

2024 届云南省大理州高考数学试题一轮复习模拟试题

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知定义在 R 上的偶函数 $f(x)$, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x - \frac{x^2 + 2x}{2}$, 设 $a = f(\ln \sqrt{2})$, $b = f(\sqrt{2})$, $c = f(\ln \frac{\sqrt{2}}{2})$,

则 ()

- A. $b > a > c$ B. $b > a = c$ C. $a = c > b$ D. $c > a > b$

2. 在满足 $0 < x_i < y_i \leq 4$, $x_i^{y_i} = y_i^{x_i}$ 的实数对 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, n, \dots$) 中, 使得 $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} < 3x_n$ 成立的正整数 n 的最大值为 ()

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 9

3. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ ($a > 0$) 的一条渐近线与圆 $x^2 + (y - 2)^2 = 2$ 至多有一个交点, 则双曲线的离心率的取值范围

是 ()

- A. $[\sqrt{2}, +\infty)$ B. $[2, +\infty)$ C. $(1, \sqrt{2}]$ D. $(1, 2]$

4. 设 i 为虚数单位, z 为复数, 若 $\frac{|z|}{z} + i$ 为实数 m , 则 $m =$ ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

5. 已知复数 $z_1 = \cos 23^\circ + i \sin 23^\circ$ 和复数 $z_2 = \cos 37^\circ + i \sin 37^\circ$, 则 $z_1 \cdot z_2$ 为

- A. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ C. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

6. 已知点 P 不在直线 l 、 m 上, 则“过点 P 可以作无数个平面, 使得直线 l 、 m 都与这些平面平行”是“直线 l 、 m 互相平行”的 ()

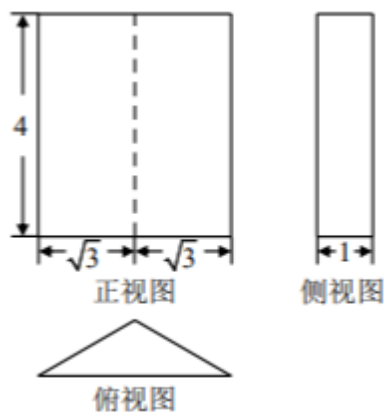
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$), 点 $P(x_0, y_0)$ 是直线 $bx - ay + 4a = 0$ 上任意一点, 若圆

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 1$ 与双曲线 C 的右支没有公共点, 则双曲线的离心率取值范围是 ().

- A. $(1, 2]$ B. $(1, 4]$ C. $[2, +\infty)$ D. $[4, +\infty)$

8. 已知某几何体的三视图如图所示，则该几何体外接球的表面积为（ ）



- A. 24π B. 28π C. 32π D. 36π

9. 已知 EF 为圆 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$ 的一条直径，点 $M(x, y)$ 的坐标满足不等式组 $\begin{cases} x-y+1 \leq 0, \\ 2x+y+3 \geq 0, \\ y \leq 1. \end{cases}$ 则 $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF}$ 的

取值范围为（ ）

- A. $\left[\frac{9}{2}, 13\right]$ B. $[4, 13]$
C. $[4, 12]$ D. $\left[\frac{7}{2}, 12\right]$

10. 已知 R 为实数集， $A = \{x | x^2 - 1 \leq 0\}$ ， $B = \left\{x | \frac{1}{x} \geq 1\right\}$ ，则 $A \cap (\complement_R B) =$ （ ）

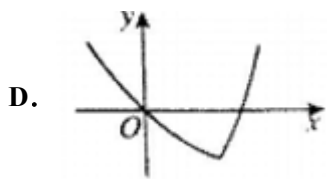
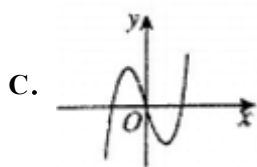
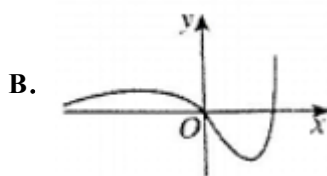
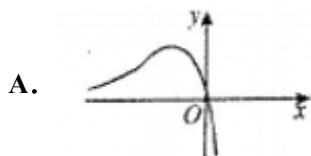
- A. $\{x | -1 < x \leq 0\}$ B. $\{x | 0 < x \leq 1\}$ C. $\{x | -1 \leq x \leq 0\}$ D. $\{x | -1 \leq x \leq 0 \text{ 或 } x = 1\}$

11. 已知函数 $f(x) = m^x - m$ ($m > 0$ ，且 $m \neq 1$) 的图象经过第一、二、四象限，则 $a = |f(\sqrt{2})|$ ， $b = \left|f\left(4^{\frac{3}{8}}\right)\right|$ ，

$c = |f(0)|$ 的大小关系为()

- A. $c < b < a$ B. $c < a < b$
C. $a < b < c$ D. $b < a < c$

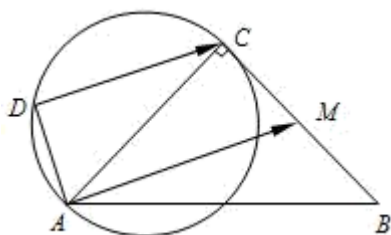
12. 当 $a > 0$ 时，函数 $f(x) = (x^2 - ax)e^x$ 的图象大致是（ ）



二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知直角坐标系中起点为坐标原点的向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ，且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$ ， $\vec{c} = (m, 1-m)$ ， $\vec{d} = (n, 1-n)$ ，存在 $\vec{a}, \vec{b}$ ，对于任意的实数 m, n ，不等式 $|\vec{a} - \vec{c}| + |\vec{b} - \vec{d}| \geq T$ ，则实数 T 的取值范围是_____。

14. 如图,已知 $AC = BC = 4$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， M 为 BC 的中点， D 为以 AC 为直径的圆上一动点，则 $\vec{AM} \cdot \vec{DC}$ 的最小值是_____。



15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足 $a_1 + 3a_2 + \dots + 3^{n-1}a_n = n$ ，则 $S_4 =$ _____

16. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_1 = 2$ ， $S_n = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)a_{n+1}$ ， $b_n = \log_2 a_n$ ，则数列 $\left\{\frac{1}{b_n b_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 $T_n =$ _____。

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知圆 $O_1: (x+1)^2 + y^2 = 8$ 上有一动点 Q ，点 O_2 的坐标为 $(1, 0)$ ，四边形 QO_1O_2R 为平行四边形，线段 O_1R 的垂直平分线交 O_2R 于点 P 。

(I) 求点 P 的轨迹 C 的方程；

(II) 过点 O_2 作直线与曲线 C 交于 A, B 两点，点 K 的坐标为 $(2, 1)$ ，直线 KA, KB 与 y 轴分别交于 M, N 两点，求证：线段 MN 的中点为定点，并求出 $\triangle KMN$ 面积的最大值。

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln(ax) - a$ ($a > 0$)。

(1) 若函数 $h(x) = e^x f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，求实数 a 的值；

(2) 定义：若直线 $l: y = kx + b$ 与曲线 $C_1: f_1(x, y) = 0$ 、 $C_2: f_2(x, y) = 0$ 都相切，我们称直线 l 为曲线 C_1 、 C_2

的公切线, 证明: 曲线 $f(x) = \ln(ax) - a, (a > 0)$ 与 $g(x) = ae^x, (a > 0)$ 总存在公切线.

19. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 设 $m \geq 1$, 过点 $(m, 0)$ 的直线 l 与圆 $P: x^2 + y^2 = 1$ 相切, 且与抛物线 $Q: y^2 = 2x$ 相交于 A, B 两点.

(1) 当 m 在区间 $[1, +\infty)$ 上变动时, 求 AB 中点的轨迹;

(2) 设抛物线焦点为 F , 求 $\triangle ABF$ 的周长(用 m 表示), 并写出 $m = 2$ 时该周长的具体取值.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = (x+2)\ln(x+1) - ax (a \in \mathbb{R})$

(I) 若 $a = 1$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 若 $f(x) \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(III) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 + 3n - 1$, $b_n = \frac{4}{a_n}$, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n < \ln(n+1)(n+2)$.

21. (12 分) 已知 $x > 0, y > 0, z > 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 证明:

(1) $(x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+z)^2 \geq 4$;

(2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 1 + 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{yz}$.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = \ln x + 2ax (a \in \mathbb{R})$, $g(x) = x^2 + 1 - 2f(x)$.

(1) 当 $a = -1$ 时,

①求函数 $f(x)$ 在点 $A(1, f(1))$ 处的切线方程;

②比较 $f(m)$ 与 $f(\frac{1}{m})$ 的大小;

(2) 当 $a > 0$ 时, 若对 $\forall x \in (1, +\infty)$ 时, $g(x) > 0$, 且 $g(x)$ 有唯一零点, 证明: $a < \frac{3}{4}$.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、B

【解析】

根据偶函数性质，可判断 a, c 关系；由 $x \geq 0$ 时， $f(x) = e^x - \frac{x^2 + 2x}{2}$ ，求得导函数，并构造函数 $g(x) = e^x - x - 1$ ，

由 $g'(x)$ 进而判断函数 $f(x)$ 在 $x \geq 0$ 时的单调性，即可比较大小。

【详解】

$f(x)$ 为定义在 R 上的偶函数，

$$\text{所以 } c = f\left(\ln \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\ln \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f(\ln \sqrt{2})$$

所以 $a = c$ ；

$$\text{当 } x \geq 0 \text{ 时， } f(x) = e^x - \frac{x^2 + 2x}{2},$$

$$\text{则 } f'(x) = e^x - x - 1,$$

$$\text{令 } g(x) = e^x - x - 1$$

$$\text{则 } g'(x) = e^x - 1, \text{ 当 } x \geq 0 \text{ 时， } g'(x) = e^x - 1 \geq 0,$$

$$\text{则 } g(x) = e^x - x - 1 \text{ 在 } x \geq 0 \text{ 时单调递增，}$$

$$\text{因为 } g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0, \text{ 所以 } g(x) = e^x - x - 1 \geq 0,$$

$$\text{即 } f'(x) = e^x - x - 1 \geq 0,$$

$$\text{则 } f(x) = e^x - \frac{x^2 + 2x}{2} \text{ 在 } x \geq 0 \text{ 时单调递增，}$$

$$\text{而 } 0 < \ln \sqrt{2} < \sqrt{2}, \text{ 所以}$$

$$f(\ln \sqrt{2}) < f(\sqrt{2}),$$

$$\text{综上所述， } f\left(\ln \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f(\ln \sqrt{2}) < f(\sqrt{2})$$

$$\text{即 } a = c < b,$$

故选：B.

【点睛】

本题考查了偶函数的性质应用，由导函数性质判断函数单调性的应用，根据单调性比较大小，属于中档题。

【解析】

由题可知 $0 < x_i < y_i \leq 4$ ，且 $x_i^{y_i} = y_i^{x_i}$ 可得 $\frac{\ln x_i}{x_i} = \frac{\ln y_i}{y_i}$ ，构造函数 $h(t) = \frac{\ln t}{t} (0 < t \leq 4)$ 求导，通过导函数求出 $h(t)$

的单调性，结合图像得出 $t_{\min} = 2$ ，即 $2 \leq x_i < e$ 得出 $3x_n < 3e$ ，

从而得出 n 的最大值.

【详解】

因为 $0 < x_i < y_i \leq 4$ ， $x_i^{y_i} = y_i^{x_i}$

则 $\ln x_i^{y_i} = \ln y_i^{x_i}$ ，即 $y_i \ln x_i = x_i \ln y_i$

整理得 $\frac{\ln x_i}{x_i} = \frac{\ln y_i}{y_i}$ ，令 $t = x_i = y_i$ ，

设 $h(t) = \frac{\ln t}{t} (0 < t \leq 4)$ ，

则 $h'(t) = \frac{\frac{1}{t} \cdot t - 1 \cdot \ln t}{t^2} = \frac{1 - \ln t}{t^2}$ ，

令 $h'(t) > 0$ ，则 $0 < t < e$ ，令 $h'(t) < 0$ ，则 $e < t \leq 4$ ，

故 $h(t)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增，在 $(e, 4)$ 上单调递减，则 $h(e) = \frac{1}{e}$ ，

因为 $x_i < y_i$ ， $h(x_i) = h(y_i)$ ，

由题可知： $h(t) = \frac{1}{4} \ln 4$ 时，则 $t_{\min} = 2$ ，所以 $2 \leq t < e$ ，

所以 $2 \leq x_i < e < y_i \leq 4$ ，

当 x_n 无限接近 e 时，满足条件，所以 $2 \leq x_n < e$ ，

所以要使得 $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} < 3x_n < 3e \approx 8.154$

故当 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$ 时，可有 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 < 8.154$ ，

故 $n-1 \leq 4$ ，即 $n \leq 5$ ，

所以： n 最大值为 5.

故选：A.

【点睛】

本题主要考查利用导数求函数单调性、极值和最值，以及运用构造函数法和放缩法，同时考查转化思想和解题能力.

【解析】

求得双曲线的渐近线方程，可得圆心 $(0, 2)$ 到渐近线的距离 $d \geq \sqrt{2}$ ，由点到直线的距离公式可得 a 的范围，再由离心率公式计算即可得到所求范围。

【详解】

双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的一条渐近线为 $y = \frac{1}{a}x$ ，即 $x - ay = 0$ ，

由题意知，直线 $x - ay = 0$ 与圆 $x^2 + (y - 2)^2 = 2$ 相切或相离，则 $d = \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} \geq \sqrt{2}$ ，

解得 $a \geq 1$ ，因此，双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{a}\right)^2} \in (1, \sqrt{2}]$ 。

故选：C。

【点睛】

本题考查双曲线的离心率的范围，注意运用圆心到渐近线的距离不小于半径，考查化简整理的运算能力，属于中档题。

4、B

【解析】

可设 $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ ，将 $\frac{|z|}{z} + i$ 化简，得到 $\frac{a + (\sqrt{a^2 + b^2} - b)i}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ，由复数为实数，可得 $\sqrt{a^2 + b^2} - b = 0$ ，解方程即可求解

【详解】

设 $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ ，则 $\frac{|z|}{z} + i = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a + bi} + i = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}(a - bi)}{a^2 + b^2} + i = \frac{a + (\sqrt{a^2 + b^2} - b)i}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 。

由题意有 $\sqrt{a^2 + b^2} - b = 0 \Rightarrow a = 0$ ，所以 $m = 0$ 。

故选：B

【点睛】

本题考查复数的模长、除法运算，由复数的类型求解对应参数，属于基础题

5、C

【解析】

利用复数的三角形式的乘法运算法则即可得出。

【详解】

$$z_1 z_2 = (\cos 23^\circ + i \sin 23^\circ) \cdot (\cos 37^\circ + i \sin 37^\circ) = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

故答案为 C.

【点睛】

熟练掌握复数的三角形式的乘法运算法则是解题的关键，复数问题高考必考，常见考点有：点坐标和复数的对应关系，点的象限和复数的对应关系，复数的加减乘除运算，复数的模长的计算.

6、C

【解析】

根据直线和平面平行的性质，结合充分条件和必要条件的定义进行判断即可.

【详解】

Q 点 P 不在直线 l 、 m 上，

$\therefore$ 若直线 l 、 m 互相平行，则过点 P 可以作无数个平面，使得直线 l 、 m 都与这些平面平行，即必要性成立，

若过点 P 可以作无数个平面，使得直线 l 、 m 都与这些平面平行，则直线 l 、 m 互相平行成立，反证法证明如下：

若直线 l 、 m 互相不平行，则 l 、 m 异面或相交，则过点 P 只能作一个平面同时和两条直线平行，则与条件矛盾，即充分性成立

则“过点 P 可以作无数个平面，使得直线 l 、 m 都与这些平面平行”是“直线 l 、 m 互相平行”的充要条件，

故选：C.

【点睛】

本题主要考查充分条件和必要条件的判断，结合空间直线和平面平行的性质是解决本题的关键.

7、B

【解析】

先求出双曲线的渐近线方程，可得则直线 $bx - ay + 2a = 0$ 与直线 $bx - ay = 0$ 的距离 d ，根据圆

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 1$ 与双曲线 C 的右支没有公共点，可得 $d \geq 1$ ，解得即可.

【详解】

由题意，双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线方程为 $y = \frac{b}{a}x$ ，即 $bx - ay = 0$ ，

$\because P(x_0, y_0)$ 是直线 $bx - ay + 4a = 0$ 上任意一点，

则直线 $bx - ay + 4a = 0$ 与直线 $bx - ay = 0$ 的距离 $d = \frac{4a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{4a}{c}$ ，

$\because$ 圆 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 1$ 与双曲线 C 的右支没有公共点，则 $d \geq 1$ ，

$$\therefore \frac{4a}{c} \geq 1, \text{ 即 } e = \frac{c}{a} \leq 4, \text{ 又 } e > 1$$

故 e 的取值范围为 $(1, 4]$,

故选: B.

【点睛】

本题主要考查了直线和双曲线的位置关系, 以及两平行线间的距离公式, 其中解答中根据圆与双曲线 C 的右支没有公共点得出 $d \geq 1$ 是解答的关键, 着重考查了推理与运算能力, 属于基础题.

8、C

【解析】

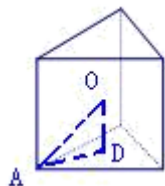
由三视图可知, 几何体是一个三棱柱, 三棱柱的底面是底边为 $2\sqrt{3}$, 高为 1 的等腰三角形, 侧棱长为 4, 利用正弦定理求出底面三角形外接圆的半径, 根据三棱柱的两底面中心连线的中点就是三棱柱的外接球的球心, 求出球的半径, 即可求解球的表面积.

【详解】

由三视图可知,

几何体是一个三棱柱, 三棱柱的底面是底边为 $2\sqrt{3}$, 高为 1 的等腰三角形,

侧棱长为 4, 如图:



由底面边长可知, 底面三角形的顶角为 120° ,

由正弦定理可得 $2AD = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = 4$, 解得 $AD = 2$,

三棱柱的两底面中心连线的中点就是三棱柱的外接球的球心,

所以 $|OA| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$,

该几何体外接球的表面积为: $S = 4\pi \cdot (2\sqrt{2})^2 = 32\pi$.

故选: C

【点睛】

本题考查了多面体的内切球与外接球问题, 由三视图求几何体的表面积, 考查了学生的空间想象能力, 属于基础题.

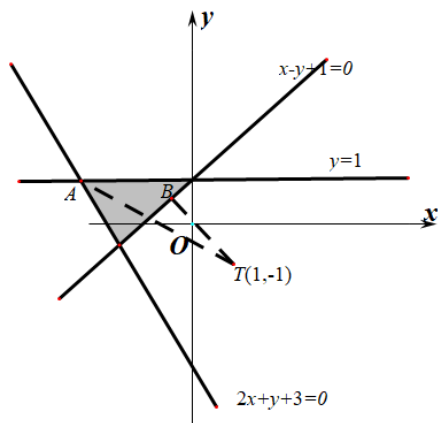
9、D

【解析】

首先将 $\vec{ME} \cdot \vec{MF}$ 转化为 $|\vec{MT}|^2 - 1$ ，只需求出 MT 的取值范围即可，而 MT 表示可行域内的点与圆心 $T(1, -1)$ 距离，数形结合即可得到答案.

【详解】

作出可行域如图所示



设圆心为 $T(1, -1)$ ，则 $\vec{ME} \cdot \vec{MF} = (\vec{MT} + \vec{TE}) \cdot (\vec{MT} + \vec{TF}) =$

$$(\vec{MT} + \vec{TE}) \cdot (\vec{MT} - \vec{TE}) = |\vec{MT}|^2 - |\vec{TE}|^2 = |\vec{MT}|^2 - 1,$$

过 T 作直线 $x - y + 1 = 0$ 的垂线，垂足为 B ，显然 $MB \leq MT \leq MA$ ，又易得 $A(-2, 1)$ ，

$$\text{所以 } MA = \sqrt{[1 - (-2)]^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{13}, \quad TB = \frac{|1 - (-1) + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{故 } \vec{ME} \cdot \vec{MF} = |\vec{MT}|^2 - 1 \in \left[\frac{7}{2}, 12\right].$$

故选：D.

【点睛】

本题考查与线性规划相关的取值范围问题，涉及到向量的线性运算、数量积、点到直线的距离等知识，考查学生转化与划归的思想，是一道中档题.

10、C

【解析】

求出集合 A ， B ， $\complement_{\mathbb{R}} B$ ，由此能求出 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B)$.

【详解】

$$\mathbb{Q}, \mathbb{R} \text{ 为实数集, } A = \{x | x^2 - 1 \leq 0\} = \{x | -1 \leq x \leq 1\}, \quad B = \left\{x \mid \frac{1}{x} \leq 1\right\} = \{x | 0 < x \leq 1\},$$

$$\therefore \complement_{\mathbb{R}} B = \{x | x \leq 0 \text{ 或 } x > 1\},$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/475112144112011304>