xOy 上，且 A 、B 、P 三点共线，则 P 点的坐标为______.

【答案】$\left(-\dfrac{1}{2},1,0\right)$

【解析】

【分析】根据三点共线列方程，由此来求得 P 点的坐标.

【详解】由于点 P 在坐标平面 xOy 上，故可设 $P(x,y,0)$，

由于 A 、B 、P 三点共线，

所以 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}=(\lambda,\lambda,\lambda)+(2\lambda-2,1-\lambda,\lambda-1)=(3\lambda-2,1,2\lambda-1)$，

所以 $(x,y,0)=(3\lambda-2,1,2\lambda-1)$，

所以 $\begin{cases}x=3\lambda-2\\y=1\\2\lambda-1=0\end{cases}$，解得 $x=-\dfrac{1}{2},y=1,\lambda=\dfrac{1}{2}$.

所以 $P\left(-\dfrac{1}{2},1,0\right)$.

故答案为：$\left(-\dfrac{1}{2},1,0\right)$

13. 在 $\triangle ABC$ 中，$\sin C=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$AC=4$，$\cos B=\dfrac{1}{9}$，则 $AB=$______.

【答案】3

【解析】

【分析】根据同角三角函数的平方关系求出 $\sin B$ 的值，再利用正弦定理求解即可.

【详解】在 $\triangle ABC$ 中，$\cos B=\dfrac{1}{9}$，则 $\sin B=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{9}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$，

根据正弦定理得 $\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}$，即 $AB=\dfrac{AC\cdot\sin C}{\sin B}=\dfrac{4\times\dfrac{\sqrt{5}}{3}}{\dfrac{4\sqrt{5}}{9}}=3$.

故答案为：3.

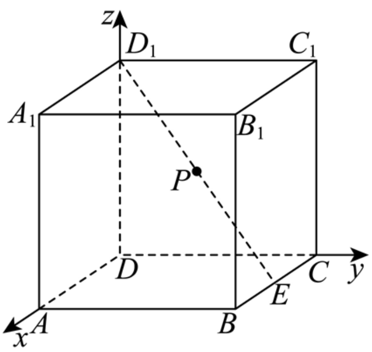
14. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 BC 的中点，点 P 在线段 D_1E 上，则点 P 到直线 AA_1 的距离的最小值为______.

【答案】$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】建立空间直角坐标系，借助空间向量求出点 P 到直线 AA_1 距离的函数关系，再求其最小值作答

【详解】以 D 为原点，DA,DC,DD_1 分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，



则 $E(1,2,0)$，$D_1(0,0,2)$，$A(2,0,0),A_1(2,0,2)$，

所以 $\overrightarrow{ED_1}=(-1,-2,2)$，$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{AE}=(-1,2,0)$，

因点 P 在线段 D_1E 上，则 $\lambda\in[0,1]$，$\overrightarrow{EP}=\lambda\overrightarrow{ED_1}=(-\lambda,-2\lambda,2\lambda)$，

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EP}=(-1-\lambda,2-2\lambda,2\lambda)$，

所以向量 $\overrightarrow{AP}$ 在向量 $\overrightarrow{AA_1}$ 上投影长为 $d=\dfrac{|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AA_1}|}{|\overrightarrow{AA_1}|}=\dfrac{4\lambda}{2}=2\lambda$，

而 $|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{(-1-\lambda)^2+(2-2\lambda)^2+(2\lambda)^2}$，

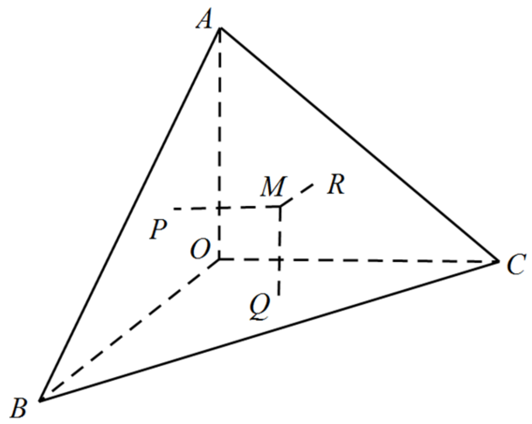
则点 P 到直线 CC_1 的距离 $h=\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2-d^2}=\sqrt{5\lambda^2-6\lambda+5}=\sqrt{5(\lambda-\dfrac{3}{5})^2+\dfrac{16}{5}}\geq\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，

当且仅当 $\lambda=\dfrac{3}{5}$ 时取等号，

所以点 P 到直线 AA_1 的距离的最小值为 $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

故答案为：$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

15. 如图，在三棱锥 $O-ABC$ 中，三条侧棱 OA，OB，OC 两两垂直，且 $OA=OB=OC=2$，M 为 $\triangle ABC$ 内部一动点，过 M 分别作平面 OAB，平面 OBC，平面 OAC 的垂线，垂足分别为 P，Q，R.



①直线 PR 与直线 BC 是异面直线；

②$|MP|+|MQ|+|MR|$ 为定值；

③三棱锥 $M-PQR$ 的外接球表面积的最小值为 $\dfrac{4\pi}{3}$；

④当 $|MP|=|MQ|=\dfrac{2}{3}$ 时，平面 PQR 与平面 OBC 所成的锐二面角为 45°.

则以上结论中所有正确结论的序号是______.

【答案】②③

【解析】

【分析】根据 $V_{A-OBC}=V_{M-OAB}+V_{M-OAC}+V_{M-OBC}$，即可判断②；由题意可知 MR,MP,MQ 两两垂直，由②结合基本不等式求出三棱锥 $M-PQR$ 的外接球半径的最小值，即可判断③；当 $|MP|=|MQ|=\dfrac{2}{3}$ 时，M 为 $\triangle ABC$ 的中心，以 O 为原点建立空间直角坐标系，利用向量法即可判断④；当 M 为 $\triangle ABC$ 的中心时，，利用向量法证明 $PR/\!/BC$，即可判断①.

【详解】解：对于②，设 $|MR|=a,|MP|=b,|MQ|=c$，

由题意 $V_{A-OBC}=V_{M-OAB}+V_{M-OAC}+V_{M-OBC}$，

即 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times2\times2=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times2\times b+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times2\times a+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times2\times c$，

所以 $a+b+c=2$，