

2024 届新疆生产建设兵团二师华山中学高三第二次适应性考试数学试题

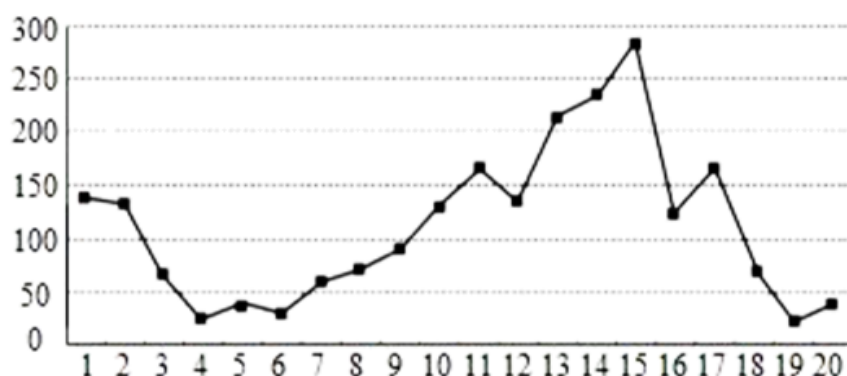
注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 空气质量指数 AQI 是反映空气状况的指数， AQI 指数值趋小，表明空气质量越好，下图是某市 10 月 1 日-20 日

AQI 指数变化趋势，下列叙述错误的是（ ）



A. 这 20 天中 AQI 指数值的中位数略高于 100

B. 这 20 天中的中度污染及以上（ AQI 指数 >150 ）的天数占 $\frac{1}{4}$

C. 该市 10 月的前半个月的空气质量越来越好

D. 总体来说，该市 10 月上旬的空气质量比中旬的空气质量好

2. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)，且 $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ ， $a_4 = 8$ ，则 $a_5 =$ ()

A. $\frac{21}{2}$

B. 9

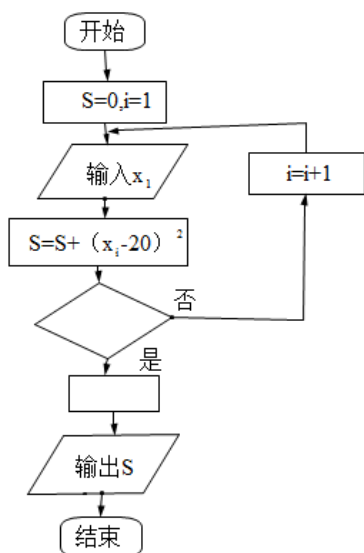
C. $\frac{17}{2}$

D. 7

3. 框图与程序是解决数学问题的重要手段，实际生活中的一些问题在抽象为数学模型之后，可以制作框图，编写程序，

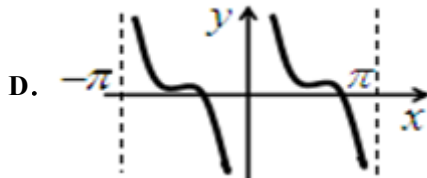
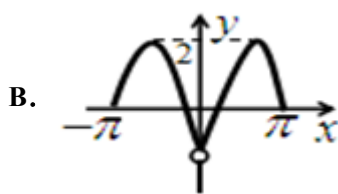
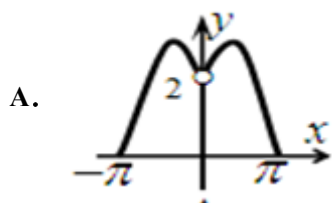
得到解决，例如，为了计算一组数据的方差，设计了如图所示的程序框图，其中输入 $x_1 = 15$ ， $x_2 = 16$ ， $x_3 = 18$ ，

$x_4 = 20$ ， $x_5 = 22$ ， $x_6 = 24$ ， $x_7 = 25$ ，则图中空白框中应填入 ()



- A. $i > 6, S = \frac{S}{7}$ B. $i \leq 6, S = \frac{S}{7}$ C. $i > 6, S = 7S$ D. $i \leq 6, S = 7S$

4. 函数 $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right) \sin x$ ($-\pi \leq x \leq \pi$ 且 $x \neq 0$) 的图象是 ()



5. 我国南北朝时的数学著作《张邱建算经》有一道题为：“今有十等人，每等一人，官赐金以等次差降之，上三人先入，得金四斤，持出，下三人后入得金三斤，持出，中间四人未到者，亦依次更给，问各得金几何？”则在该问题中，等级较高的二等入所得黄金比等级较低的九等人所得黄金 ()

- A. 多 1 斤 B. 少 1 斤 C. 多 $\frac{1}{3}$ 斤 D. 少 $\frac{1}{3}$ 斤

6. 已知向量 $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = (1, \sqrt{3})$, 则与 $2\vec{a} - \vec{b}$ 共线的单位向量为 ()

- A. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ B. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
 C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 或 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 或 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

7. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足 $2S_n = 2^{n+1} + \lambda$ ，则 λ 的值是()

- A. 4 B. 2 C. -2 D. -4

8. 已知 $a = \ln 3, b = \log_3 e, c = \log_\pi e$ ，则下列关系正确的是 ()

- A. $c < b < a$ B. $a < b < c$ C. $b < a < c$ D. $b < c < a$

9. 已知角 α 的顶点为坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边上有一点 $P(-3, 4)$ ，则 $\sin 2\alpha =$ () .

- A. $-\frac{12}{25}$ B. $-\frac{24}{25}$ C. $\frac{16}{5}$ D. $\frac{8}{5}$

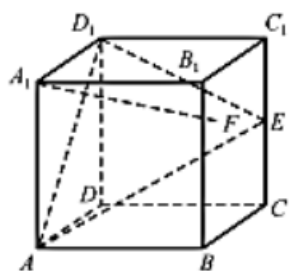
10. 在平面直角坐标系中，若不等式组 $\begin{cases} x - 4y + 4 \leq 0 \\ 2x + y - 10 \leq 0 \\ 5x - 2y + 2 \geq 0 \end{cases}$ 所表示的平面区域内存在点 (x_0, y_0) ，使不等式 $x_0 + my_0 + 1 \leq 0$

成立，则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, -\frac{5}{2}]$ B. $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ C. $[4, +\infty)$ D. $(-\infty, -4]$

11. 在正方体 AC_1 中， E 是棱 CC_1 的中点， F 是侧面 BCC_1B_1 内的动点，且 A_1F 与平面 D_1AE 的垂线垂直，如图所示，

下列说法不正确的是 ()



- A. 点 F 的轨迹是一条线段 B. A_1F 与 BE 是异面直线
C. A_1F 与 D_1E 不可能平行 D. 三棱锥 $F - ABD_1$ 的体积为定值

12. 已知集合 $A = \{y | y = |x| - 1, x \in \mathbb{R}\}$ ， $B = \{x | x \geq 2\}$ ，则下列结论正确的是 ()

- A. $-3 \in A$ B. $3 \notin B$ C. $A \cap B = B$ D. $A \cup B = B$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = \frac{1}{8}a_n^2 + m$ ($n \in \mathbb{N}^*$)，若对任意的正整数 n 均有 $a_n < 4$ ，则实数 m 的最大值是_____.

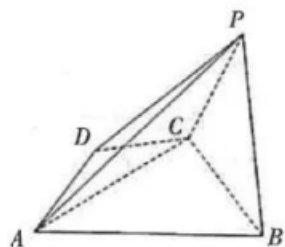
14. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ ，直线 l 与圆 O 交于 P, Q 两点， $A(2, 2)$ ，若 $|AP|^2 + |AQ|^2 = 40$ ，则弦 PQ 的长度的最大值为_____.

15. 数据 1, 3, 5, 7, 9 的标准差为_____.

16. 已知 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角为 30° , $(\vec{a} + 2\vec{b}) \parallel (2\vec{a} + \lambda\vec{b})$, 则 $(\vec{a} + \lambda\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) =$ _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $BC \perp CD$, $AD = CD$, $PA = 3\sqrt{2}$, $\triangle ABC$ 和 $\triangle PBC$ 均为边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形.



(1) 求证：平面 $PBC \perp$ 平面 $ABCD$ ；

(2) 求二面角 $C-PB-D$ 的余弦值.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = ax \ln x + b$ (a, b 为实数) 的图像在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = x - 1$.

(1) 求实数 a, b 的值及函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 设函数 $g(x) = \frac{f(x)+1}{x}$, 证明 $g(x_1) = g(x_2)$ ($x_1 < x_2$) 时, $x_1 + x_2 > 2$.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{ax}{e^x}$ ($a \neq 0$).

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 当 $a = 1$ 时，如果方程 $f(x) = t$ 有两个不等实根 x_1, x_2 , 求实数 t 的取值范围，并证明 $x_1 + x_2 > 2$.

20. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的边长分别为 a, b, c , 且 $c = 2$.

(1) 若 $A = \frac{\pi}{3}$, $b = 3$, 求 $\sin C$ 的值；

(2) 若 $\sin A \cos^2 \frac{B}{2} + \sin B \cos^2 \frac{A}{2} = 3 \sin C$, 且 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{25}{2} \sin C$, 求 a 和 b 的值.

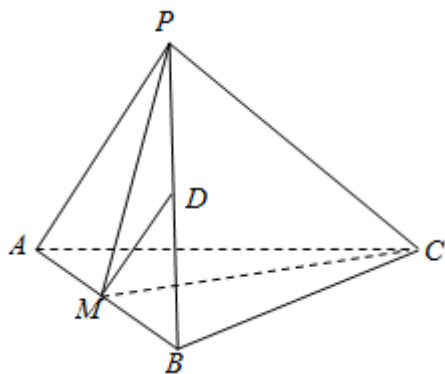
21. (12 分) 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$) 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 后与函数 $g(x) = \cos(2x + \varphi)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 图象重合.

(1) 求 ω 和 φ 的值；

(2) 若函数 $h(x) = f\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + g\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$, 求 $h(x)$ 的单调递增区间及图象的对称轴方程.

22. (10 分) 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $AB \perp PC$, M 是 AB 的中点，点 D 在 PB 上， $MD \parallel$ 平面 PAC , 平面

$PAB \perp$ 平面 PMC ， $\triangle CPM$ 为锐角三角形，求证：



- (1) D 是 PB 的中点；
- (2) 平面 $ABC \perp$ 平面 PMC .

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

结合题意，根据题目中的 20 天的 AQI 指数值，判断选项中的命题是否正确.

【详解】

对于 A ，由图可知 20 天的 AQI 指数值中有 10 个低于 100，10 个高于 100，其中第 10 个接近 100，第 11 个高于 100，所以中位数略高于 100，故 A 正确.

对于 B ，由图可知 20 天的 AQI 指数值中高于 150 的天数为 5，即占总天数的 $\frac{1}{4}$ ，故 B 正确.

对于 C ，由图可知该市 10 月的前 4 天的空气质量越来越好，从第 5 天到第 15 天空气质量越来越差，故 C 错误.

对于 D ，由图可知该市 10 月上旬大部分指数在 100 以下，中旬大部分指数在 100 以上，所以该市 10 月上旬的空气质量比中旬的空气质量好，故 D 正确.

故选：C

【点睛】

本题考查了对折线图数据的分析，读懂题意是解题关键，并能运用所学知识对命题进行判断，本题较为基础.

2、A

【解析】

先由题意可得数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，再根据 $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ ， $a_4 = 8$ ，可求出公差，即可求出 a_5 。

【详解】

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1} (n \in N^*)$ ，则数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，

$$\text{Q } a_1 + a_2 + a_3 = 9, \quad a_4 = 8,$$

$$\therefore 3a_1 + 3d = 9, \quad a_1 + 3d = 8,$$

$$\therefore d = \frac{5}{2},$$

$$\therefore a_5 = a_4 + d = 8 + \frac{5}{2} = \frac{21}{2},$$

故选：A。

【点睛】

本题主要考查了等差数列的性质和通项公式的求法，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平，属于基础题。

3、A

【解析】

依题意问题是 $S = \frac{1}{7}[(x_1 - 20)^2 + (x_2 - 20)^2 + \dots + (x_7 - 20)^2]$ ，然后按直到型验证即可。

【详解】

根据题意为了计算 7 个数的方差，即输出的 $S = \frac{1}{7}[(x_1 - 20)^2 + (x_2 - 20)^2 + \dots + (x_7 - 20)^2]$ ，

观察程序框图可知，应填入 $i > 6$ ， $S = \frac{S}{7}$ ，

故选：A。

【点睛】

本题考查算法与程序框图，考查推理论证能力以及转化与化归思想，属于基础题。

4、B

【解析】

先判断函数的奇偶性，再取特殊值，利用零点存在性定理判断函数零点分布情况，即可得解。

【详解】

由题可知 $f(x)$ 定义域为 $[-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ ，

$$f(-x) = \left(-x - \frac{1}{-x}\right) \sin(-x) = \left(x - \frac{1}{x}\right) \sin x = f(x),$$

$\therefore f(x)$ 是偶函数，关于 y 轴对称，

$\therefore$ 排除 C, D.

$$\text{又 } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{6}{\pi}\right) \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\pi^2 - 36}{12\pi} < 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\right) \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} > 0,$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 必有零点，排除 A.

故选：B.

【点睛】

本题考查了函数图象的判断，考查了函数的性质，属于中档题.

5、C

【解析】

设这十等人所得黄金的重量从大到小依次组成等差数列 $\{a_n\}$ ，则 $a_1 + a_2 + a_3 = 4$ ， $a_8 + a_9 + a_{10} = 3$ ，由等差数列的性质

$$\text{质得 } a_2 = \frac{4}{3}, a_9 = 1, \therefore a_2 - a_9 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3},$$

故选 C

6、D

【解析】

根据题意得， $2\vec{a} - \vec{b} = (1, -\sqrt{3})$ 设与 $2\vec{a} - \vec{b}$ 共线的单位向量为 (x, y) ，利用向量共线和单位向量模为 1，列式求出 x, y 即可得出答案.

【详解】

因为 $\vec{a} = (1, 0)$ ， $\vec{b} = (1, \sqrt{3})$ ，则 $2\vec{a} = (2, 0)$ ，

所以 $2\vec{a} - \vec{b} = (1, -\sqrt{3})$ ，

设与 $2\vec{a} - \vec{b}$ 共线的单位向量为 (x, y) ，

$$\text{则 } \begin{cases} -\sqrt{3}x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

所以与 $2\vec{a}-\vec{b}$ 共线的单位向量为 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 或 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

故选: D.

【点睛】

本题考查向量的坐标运算以及共线定理和单位向量的定义.

7、C

【解析】

利用 S_n 先求出 a_n , 然后计算出结果.

【详解】

根据题意, 当 $n=1$ 时, $2S_1=2a_1=4+\lambda, \therefore a_1=\frac{4+\lambda}{2}$,

故当 $n \geq 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n-1}$,

Q 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列,

则 $a_1=1$, 故 $\frac{4+\lambda}{2}=1$,

解得 $\lambda=-2$,

故选 C.

【点睛】

本题主要考查了等比数列前 n 项和 S_n 的表达形式, 只要求出数列中的项即可得到结果, 较为基础.

8、A

【解析】

首先判断 a, b, c 和 1 的大小关系, 再由换底公式和对数函数 $y=\ln x$ 的单调性判断 b, c 的大小即可.

【详解】

因为 $a=\ln 3 > \ln e > 1$, $b=\log_3 e = \frac{1}{\ln 3}$, $c=\log_\pi e = \frac{1}{\ln \pi}$, $1 < \ln 3 < \ln \pi$, 所以 $c < b < 1$, 综上可得 $c < b < a$.

故选: A

【点睛】

本题考查了换底公式和对数函数的单调性, 考查了推理能力与计算能力, 属于基础题.

9、B

【解析】

根据角终边上的点坐标, 求得 $\sin \alpha, \cos \alpha$, 代入二倍角公式即可求得 $\sin 2\alpha$ 的值.

【详解】

因为终边上有一点 $P(-3,4)$ ，所以 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$,

$$\therefore \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{4}{5} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

故选：B

【点睛】

此题考查二倍角公式，熟练记忆公式即可解决，属于简单题目.

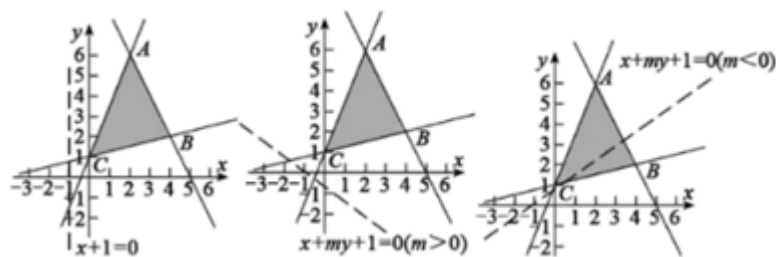
10、B

【解析】

依据线性约束条件画出可行域，目标函数 $x_0 + my_0 + 1 \leq 0$ 恒过 $D(-1,0)$ ，再分别讨论 m 的正负进一步确定目标函数与可行域的基本关系，即可求解

【详解】

作出 inequality 对应的平面区域，如图所示：



其中 $A(2,6)$ ，直线 $x + my + 1 = 0$ 过定点 $D(-1,0)$ ，

当 $m = 0$ 时，不等式 $x + 1 \leq 0$ 表示直线 $x + 1 = 0$ 及其左边的区域，不满足题意；

当 $m > 0$ 时，直线 $x + my + 1 = 0$ 的斜率 $-\frac{1}{m} < 0$ ，

不等式 $x + my + 1 \leq 0$ 表示直线 $x + my + 1 = 0$ 下方的区域，不满足题意；

当 $m < 0$ 时，直线 $x + my + 1 = 0$ 的斜率 $-\frac{1}{m} > 0$ ，

不等式 $x + my + 1 \leq 0$ 表示直线 $x + my + 1 = 0$ 上方的区域，

要使不等式组所表示的平面区域内存在点 (x_0, y_0) ，

使不等式 $x_0 + my_0 + 1 \leq 0$ 成立，只需直线 $x + my + 1 = 0$ 的斜率 $-\frac{1}{m} \leq k_{AD} = 2$ ，解得 $m \leq -\frac{1}{2}$ 。

综上可得实数 m 的取值范围为 $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/475003113112011304>