换元积分法

4.2.1　第一类换元法（凑微分法）

4.2.2　第二类换元法

4.2.1　第一类换元法（凑微分法）

例4.2.1　求 $\int e^{4x}dx$

分析　无法直接利用积分公式，因此可以将 $4x$ 作为整体，凑出积分变量，再进行计算.

解　令 $u=4x$，则

$$\int e^{4x}dx=\frac{1}{4}\int e^{4x}d(4x)=\frac{1}{4}\int e^{u}du=\frac{1}{4}e^{u}+C=\frac{1}{4}e^{4x}+C$$

由此可见,计算 $\int e^{4x}dx$ 的关键步骤是把它变成 $u=4x$，然后通过变量代换 $\frac{1}{4}\int e^{4x}d(4x)$ 就可化为易计算的积分 $\frac{1}{4}\int e^{u}du$.

一般地，如果$F(u)$ 是 $f(u)$ 的一个原函数，则

$$\boxed{\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C,}$$

而如果 u 又是另一个变量x 的函数 $u=\varphi(x)$,

且$\varphi(x)$ 可微，那么根据复合函数的微分法，有

$$\mathrm{d}F(\varphi(x)) = f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

由此得 $$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x)$$

$$=\int \mathrm{d}F(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C.$$

于是有如下定理：

定理4.2 设 $f(u)$是具有原函数 $F(u)$, $u=\varphi(x)$ 可导，

则有换元公式 $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x=\left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)}$

$$=\left[F(u)+C\right]_{u=\varphi(x)}.$$

注：如果积分 $\int g(x)\mathrm{d}x$ 不能直接利用利用基本积分公式计算，

而其被积表达式 $g(x)\mathrm{d}x$ 能表示为

$$g(x)\mathrm{d}x=f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x=f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x)$$

的形式，且 $\int f(u)\mathrm{d}u$ 较易计算，那么可令 $u=\varphi(x)$,

代入后有 $\int g(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x$

$$= \int f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x) = \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)}.$$

这样就得到了 $g(x)$ 的原函数.这种积分称为**第一类换元法**.

由于在积分过程中，先要从被积表达式中凑出一个积分因子

$$\mathrm{d}\varphi(x) = \varphi'(x)\mathrm{d}x,$$

因此第一类换元法也称为**凑微分法**.

例4.2.2 求 $\int \sin 3x dx$

分析 被积函数$\sin 3x$ 是$\sin u$ 与 $u = 3x$ 构成的复合函数，因此作变量代换 $u = 3x$.

解

$$\int \sin 3x dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x d(3x)$$

$$= \frac{1}{3}\int \sin u du$$

$$= -\frac{1}{3}\cos u + C$$

$$= -\frac{1}{3}\cos 3x + C$$

例4.2.3 求 $\int \frac{1}{2x+7}\mathrm{d}x.$

解 被积函数 $\frac{1}{2x+7}$ 可看成 $\frac{1}{u}$ 与 $u=2x+7$ 构成的复合函数，虽没有 $u'=2$ 这个因子，但我们可以凑出这个因子：

$$\frac{1}{2x+7}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x+7}\cdot 2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x+7}(2x+7)'$$

如果令 $u=2x+7$ 便有 $\int\frac{1}{2x+7}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x+7}(2x+7)'\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{2x+7}\mathrm{d}(2x+7)=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln|2x+7|+C.$$

一般地，对于积分$\int f(ax+b)\mathrm{d}x$ 总可以作变量代换$u = ax + b$ ，把它化为

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a} f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)$$

$$= \frac{1}{a}\left[\int f(u)\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)}.$$

例4.2.4 求 $\int \cos^2 x \sin x dx$

分析 可将$\sin x$作为 $\varphi'(x)$ ，即 $\varphi(x) = -\cos x$

解 令 $u = \cos x$,则

$$\int \cos^2 x \sin x dx = -\int \cos^2 x d(\cos x) = -\int u^2 du = -\frac{1}{3}u^3 + C$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

在方法比较熟悉后，不定积分的换元法就可以删繁就简，略去设中间变量和换元的步骤，而直接凑成基本积分公式的形式．

例4.2.5 求 $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

分析 将 $\frac{1}{x}$ 作为 $\varphi'(x)$ ，将其凑成微分部分.

解：

$$\int \frac{1}{x\ln x}dx$$

$$= \int \frac{1}{\ln x}d(\ln x)$$

$$= \ln|\ln x| + C$$

例4.2.6 求 $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$

分析 凑微分，利用积分公式 $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$ 计算.

解 $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \int \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}dx$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}d(\frac{x}{a})$$

$$= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

类似的方法可以计算 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \ (a > 0)$ 如下：

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$= \int \frac{dx}{a\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}}$$

$$= \int \frac{d(\frac{x}{a})}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}}$$

$$= \arcsin \frac{x}{a} + C$$

例 4.2.7 求 $\int \tan x\mathrm{d}x$ 和 $\int \cot x dx$

分析 将正切函数转化成正余弦，再凑微分.

解 $$\int \tan x\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos x}$$

$$= -\ln|\cos x| + C.$$

类似地可得

$$\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C.$$

例4.2.8 求 $\int \sec x dx$ 和 $\int \csc x dx$.

分析 此题可以转化为正余弦，也可直接变形凑微分计算，采用第二种方法较为简单.

解 $\int \sec x dx$

$$= \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

$$= \int \frac{1}{\tan x + \sec x} d(\tan x + \sec x)$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| + C$$

类似地可得

$$\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

例4.2.9　求 $\int \frac{1}{1+e^x}dx$

分析　含有 e^x 的函数求积分，通常利用 $d\left(e^x\right)=e^x dx$

求解.

解

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx=\int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx=\int \left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx$$

$$=\int dx-\int \frac{1}{1+e^x}d\left(1+e^x\right)$$

$$=x-\ln\left(1+e^x\right)+C$$

例4.2.10 求 $\int \frac{x+5}{\sqrt{16-x^2}}dx$

分析 原式变形，利用 $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$ 求解.

解

$$\int \frac{x+5}{\sqrt{16-x^2}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}dx + \int \frac{5}{\sqrt{16-x^2}}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}d\left(16-x^2\right) + 5\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}}d\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$= -\sqrt{16-x^2} + 5\arcsin\frac{x}{4} + C$$

例4.2.11 求下列不定积分.

(1) $\int \sin^2 x\mathrm{d}x$.　　(2) $\int \sec^4 x dx$

(1) **分析** 通常三角函数平方的积分需要先降次再积分.

解 $$\int \sin^2 x\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\int \cos 2x\mathrm{d}(2x)$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

类似地可得

$$\int \cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

(2) **分析**　正割的4次方，充分利用 $d(\tan x) = \sec^2 x dx$ 凑出微分求解.

解 $\int \sec^4 x dx = \int \sec^2 x d \tan x = \int (1+\tan^2 x) d \tan x$

$$= \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$$

目前为止，我们已经掌握所有三角函数以及三角函数平方的积分了.

凑微分是利用第一类换元法求解积分的主要技巧，熟记常见凑微分的形式往往会提高解题速度和能力。一般地，有如下几种常见的凑微分形式：

(1) $\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)$; (2) $x^{\mu}\mathrm{d}x=\frac{1}{\mu+1}\mathrm{d}x^{\mu+1}(\mu\neq-1)$;

(3) $\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\ln x$; (4) $a^{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}\mathrm{d}a^{x}$;

(5) $\sin x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\cos x$; (6) $\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\sin x$;

(7) $\sec^{2}x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\tan x$; (8) $\csc^{2}x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\cot x$;

(9) $\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\arcsin x$; (10) $\frac{1}{1+x^{2}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\arctan x$.