

湖北省随州市重点中学 2023 年高三下第四次（5 月）月考数学试题

注意事项：

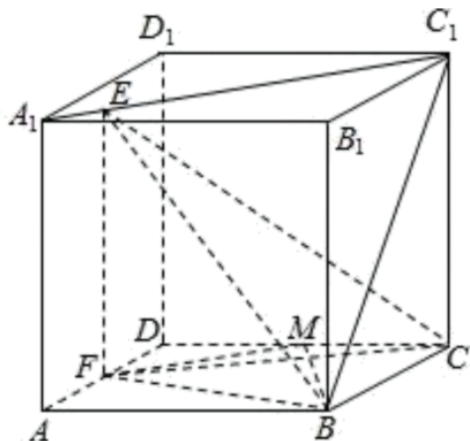
1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 是 $\frac{1+i}{1-i}$ 的共轭复数, 则 $a+b =$ ()

- A. -1 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

2. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，动点 E 在线段 A_1C_1 上， F 、 M 分别是 AD 、 CD 的中点，则下列结论中错误的是 ()



- A. $FM \parallel A_1C_1$, B. 存在点 E ，使得平面 $BEF \parallel$ 平面 CC_1D_1D
- C. $BM \perp$ 平面 CC_1F D. 三棱锥 $B-CEF$ 的体积为定值

3. 已知向量 $\vec{a} = (1, 0)$ ， $\vec{b} = (1, \sqrt{3})$ ，则与 $2\vec{a} - \vec{b}$ 共线的单位向量为()

- A. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ B. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 或 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 或 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

4. 已知 α 为锐角，且 $\sqrt{3} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha$ ，则 $\cos 2\alpha$ 等于 ()

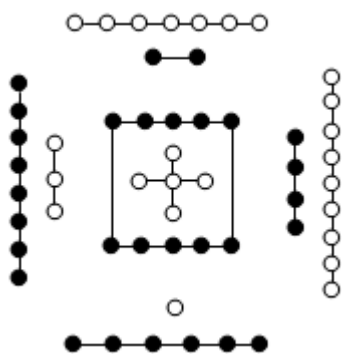
- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{2}{9}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. $-\frac{4}{9}$

5. 20 世纪产生了著名的“ $3x+1$ ”猜想：任给一个正整数 x ，如果 x 是偶数，就将它减半；如果 x 是奇数，则将它乘 3

11. 若复数 $z = \frac{2}{1+i}$ ，其中 i 为虚数单位，则下列结论正确的是（ ）

- A. z 的虚部为 $-i$ B. $|z| = 2$ C. z 的共轭复数为 $-1-i$ D. z^2 为纯虚数

12. 《易·系辞上》有“河出图，洛出书”之说，河图、洛书是中华文化，阴阳术数之源，其中河图的排列结构是一、六在后，二、七在前，三、八在左，四、九在右，五、十背中.如图，白圈为阳数，黑点为阴数.若从这 10 个数中任取 3 个数，则这 3 个数中至少有 2 个阳数且能构成等差数列的概率为（ ）



- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{20}$ C. $\frac{1}{12}$ D. $\frac{3}{40}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)(1-2x)^7 = \frac{1}{x} + a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_7x^7$ ，则 $a_2 =$ _____，

$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_7 =$ _____

14. 甲、乙两人下棋，两人下成和棋的概率是 $\frac{1}{2}$ ，乙获胜的概率是 $\frac{1}{3}$ ，则乙不输的概率是_____.

15. 某同学周末通过抛硬币的方式决定出去看电影还是在家学习，抛一枚硬币两次，若两次都是正面朝上，就在家学习，否则出去看电影，则该同学在家学习的概率为_____.

16. 假如某人有壹元、贰元、伍元、拾元、贰拾元、伍拾元、壹佰元的纸币各两张，要支付贰佰壹拾玖（219）元的货款，则有_____种不同的支付方式.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足 $a_1 = -1, a_n > 0 (n \geq 2), S_n = \frac{a_{n+1}^2 - 9n - 1}{6}, n \in N^*$ ，各项均为正

数的等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = a_2, b_3 = a_4$

(1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $c_n = \frac{1}{2}a_n \cdot b_n$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n

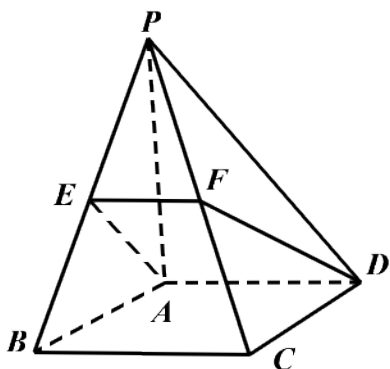
18. (12 分) 选修 4-5：不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x-m| - |x+2m|$ 的最大值为 3，其中 $m > 0$.

(1) 求 m 的值;

(2) 若 $a, b \in R$, $ab > 0$, $a^2 + b^2 = m^2$, 求证: $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} \geq 1$

19. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 为正方形, 点 F 为线段 PC 上的点, 过 A, D, F 三点的平面与 PB 交于点 E . 将① $AB = AP$, ② $BE = PE$, ③ $PB \perp FD$ 中的两个补充到已知条件中, 解答下列问题:



(1) 求平面 $ADFE$ 将四棱锥分成两部分的体积比;

(2) 求直线 PC 与平面 $ADFE$ 所成角的正弦值.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln(x+1) + \frac{a}{2}x^2$.

(1) 当 $a = -1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 设 $m = f(x_2) + \frac{x_1+2}{8} \cdot f'(x_1+1)$, 求 m 的取值范围, 并求 m 取到最小值时所对应的 a 的值.

21. (12 分) 已知直线 $x+y=1$ 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点, 且交椭圆于 A, B 两点, 线段 AB 的中点是

$$M\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

(1) 求椭圆的方程;

(2) 过原点的直线 l 与线段 AB 相交 (不含端点) 且交椭圆于 C, D 两点, 求四边形 $ACBD$ 面积的最大值.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = |x-1| + |x+1| - 2$.

(1) 求不等式 $f(x) \leq 1$ 的解集;

(2) 若关于 x 的不等式 $f(x) \leq a^2 - a - 2$ 在 R 上恒成立, 求实数 a 的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. A

【解析】

先利用复数的除法运算法则求出 $\frac{1+i}{1-i}$ 的值，再利用共轭复数的定义求出 $a+bi$ ，从而确定 a, b 的值，求出 $a+b$ 。

【详解】

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i}{2} = i,$$

$$\therefore a+bi = -i,$$

$$\therefore a=0, b=-1,$$

$$\therefore a+b = -1,$$

故选：A。

【点睛】

本题主要考查了复数代数形式的乘除运算，考查了共轭复数的概念，是基础题。

2. B

【解析】

根据平行的传递性判断 A；根据面面平行的定义判断 B；根据线面垂直的判定定理判断 C；由三棱锥 $B-CEF$ 以三角形 BCF 为底，则高和底面积都为定值，判断 D。

【详解】

在 A 中，因为 F, M 分别是 AD, CD 中点，所以 $FM \parallel AC \parallel A_1C_1$ ，故 A 正确；

在 B 中，由于直线 BF 与平面 CC_1D_1D 有交点，所以不存在点 E ，使得平面 $BEF \parallel$ 平面 CC_1D_1D ，故 B 错误；

在 C 中，由平面几何得 $BM \perp CF$ ，根据线面垂直的性质得出 $BM \perp C_1C$ ，结合线面垂直的判定定理得出 $BM \perp$ 平面 CC_1F ，故 C 正确；

在 D 中，三棱锥 $B-CEF$ 以三角形 BCF 为底，则高和底面积都为定值，即三棱锥 $B-CEF$ 的体积为定值，故 D 正确；

故选：B

【点睛】

本题主要考查了判断面面平行，线面垂直等，属于中档题.

3. D

【解析】

根据题意得， $2\vec{a}-\vec{b}=(1,-\sqrt{3})$ 设与 $2\vec{a}-\vec{b}$ 共线的单位向量为 (x,y) ，利用向量共线和单位向量模为 1，列式求出 x,y 即可得出答案.

【详解】

因为 $\vec{a}=(1,0)$ ， $\vec{b}=(1,\sqrt{3})$ ，则 $2\vec{a}=(2,0)$ ，

所以 $2\vec{a}-\vec{b}=(1,-\sqrt{3})$ ，

设与 $2\vec{a}-\vec{b}$ 共线的单位向量为 (x,y) ，

$$\text{则} \begin{cases} -\sqrt{3}x-y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

所以与 $2\vec{a}-\vec{b}$ 共线的单位向量为 $\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 或 $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

故选：D.

【点睛】

本题考查向量的坐标运算以及共线定理和单位向量的定义.

4. C

【解析】

由 $\sqrt{3}\sin 2\alpha = 2\sin \alpha$ 可得 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，再利用 $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ 计算即可.

【详解】

因为 $2\sqrt{3}\sin \alpha \cos \alpha = 2\sin \alpha$ ， $\sin \alpha \neq 0$ ，所以 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

所以 $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$.

故选：C.

【点睛】

本题考查二倍角公式的应用，考查学生对三角函数式化简求值公式的灵活运用能力，属于基础题.

5. C

【解析】

列出循环的每一步，可得出输出的 n 的值.

【详解】

$n=1$ ，输入 $m=40$ ， $n=1+1=2$ ， $m=1$ 不成立， m 是偶数成立，则 $m=\frac{40}{2}=20$ ；

$n=2+1=3$ ， $m=1$ 不成立， m 是偶数成立，则 $m=\frac{20}{2}=10$ ；

$n=3+1=4$ ， $m=1$ 不成立， m 是偶数成立，则 $m=\frac{10}{2}=5$ ；

$n=4+1=5$ ， $m=1$ 不成立， m 是偶数不成立，则 $m=3\times 5+1=16$ ；

$n=5+1=6$ ， $m=1$ 不成立， m 是偶数成立，则 $m=\frac{16}{2}=8$ ；

$n=6+1=7$ ， $m=1$ 不成立， m 是偶数成立，则 $m=\frac{8}{2}=4$ ；

$n=7+1=8$ ， $m=1$ 不成立， m 是偶数成立，则 $m=\frac{4}{2}=2$ ；

$n=8+1=9$ ， $m=1$ 不成立， m 是偶数成立，则 $m=\frac{2}{2}=1$ ；

$n=9+1=10$ ， $m=1$ 成立，跳出循环，输出 n 的值为 10.

故选：C.

【点睛】

本题考查利用程序框图计算输出结果，考查计算能力，属于基础题.

6. A

【解析】

根据指数型函数所过的定点，确定 $k=1, b=2$ ，再根据条件 $m+n=2$ ，利用基本不等式求 $\frac{4}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值.

【详解】

Q 定点为 $(1, 2)$,

$\therefore k=1, b=2$,

$\therefore m+n=2$

$\therefore \frac{4}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{m} + \frac{1}{n} \right) (m+n) = \frac{1}{2} \left(5 + \frac{m}{n} + \frac{4n}{m} \right) \dots \frac{9}{2}$

当且仅当 $\frac{m}{n} = \frac{4n}{m}$ 时等号成立,

即 $m = \frac{4}{3}, n = \frac{2}{3}$ 时取得最小值 $\frac{9}{2}$.

故选: A

【点睛】

本题考查指数型函数的性质, 以及基本不等式求最值, 意在考查转化与变形, 基本计算能力, 属于基础题型.

7. A

【解析】

分析: 题设中复数满足的等式可以化为 $\bar{z} = \frac{5}{1+2i} + i$, 利用复数的四则运算可以求出 z .

详解: 由题设有 $\bar{z} = \frac{5}{1+2i} + i = 1 - 2i + i = 1 - i$, 故 $z = 1 + i$, 故选 A.

点睛: 本题考查复数的四则运算和复数概念中的共轭复数, 属于基础题.

8. D

【解析】

$1 > a = \log_7 3 > 0$, $b = \log_{\frac{1}{3}} 7 < 0$, $c = 3^{0.7} > 1$ 得解.

【详解】

$1 > a = \log_7 3 > 0$, $b = \log_{\frac{1}{3}} 7 < 0$, $c = 3^{0.7} > 1$, 所以 $b < a < c$, 故选 D

【点睛】

比较不同数的大小, 找中间量作比较是一种常见的方法.

9. B

【解析】

设 $\vec{AP} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$, 则 $\vec{AP} = x\vec{AB} + 2y\vec{AD}$, $\vec{AP} = \frac{3x}{2}\vec{AE} + y\vec{AC}$,

由 B, P, D 三点共线, C, P, E 三点共线, 可知 $x + 2y = 1$, $\frac{3x}{2} + y = 1$, 解得 x, y 即可得出结果.

【详解】

设 $\vec{AP} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$, 则 $\vec{AP} = x\vec{AB} + 2y\vec{AD}$, $\vec{AP} = \frac{3x}{2}\vec{AE} + y\vec{AC}$,

因为 B, P, D 三点共线, C, P, E 三点共线,

所以 $x + 2y = 1$, $\frac{3x}{2} + y = 1$, 所以 $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$.

故选: B.

【点睛】

本题考查了平面向量基本定理和向量共线定理的简单应用,属于基础题.

10. B

【解析】

求出复数 z , 得出其对应点的坐标, 确定所在象限.

【详解】

由题意 $z = \frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, 对应点坐标为 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 在第二象限.

故选: B.

【点睛】

本题考查复数的几何意义, 考查复数的除法运算, 属于基础题.

11. D

【解析】

将复数 z 整理为 $1-i$ 的形式, 分别判断四个选项即可得到结果.

【详解】

$$z = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1-i$$

z 的虚部为 -1 , A 错误; $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, B 错误; $\bar{z} = 1+i$, C 错误;

$z^2 = (1-i)^2 = -2i$, 为纯虚数, D 正确

本题正确选项: D

【点睛】

本题考查复数的模长、实部与虚部、共轭复数、复数的分类的知识, 属于基础题.

12. C

【解析】

先根据组合数计算出所有的情况数, 再根据“3 个数中至少有 2 个阳数且能构成等差数列”列举得到满足条件的情况, 由此可求解出对应的概率.

【详解】

所有的情况数有: $C_{10}^3 = 120$ 种,

3 个数中至少有 2 个阳数且能构成等差数列的情况有:

$(1, 2, 3), (3, 4, 5), (5, 6, 7), (7, 8, 9), (1, 4, 7), (3, 6, 9), (1, 3, 5), (3, 5, 7), (5, 7, 9), (1, 5, 9)$, 共 10 种,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/475310143131011340>