

四川省石室中学 2023 届高三下学期第二次模拟考试数学试题试卷

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在 $\triangle ABC$ 中， a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边，若 $\triangle ABC$ 的面积为 S ，且 $4\sqrt{3}S = (a+b)^2 - c^2$ ，则

$$\sin\left(C + \frac{\pi}{4}\right) = (\quad)$$

- A. 1 B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2. 已知 $\vec{a} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ ， $\vec{b} = (\cos(-\alpha), \sin(-\alpha))$ ，那么 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 是 $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$ 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. “ $\alpha \neq \beta$ ”是“ $\cos\alpha \neq \cos\beta$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 已知直线 m, n 和平面 α ，若 $m \perp \alpha$ ，则“ $m \perp n$ ”是“ $n \parallel \alpha$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分必要条件 D. 不充分不必要

5. 《周易》是我国古代典籍，用“卦”描述了天地世间万象变化。如图是一个八卦图，包含乾、坤、震、巽、坎、离、艮、兑八卦（每一卦由三个爻组成，其中“”表示一个阳爻，“”表示一个阴爻）。若从含有两个及以上阳爻的卦中任取两卦，这两卦的六个爻中都恰有两个阳爻的概率为 ()



- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

6. 我国南北朝时的数学著作《张邱建算经》有一道题为：“今有十等人，每等一人，宫赐金以等次差降之，上三人先入，得金四斤，持出，下三人后入得金三斤，持出，中间四人未到者，亦依次更给，问各得金几何？”则在该问题中，等级较高的二等入所得黄金比等级较低的九等人所得黄金（ ）

- A. 多 1 斤 B. 少 1 斤 C. 多 $\frac{1}{3}$ 斤 D. 少 $\frac{1}{3}$ 斤

7. 复数 $z_1 = 2 + i$ ，若复数 z_1, z_2 在复平面内对应的点关于虚轴对称，则 $\frac{z_1}{z_2}$ 等于（ ）

- A. $-\frac{3+4i}{5}$ B. $\frac{3+4i}{5}$ C. $-3+4i$ D. $\frac{-3+4i}{5}$

8. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2$ ，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 120° ，则 $|\vec{a}-3\vec{b}| =$ （ ）

- A. $\sqrt{11}$ B. $\sqrt{37}$ C. $2\sqrt{10}$ D. $\sqrt{43}$

9. 已知 $f(x) = 1 - 2\cos^2(\omega x + \frac{\pi}{3}) (\omega > 0)$. 给出下列判断：

①若 $f(x_1) = 1, f(x_2) = -1$ ，且 $|x_1 - x_2|_{\min} = \pi$ ，则 $\omega = 2$ ；

②存在 $\omega \in (0, 2)$ 使得 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到的图象关于 y 轴对称；

③若 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上恰有 7 个零点，则 ω 的取值范围为 $[\frac{41}{24}, \frac{47}{24})$ ；

④若 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增，则 ω 的取值范围为 $(0, \frac{2}{3}]$.

其中，判断正确的个数为（ ）

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

10. 等比数列 $\{a_n\}$ ，若 $a_3 = 4, a_{15} = 9$ 则 $a_9 =$ （ ）

- A. ± 6 B. 6 C. -6 D. $\frac{13}{2}$

11. 已知函数 $f(x) = x + e^{x-a}$ ， $g(x) = \ln(x+2) - 4e^{a-x}$ ，其中 e 为自然对数的底数，若存在实数 x_0 ，使

$f(x_0) - g(x_0) = 3$ 成立，则实数 a 的值为（ ）

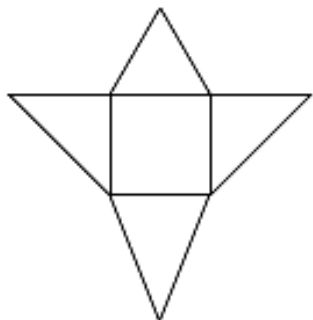
- A. $-\ln 2 - 1$ B. $-1 + \ln 2$ C. $-\ln 2$ D. $\ln 2$

12. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a} + y^2 = 1$ 的一条渐近线倾斜角为 $\frac{5\pi}{6}$ ，则 $a =$ （ ）

- A. 3 B. $-\sqrt{3}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. -3

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 如图，是一个四棱锥的平面展开图，其中间是边长为2的正方形，上面三角形是等边三角形，左、右三角形是等腰直角三角形，则此四棱锥的体积为_____.



14. 已知点 $A(0, -1)$ 是抛物线 $x^2 = 2py$ 的准线上一点， F 为抛物线的焦点， P 为抛物线上的点，且 $|PF| = m|PA|$ ，若双曲线 C 中心在原点， F 是它的一个焦点，且过 P 点，当 m 取最小值时，双曲线 C 的离心率为_____.

15. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $P(x_0, y_0)$ 在单位圆 O 上，设 $\angle xOP = \alpha$ ，且 $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$. 若 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = -\frac{12}{13}$ ，则 x_0 的值为_____.

16. 设 $f(x)$ 为定义在 R 上的偶函数，当 $x < 0$ 时， $f(x) = 2^x + m$ (m 为常数)，若 $f(1) = \frac{3}{2}$ ，则实数 m 的值为_____.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 已知函数 $f(x) = (x-a)\ln x$ ($a \in R$)，它的导函数为 $f'(x)$ 。

(1) 当 $a=1$ 时，求 $f'(x)$ 的零点；

(2) 当 $a=0$ 时，证明： $f(x) < e^x + \cos x - 1$ 。

18. (12分) 已知在平面四边形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = \frac{3\pi}{4}$ ， $AB \perp AD$ ， $AB = 1$ ， $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}$ 。

(1) 求 AC 的长；

(2) 已知 $CD = \frac{\sqrt{17}}{2}$ ， $\angle ADC$ 为锐角，求 $\tan \angle ADC$ 。

19. (12分) 已知函数 $f(x) = (1 + \sqrt{3} \tan x) \cos^2 x$ 。

(I) 若 α 是第二象限角，且 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，求 $f(\alpha)$ 的值；

(II) 求函数 $f(x)$ 的定义域和值域。

20. (12分) 已知函数 $f(x) = |x - a|$

(1) 当 $a = -1$ 时, 求不等式 $f(x) \leq |2x+1| - 1$ 的解集;

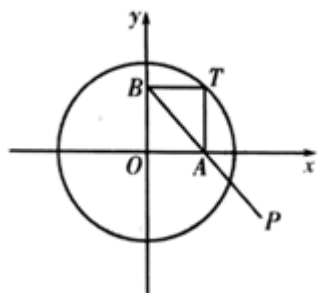
(2) 若函数 $g(x) = f(x) - |x+3|$ 的值域为 A , 且 $[-2, 1] \subseteq A$, 求 a 的取值范围.

21. (12 分) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $2b \cos B = a \cos C + c \cos A$.

(1) 求 $\angle B$ 的大小;

(2) 若 $b = 2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

22. (10 分) 如图, 点 T 为圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 上一动点, 过点 T 分别作 x 轴, y 轴的垂线, 垂足分别为 A, B , 连接 BA 延长至点 P , 使得 $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AP}$, 点 P 的轨迹记为曲线 C .



(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 若点 A, B 分别位于 x 轴与 y 轴的正半轴上, 直线 AB 与曲线 C 相交于 M, N 两点, 且 $|AB| = 1$, 试问在曲线 C 上是否存在点 Q , 使得四边形 $OMQN$ 为平行四边形, 若存在, 求出直线 l 方程; 若不存在, 说明理由.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

根据三角形的面积公式以及余弦定理进行化简求出 C 的值, 然后利用两角和差的正弦公式进行求解即可.

【详解】

解: 由 $4\sqrt{3}S = (a+b)^2 - c^2$,

得 $4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} ab \sin C = a^2 + b^2 - c^2 + 2ab$,

$$\because a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C,$$

$$\therefore 2\sqrt{3}ab \sin C = 2ab \cos C + 2ab,$$

$$\text{即 } \sqrt{3} \sin C - \cos C = 1$$

$$\text{即 } 2 \sin\left(C - \frac{\pi}{6}\right) = 1,$$

$$\text{则 } \sin\left(C - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\because 0 < C < \pi,$$

$$\therefore -\frac{\pi}{6} < C - \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6},$$

$$\therefore C - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, \text{ 即 } C = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{则 } \sin\left(C + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

故选 D.

【点睛】

本题主要考查解三角形的应用，结合三角形的面积公式以及余弦定理求出 C 的值以及利用两角和差的正弦公式进行计算是解决本题的关键.

2、B

【解析】

由 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，可得 $\cos 2\alpha = 0$ ，解出即可判断出结论.

【详解】

解：因为 $\vec{a} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ ， $\vec{b} = (\cos(-\alpha), \sin(-\alpha))$ 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$\therefore \cos \alpha \cos(-\alpha) + \sin \alpha \sin(-\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha = 0.$$

$$\therefore 2\alpha = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}, \text{ 解得 } \alpha = k\pi \pm \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ 是 } \alpha = k\pi + \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}) \text{ 的必要不充分条件.}$$

故选：B.

【点睛】

本题考查了向量数量积运算性质、三角函数求值、简易逻辑的判定方法，考查了推理能力与计算能力，属于基础题.

3、B

【解析】

分别判断充分性和必要性得到答案.

【详解】

$\alpha = \beta \Rightarrow \cos \alpha = \cos \beta$ 所以 $\cos \alpha \neq \cos \beta \Rightarrow \alpha \neq \beta$ (逆否命题) 必要性成立

当 $\alpha = -\beta \Rightarrow \cos \alpha = \cos \beta$, 不充分

故是必要不充分条件, 答案选 B

【点睛】

本题考查了充分必要条件, 属于简单题.

4、B

【解析】

由线面关系可知 $m \perp n$, 不能确定 n 与平面 α 的关系, 若 $n // \alpha$ 一定可得 $m \perp n$, 即可求出答案.

【详解】

Q $m \perp \alpha, m \perp n$,

不能确定 $n \subset \alpha$ 还是 $n \not\subset \alpha$,

$\therefore m \perp n \not\Rightarrow n // \alpha$,

当 $n // \alpha$ 时, 存在 $a \subset \alpha$, $n // a$,

由 $m \perp \alpha \Rightarrow m \perp a$,

又 $n // a$, 可得 $m \perp n$,

所以“ $m \perp n$ ”是“ $n // \alpha$ ”的必要不充分条件,

故选: B

【点睛】

本题主要考查了必要不充分条件, 线面垂直, 线线垂直的判定, 属于中档题.

5、B

【解析】

基本事件总数为6个, 都恰有两个阳爻包含的基本事件个数为3个, 由此求出概率.

【详解】

解: 由图可知, 含有两个及以上阳爻的卦有巽、离、兑、乾四卦,

取出两卦的基本事件有(巽, 离), (巽, 兑), (巽, 乾), (离, 兑), (离, 乾), (兑, 乾)共6个, 其中符合条件的基本事件有(巽, 离), (巽, 兑), (离, 兑)共3个,

所以，所求的概率 $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

故选：B.

【点睛】

本题渗透传统文化，考查概率、计数原理等基本知识，考查抽象概括能力和应用意识，属于基础题.

6、C

【解析】

设这十等人所得黄金的重量从大到小依次组成等差数列 $\{a_n\}$ ，则 $a_1 + a_2 + a_3 = 4$ ， $a_8 + a_9 + a_{10} = 3$ ，由等差数列的性质

得 $a_2 = \frac{4}{3}$ ， $a_9 = 1$ ， $\therefore a_2 - a_9 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$ ，

故选 C

7、A

【解析】

先通过复数 z_1, z_2 在复平面内对应的点关于虚轴对称，得到 $z_2 = -2 + i$ ，再利用复数的除法求解 $\frac{z_1}{z_2}$.

【详解】

因为复数 z_1, z_2 在复平面内对应的点关于虚轴对称，且复数 $z_1 = 2 + i$ ，

所以 $z_2 = -2 + i$

所以 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+i}{-2+i} = \frac{2+i(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

故选：A

【点睛】

本题主要考查复数的基本运算和几何意义，属于基础题.

8、D

【解析】

先计算 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，然后将 $|\vec{a} - 3\vec{b}|$ 进行平方，，可得结果.

【详解】

由题意可得：

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 120^\circ = 1 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$\therefore \left(\overset{\text{r}}{a} - 3\overset{\text{r}}{b} \right)^2 = \overset{\text{r}}{a}^2 - 6\overset{\text{r}}{a} \cdot \overset{\text{r}}{b} + 9\overset{\text{r}}{b}^2 = 1 + 6 + 36 = 43$$

$$\therefore \text{则} \left| \overset{\text{r}}{a} - 3\overset{\text{r}}{b} \right| = \sqrt{43}.$$

故选: D.

【点睛】

本题考查的是向量的数量积的运算和模的计算, 属基础题。

9、B

【解析】

对函数 $f(x)$ 化简可得 $f(x) = \sin(2\omega x + \frac{\pi}{6})$, 进而结合三角函数的最值、周期性、单调性、零点、对称性及平移变换,

对四个命题逐个分析, 可选出答案.

【详解】

因为 $f(x) = 1 - 2\cos^2(\omega x + \frac{\pi}{3}) = -\cos(2\omega x + \frac{2\pi}{3}) = \sin(2\omega x + \frac{\pi}{6})$, 所以周期 $T = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega}$.

对于①, 因为 $|x_1 - x_2|_{\min} = \pi = \frac{1}{2}T$, 所以 $T = 2\pi = \frac{\pi}{\omega}$, 即 $\omega = \frac{1}{2}$, 故①错误;

对于②, 函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到的函数为 $y = \sin(2\omega x - \frac{\omega\pi}{3} + \frac{\pi}{6})$, 其图象关于 y 轴对称, 则

$-\frac{\omega\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 解得 $\omega = -1 - 3k (k \in \mathbb{Z})$, 故对任意整数 k , $\omega \notin (0, 2)$, 所以②错误;

对于③, 令 $f(x) = \sin(2\omega x + \frac{\pi}{6}) = 0$, 可得 $2\omega x + \frac{\pi}{6} = k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 则 $x = \frac{k\pi}{2\omega} - \frac{\pi}{12\omega}$,

因为 $f(0) = \sin \frac{\pi}{6} > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上第 1 个零点 $x_1 > 0$, 且 $x_1 = \frac{\pi}{2\omega} - \frac{\pi}{12\omega}$, 所以第 7 个零点

$x_7 = \frac{\pi}{2\omega} - \frac{\pi}{12\omega} + 3T = \frac{\pi}{2\omega} - \frac{\pi}{12\omega} + \frac{3\pi}{\omega} = \frac{41\pi}{12\omega}$, 若存在第 8 个零点 x_8 , 则

$x_8 = \frac{\pi}{2\omega} - \frac{\pi}{12\omega} + \frac{7}{2}T = \frac{\pi}{2\omega} - \frac{\pi}{12\omega} + \frac{7\pi}{2\omega} = \frac{47\pi}{12\omega}$,

所以 $x_7 \leq 2\pi < x_8$, 即 $\frac{41\pi}{12\omega} \leq 2\pi < \frac{47\pi}{12\omega}$, 解得 $\frac{41}{24} \leq \omega < \frac{47}{24}$, 故③正确;

对于④, 因为 $f(0) = \sin \frac{\pi}{6}$, 且 $0 \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$, 所以 $\begin{cases} 2\omega\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} \geq -\frac{\pi}{2} \\ 2\omega \times \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$, 解得 $\omega \leq \frac{2}{3}$, 又 $\omega > 0$, 所以

$0 < \omega \leq \frac{2}{3}$, 故④正确.

故选: B.

【点睛】

本题考查三角函数的恒等变换，考查三角函数的平移变换、最值、周期性、单调性、零点、对称性，考查学生的计算求解能力与推理能力，属于中档题.

10、B

【解析】

根据等比中项性质代入可得解，由等比数列项的性质确定值即可.

【详解】

由等比数列中等比中项性质可知， $a_3 \cdot a_{15} = a_9^2$ ，

所以 $a_9 = \pm\sqrt{a_3 \cdot a_{15}} = \pm\sqrt{36} = \pm 6$ ，

而由等比数列性质可知奇数项符号相同，所以 $a_9 = 6$ ，

故选：B.

【点睛】

本题考查了等比数列中等比中项的简单应用，注意项的符号特征，属于基础题.

11、A

【解析】

令 $f(x) - g(x) = x + e^{x-a} - \ln(x+1) + 4e^{a-x}$ ，

令 $y = x - \ln(x+1)$ ， $y' = 1 - \frac{1}{x+2} = \frac{x+1}{x+2}$ ，

故 $y = x - \ln(x+1)$ 在 $(-1, -1)$ 上是减函数， $(-1, +\infty)$ 上是增函数，

故当 $x = -1$ 时， y 有最小值 $-1 - 0 = -1$ ，

而 $e^{x-a} + 4e^{a-x} \geq 4$ ，（当且仅当 $e^{x-a} = 4e^{a-x}$ ，即 $x = a + \ln 4$ 时，等号成立）；

故 $f(x) - g(x) \geq 3$ （当且仅当等号同时成立时，等号成立）；

故 $x = a + \ln 4 = -1$ ，即 $a = -1 - \ln 4$. 故选：A.

12、D

【解析】

由双曲线方程可得渐近线方程，根据倾斜角可得渐近线斜率，由此构造方程求得结果.

【详解】

由双曲线方程可知： $a < 0$ ，渐近线方程为： $y = \pm \frac{1}{\sqrt{-a}}x$ ，

Q 一条渐近线的倾斜角为 $\frac{5\pi}{6}$ ， $\therefore -\frac{1}{\sqrt{-a}} = \tan \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，解得： $a = -3$.

故选：D.

【点睛】

本题考查根据双曲线渐近线倾斜角求解参数值的问题，关键是明确直线倾斜角与斜率的关系；易错点是忽略方程表示双曲线对于 a 的范围的要求。

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

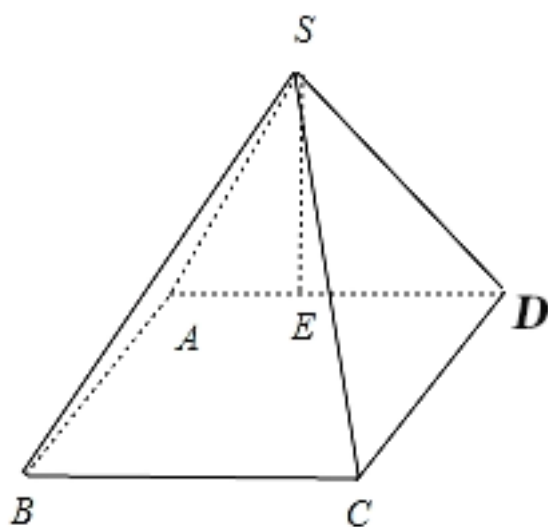
13、 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【解析】

画图直观图可得该几何体为棱锥,再计算高求解体积即可.

【详解】

解：如图,是一个四棱锥的平面展开图,其中间是边长为 2 的正方形,



上面三角形是等边三角形,左、右三角形是等腰直角三角形,

$\therefore$ 此四棱锥 $S-ABCD$ 中, $ABCD$ 是边长为 2 的正方形,

$\triangle SAD$ 是边长为 2 的等边三角形,

故 $CD \perp AD$, 又 $CD \perp SD$, $AD \cap SD = D$

故平面 $SAD \perp$ 平面 $ABCD$,

$\therefore \triangle SAD$ 的高 SE 是四棱锥 $S-ABCD$ 的高,

$\therefore$ 此四棱锥的体积为:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{正方形}ABCD} \times SE = \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times \sqrt{4-1} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

故答案为: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

【点睛】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/476003223125010105>