

湖北省孝感市部分重点学校 2023 年高三第二学期质量调研考试数学试题

注意事项:

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 左顶点为 A , 点 P 椭圆上, 且 $PF \perp AF$, 若 $\tan \angle PAF = \frac{1}{2}$, 则

椭圆的离心率 e 为 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

2. 半径为 2 的球 O 内有一个内接正三棱柱, 则正三棱柱的侧面积的最大值为 ()

- A. $9\sqrt{3}$ B. $12\sqrt{3}$ C. $16\sqrt{3}$ D. $18\sqrt{3}$

3. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F ，若双曲线 C 的一条渐近线的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ ，且点 F 到该渐近线的距离为 $\sqrt{3}$ ，则双曲线 C 的实轴的长为

- A.** 1
- B.** 2
- C.** 4
- D.** $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

4. 设集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x | -2x^2 + 5x + 3 > 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A.** $\{0,1,2\}$ **B.** $\{0,1\}$
C. $\{1,2\}$ **D.** $\{-1,0,1\}$

5. 已知抛物线 $x^2 = 4y$ 上一点 A 的纵坐标为 4, 则点 A 到抛物线焦点的距离为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5**

6. 已知曲线 $C: y = \cos(2x + \varphi)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的一条对称轴方程为 $x = \frac{\pi}{3}$, 曲线 C 向左平移 θ ($\theta > 0$) 个单位长度, 得到

曲线 E 的一个对称中心的坐标为 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$, 则 θ 的最小值是 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{12}$

7. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a = \sqrt{3}, b = 1, B = 30^\circ$, 则 A 为()

- A. 60° B. 120° C. 60° 或 150° D. 60° 或 120°

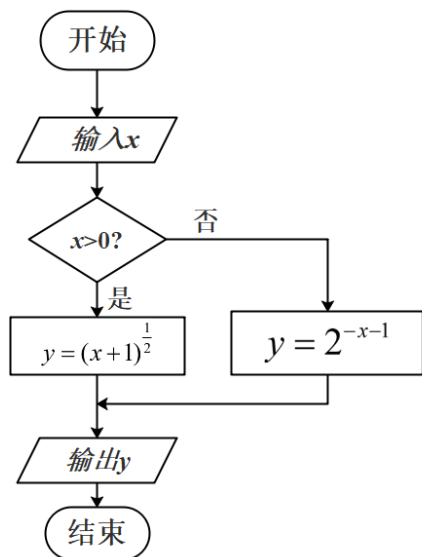
8. 已知 $2^a = 3^b = 6$, 则 a, b 不可能满足的关系是 ()

- A. $a + b = ab$ B. $a + b > 4$ C. $(a-1)^2 + (b-1)^2 < 2$ D. $a^2 + b^2 > 8$

9. 第七届世界军人运动会于 2019 年 10 月 18 日至 27 日在中国武汉举行, 中国队以 133 金 64 银 42 铜位居金牌榜和奖牌榜的首位. 运动会期间有甲、乙等五名志愿者被分配到射击、田径、篮球、游泳四个运动场地提供服务, 要求每个人都要被派出去提供服务, 且每个场地都要有志愿者服务, 则甲和乙恰好在同一组的概率是 ()

- A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{40}$ D. $\frac{9}{40}$

10. 执行如图的程序框图, 若输出的结果 $y = 2$, 则输入的 x 值为()



- A. 3 B. -2
C. 3 或 -3 D. 3 或 -2

11. 已知抛物线 $y^2 = 20x$ 的焦点与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点重合, 且抛物线的准线被双曲线截得的线段长为 $\frac{9}{2}$, 那么该双曲线的离心率为 ()

- A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\sqrt{5}$

12. 已知 x, y 满足不等式
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq t \\ 2x + y \leq 4 \end{cases}$$
, 且目标函数 $z = 9x + 6y$ 最大值的变化范围 $[20, 22]$, 则 t 的取值范围 ()

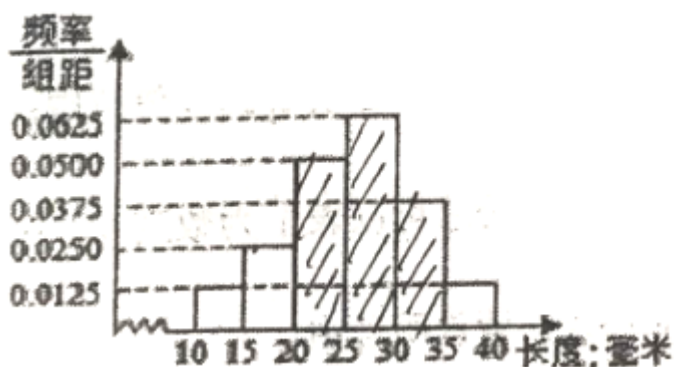
- A. $[2, 4]$ B. $[4, 6]$ C. $[5, 8]$ D. $[6, 7]$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$, 点 P 为抛物线 C 上一动点, 过点 P 作圆 $M: (x-3)^2 + y^2 = 4$ 的切线, 切点分别为 A, B , 则线段 AB 长度的取值范围为_____.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, $a_1 = 1, a_3 = 36$, 则 $a_2 =$ _____.

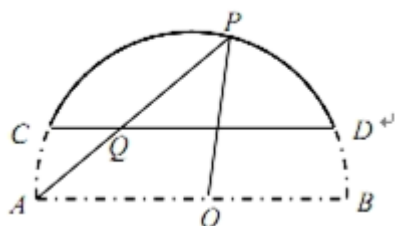
15. 为了了解一批产品的长度 (单位: 毫米) 情况, 现抽取容量为 400 的样本进行检测, 如图是检测结果的频率分布直方图, 根据产品标准, 单件产品长度在区间 $[25, 30)$ 的一等品, 在区间 $[20, 25)$ 和 $[30, 35)$ 的为二等品, 其余均为三等品, 则样本中三等品的件数为_____.



16. 直线 l 是圆 $C_1: (x+1)^2 + y^2 = 1$ 与圆 $C_2: (x+4)^2 + y^2 = 4$ 的公切线, 并且 l 分别与 x 轴正半轴, y 轴正半轴相交于 A, B 两点, 则 $\triangle AOB$ 的面积为_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 某房地产开发商在其开发的某小区前修建了一个弓形景观湖。如图, 该弓形所在的圆是以 AB 为直径的圆, 且 $AB = 300$ 米, 景观湖边界 CD 与 AB 平行且它们间的距离为 $50\sqrt{2}$ 米。开发商计划从 A 点出发建一座景观桥 (假定建成的景观桥的桥面与地面和水面均平行), 桥面在湖面上的部分记作 PQ 。设 $\angle AOP = 2\theta$ 。



- (1) 用 θ 表示线段 PQ , 并确定 $\sin 2\theta$ 的范围;
- (2) 为了使小区居民可以充分地欣赏湖景, 所以要将 PQ 的长度设计到最长, 求 PQ 的最大值.

18. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $2S_n = n - n^2$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \begin{cases} 2^{a_n}, & (n = 2k - 1) \\ \frac{2}{(1 - a_n)(1 - a_{n+2})}, & (n = 2k) \end{cases}$ ($k \in \mathbf{N}^*$), 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n . 若 $T_{2n} = a\left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{2n+2} + b$ 对

$n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 求实数 a, b 的值.

19. (12 分) 已知点 $B(0, -2)$ 和椭圆 $M: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$. 直线 $l: y = kx + 1$ 与椭圆 M 交于不同的两点 P, Q .

- (1) 当 $k = \frac{1}{2}$ 时, 求 $\triangle PBQ$ 的面积;
- (2) 设直线 PB 与椭圆 M 的另一个交点为 C , 当 C 为 PB 中点时, 求 k 的值.

20. (12 分) 新高考, 取消文理科, 实行“3+3”, 成绩由语文、数学、外语统一高考成绩和自主选考的 3 门普通高中学业水平考试等级性考试科目成绩构成. 为了解各年龄层对新高考的了解情况, 随机调查 50 人 (把年龄在 $[15, 45)$ 称为中青年, 年龄在 $[45, 75)$ 称为中老年), 并把调查结果制成下表:

年龄 (岁)	[15, 25)	[25, 35)	[35, 45)	[45, 55)	[55, 65)	[65, 75)
频数	5	15	10	10	5	5
了解	4	12	6	5	2	1

- (1) 分别估计中青年和中老年对新高考了解的概率;
- (2) 请根据上表完成下面 2×2 列联表, 是否有 95% 的把握判断对新高考的了解与年龄 (中青年、中老年) 有关?

	了解新高考	不了解新高考	总计
中青年			
中老年			
总计			

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

(3) 若从年龄在 $[55, 65)$ 的被调查者中随机选取3人进行调查, 记选中的3人中了解新高考的人数为 X , 求 X 的分布列以及 $E(X)$.

21. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}),$$
 曲线 C 的极坐标方程为

$$\rho = 4 \cos \theta.$$

(I) 求直线 l 的普通方程及曲线 C 的直角坐标方程;

(II) 设点 $P(1, 0)$, 直线 l 与曲线 C 相交于 A, B , 求 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|}$ 的值.

22. (10分) 某精密仪器生产车间每天生产 n 个零件, 质检员小张每天都会随机地从中抽取50个零件进行检查是否合格, 若较多零件不合格, 则需对其余所有零件进行检查. 根据多年的生产数据和经验, 这些零件的长度服从正态分布 $N(10, 0.1^2)$ (单位: 微米 μm), 且相互独立. 若零件的长度 d 满足 $9.7\mu m < d < 10.3\mu m$, 则认为该零件是合格的, 否则该零件不合格.

(1) 假设某一天小张抽查出不合格的零件数为 X , 求 $P(X \geq 2)$ 及 X 的数学期望 EX ;

(2) 小张某天恰好从50个零件中检查出2个不合格的零件, 若以此频率作为当天生产零件的不合格率. 已知检查一个零件的成本为10元, 而每个不合格零件流入市场带来的损失为260元. 假设 n 充分大, 为了使损失尽量小, 小张是否需要检查其余所有零件, 试说明理由.

附: 若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$P(\mu - 3\sigma < \xi < \mu + 3\sigma) = 0.9987, 0.9987^{50} = 0.9370, 0.9987^{49} \times 0.0013 = 0.0012.$$

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. C

【解析】

不妨设 P 在第一象限，故 $P\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$ ，根据 $\tan \angle PAF = \frac{1}{2}$ 得到 $1 - e - 2e^2 = 0$ ，解得答案.

【详解】

不妨设 P 在第一象限，故 $P\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$ ， $\tan \angle PAF = \frac{\frac{b^2}{a}}{a+c} = \frac{1}{2}$ ，即 $a^2 - ac - 2c^2 = 0$ ，

即 $1 - e - 2e^2 = 0$ ，解得 $e = \frac{1}{2}$ ， $e = -1$ （舍去）.

故选：C.

【点睛】

本题考查了椭圆的离心率，意在考查学生的计算能力.

2. B

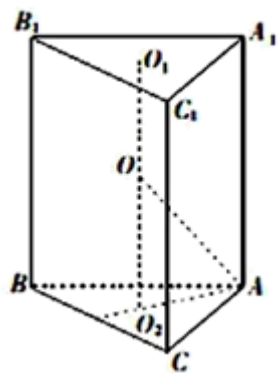
【解析】

设正三棱柱上下底面的中心分别为 O_1, O_2 ，底面边长与高分别为 x, h ，利用 $OA^2 = OO_2^2 + O_2A^2$ ，可得

$h^2 = 16 - \frac{4}{3}x^2$ ，进一步得到侧面积 $S = 3xh$ ，再利用基本不等式求最值即可.

【详解】

如图所示. 设正三棱柱上下底面的中心分别为 O_1, O_2 ，底面边长与高分别为 x, h ，则 $O_2A = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ，



在 $Rt\triangle OAO_2$ 中, $\frac{h^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 4$, 化为 $h^2 = 16 - \frac{4}{3}x^2$,

$$QS = 3xh,$$

$$\therefore S^2 = 9x^2h^2 = 12x^2(12-x^2), 12\left(\frac{x^2+12-x^2}{2}\right)^2 = 432,$$

当且仅当 $x = \sqrt{6}$ 时取等号, 此时 $S = 12\sqrt{3}$.

故选: B.

【点睛】

本题考查正三棱柱与球的切接问题, 涉及到基本不等式求最值, 考查学生的计算能力, 是一道中档题.

3. B

【解析】

双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 由题可知 $\frac{b}{a} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

设点 $F(c, 0)$, 则点 F 到直线 $y = \sqrt{3}x$ 的距离为 $\frac{|\sqrt{3}c|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = \sqrt{3}$, 解得 $c = 2$,

所以 $c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 = 4$, 解得 $a = 1$, 所以双曲线 C 的实轴的长为 $2a = 2$, 故选 B.

4. A

【解析】

解出集合 B , 利用交集的定义可求得集合 $A \cap B$.

【详解】

因为 $B = \{x | -2x^2 + 5x + 3 > 0\} = \{x | 2x^2 - 5x - 3 < 0\} = \left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 3\right\}$, 又 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, 所以 $A \cap B = \{0, 1, 2\}$.

故选: A.

【点睛】

本题考查交集的计算, 同时也考查了一元二次不等式的求解, 考查计算能力, 属于基础题.

5. D

【解析】

试题分析: 抛物线 $x^2 = 4y$ 焦点在 y 轴上, 开口向上, 所以焦点坐标为 $(0, 1)$, 准线方程为 $y = -1$, 因为点 A 的纵坐标为 4 , 所以点 A 到抛物线准线的距离为 $4 + 1 = 5$, 因为抛物线上的点到焦点的距离等于到准线的距离, 所以点 A 与抛物线焦点的距离为 5 .

考点: 本小题主要考查应用抛物线定义和抛物线上点的性质抛物线上的点到焦点的距离, 考查学生的运算求解能力.

点评: 抛物线上的点到焦点的距离等于到准线的距离, 这条性质在解题时经常用到, 可以简化运算.

6. C

【解析】

$y = \cos(2x + \varphi)$ 在对称轴处取得最值有 $\cos(\frac{2\pi}{3} + \varphi) = \pm 1$ ，结合 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ，可得 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ，易得曲线 E 的解析式为

$y = \cos\left(2x + 2\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ ，结合其对称中心为 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 可得 $\theta = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$ 即可得到 θ 的最小值.

【详解】

$\because$ 直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 是曲线 C 的一条对称轴.

$\therefore 2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$.

$\therefore \varphi = \frac{\pi}{3}$.

$\therefore$ 平移后曲线 E 为 $y = \cos\left(2x + 2\theta + \frac{\pi}{3}\right)$.

曲线 E 的一个对称中心为 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$.

$\therefore 2 \times \frac{\pi}{4} + 2\theta + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

$\theta = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$ ，注意到 $\theta > 0$

故 θ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$.

故选：C.

【点睛】

本题考查余弦型函数性质的应用，涉及到函数的平移、函数的对称性，考查学生数形结合、数学运算的能力，是一道中档题.

7. D

【解析】

由正弦定理可求得 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，再由角 A 的范围可求得角 A .

【详解】

由正弦定理可知 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，所以 $\frac{\sqrt{3}}{\sin A} = \frac{1}{\sin 30^\circ}$ ，解得 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，又 $0^\circ < A < 180^\circ$ ，且 $a > b$ ，所以 $A = 60^\circ$ 或

120° 。

故选：D.

【点睛】

本题主要考查正弦定理,注意角的范围,是否有两解的情况,属于基础题.

8. C

【解析】

根据 $2^a = 3^b = 6$ 即可得出 $a = 1 + \log_2 3$, $b = 1 + \log_3 2$, 根据 $\log_2 3 \cdot \log_3 2 = 1$, $\log_3 2 + \log_3 2 > 2$, 即可判断出结果.

【详解】

$$\because 2^a = 3^b = 6;$$

$$\therefore a = \log_2 6 = 1 + \log_2 3, \quad b = \log_3 6 = 1 + \log_3 2;$$

$$\therefore a + b = 2 + \log_2 3 + \log_3 2 > 4, \quad ab = 2 + \log_2 3 + \log_3 2 > 4, \quad \text{故 } A, B \text{ 正确};$$

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 = (\log_2 3)^2 + (\log_3 2)^2 > 2\log_2 3 \cdot \log_3 2 = 2, \quad \text{故 } C \text{ 错误};$$

$$\because a^2 + b^2 = 2 + 2(\log_2 3 + \log_3 2) + (\log_2 3)^2 + (\log_3 2)^2$$

$$> 2 + 4\sqrt{\log_2 3 \cdot \log_3 2} + 2\log_2 3 \cdot \log_3 2 = 8, \quad \text{故 } D \text{ 正确}$$

故 C.

【点睛】

本题主要考查指数式和对数式的互化,对数的运算,以及基本不等式: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 和不等式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 的应用,属于中档题

9. A

【解析】

根据题意,五人分成四组,先求出两人组成一组的所有可能的分组种数,再将甲乙组成一组的情况,即可求出概率.

【详解】

五人分成四组,先选出两人组成一组,剩下的人各自成一组,

所有可能的分组共有 $C_5^2 = 10$ 种,

甲和乙分在同一组,则其余三人各自成一组,只有一种分法,与场地无关,

故甲和乙恰好在同一组的概率是 $\frac{1}{10}$.

故选: A.

【点睛】

本题考查组合的应用和概率的计算，属于基础题.

10. D

【解析】

根据逆运算，倒推回求 x 的值，根据 x 的范围取舍即可得选项.

【详解】

因为 $y=2$ ，所以当 $(x+1)^{\frac{1}{2}}=2$ ，解得 $x=3>0$ ，所以 3 是输入的 x 的值；

当 $2^{-x-1}=2$ 时，解得 $x=-2<0$ ，所以 -2 是输入的 x 的值，

所以输入的 x 的值为 -2 或 3，

故选：D.

【点睛】

本题考查了程序框图的简单应用，通过结果反求输入的值，属于基础题.

11. A

【解析】

由抛物线 $y^2=20x$ 的焦点 $(5,0)$ 得双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的焦点 $(\pm 5,0)$ ，求出 $c=5$ ，由抛物线准线方程

$x=-5$ 被曲线截得的线段长为 $\frac{9}{2}$ ，由焦半径公式 $\frac{2b^2}{a}=\frac{9}{2}$ ，联立求解.

【详解】

解：由抛物线 $y^2=20x$ ，可得 $2p=20$ ，则 $p=10$ ，故其准线方程为 $x=-5$ ，

Q 抛物线 $y^2=20x$ 的准线过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点，

$\therefore c=5$.

Q 抛物线 $y^2=20x$ 的准线被双曲线截得的线段长为 $\frac{9}{2}$ ，

$\therefore \frac{2b^2}{a}=\frac{9}{2}$ ，又 $c^2=25=a^2+b^2$ ，

$\therefore a=4, b=3$ ，

则双曲线的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/475340002131011340>