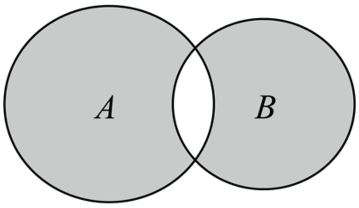
高三数学

第I卷（选择题　　共60分）

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|0\le x\le 2\}, B=\{x|x^2-x>0\}$，则图中的阴影部分表示的集合为（　　）

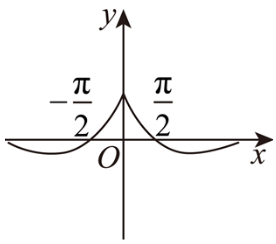


A. $\{x|x\le 1 \text{或} x>2\}$　　　　B. $\{x|x<0 \text{或} 1<x<2\}$

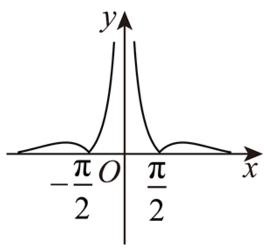
C. $\{x|1\le x<2\}$　　　　D. $\{x|1<x\le 2\}$

2. 函数 $f(x)=\dfrac{4\cos x}{|x|+\frac{1}{2}x^2}$ 的部分图象大致为（　　）

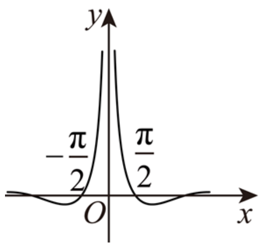
A.



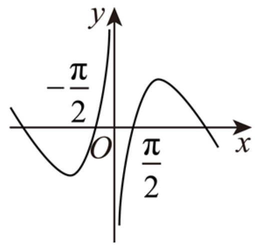
B.



C.



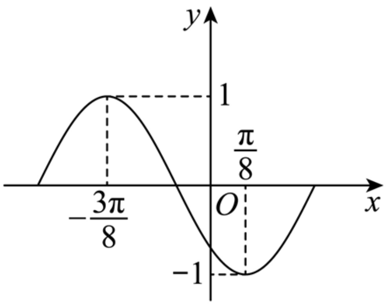
D.



3. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两焦点为 F_1，F_2，以 F_1F_2 为边作正三角形，若椭圆恰好平分正三角形的另两条边，则椭圆的离心率为（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　　C. $4-2\sqrt{3}$　　　　D. $\sqrt{3}-1$

4. 已知 $f(x)=Asin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\omega|<\pi)$ 的一段图象如图所示，则（　　）



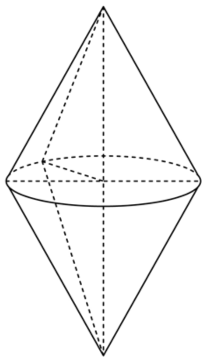
A. $f\left(x\right)=sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)$

B. $f\left(x\right)$的图象的一个对称中心为$\left(\frac{\pi}{8},0\right)$

C. $f\left(x\right)$的单调递增区间是$\left[\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{5\pi}{8}+k\pi\right],k\in Z$

D. 函数$f\left(x\right)$的图象向左平移$\frac{5\pi}{8}$个单位后得到的是一个奇函数的图象

5. 用一个边长为4的正方形纸片，做一个如图所示的几何体，图中两个圆锥等底、等高，则该几何体体积的最大值为（　　）

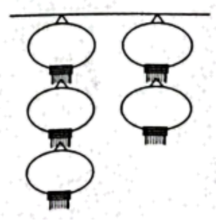


A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$　　B. $2\sqrt{3}\pi$　　C. 4π　　D. $4\sqrt{3}\pi$

6. 若$a=2025\sin\frac{1}{2025},b=\cos\frac{1}{2025},c=\tan 2025°$，则$a,b,c$的大小关系为（　　）

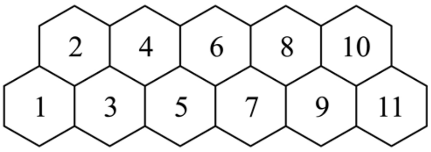
A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $c>b>a$　　D. $c>a>b$

7. 元旦联欢会会场中挂着如图所示的两串灯笼， 每次随机选取其中一串并摘下其最下方的一个灯笼， 直至某一串灯笼被摘完为止， 则右侧灯笼先被摘完的概率为（　　）



A. $\frac{1}{2}$　　　　B. $\frac{3}{5}$　　　　C. $\frac{7}{16}$　　　　D. $\frac{11}{16}$

8. 如图，从 1 开始出发，一次移动是指：从某一格开始只能移动到邻近的一格，并且总是向右或向上或右下移动，而一条移动路线由若干次移动构成，如从 1 移动到 11：1→2→3→5→7→8→9→10→11 就是一条移动路线．从 1 移动到数字 $n\left(n=2,3,\cdots 11\right)$ 的不同路线条数记为 r_n，从 1 移动到 11 的事件中，跳过数字 $n\left(n=2,3,\cdots 10\right)$ 的概率记为 p_n，则下列结论正确的是（　　）



①$r_9=34$，②$r_{n+1}>r_n$，③$p_5=\frac{24}{89}$，④$p_9>p_{10}$．

A. ①②③　　　　B. ①②④　　　　C. ②③④　　　　D. ①②③④

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9．已知函数 $f\left(x\right)=2024\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，则（　　）

A. $f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称

B. $f\left(x\right)$ 的图象关于点 $\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$ 对称

C. $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递减

D. $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ 的值域为 $\left[-2024,2024\right]$

10. 已知点 $M\left(0,m\right)\left(m\neq 0\right),F$ 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，N,Q 为 C 上不重合的两个动点，O 为坐标原点，若直线 MN（直线 MN 斜率存在且不为 0）与 C 仅有唯一交点 N，则（　　）

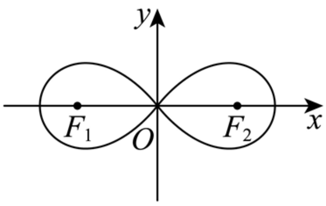
A. C 的准线方程为 $x=-1$

B. 若线段 MF 与 C 的交点恰好为 MF 中点，则 $m=\pm 2\sqrt{2}$

C. 直线 MN 与直线 MF 垂直

D. 若 $|QF|=3$，则 $|OQ|=2\sqrt{2}$

11. 如图所示的曲线 Γ 被称为双纽线，该种曲线在生活中应用非常广泛，其代数形式可表示为坐标中（O 为坐标原点）动点 P 到点 $F_1(-1,0), F_2(1,0)$ 的距离满足：$|PF_1||PF_2|=\frac{1}{4}|F_1F_2|^2$，则（　　）



A. $|OP|$的最大值是 $\sqrt{2}$

B. 若 (x_0, y_0) 是曲线上一点，且在第一象限，则 $y_0>\sqrt{2}x_0$

C. Γ 与 $y=\tan x$ 有 1 个交点

D. $\triangle OPF_1$ 面积的最大值是 $\frac{1}{4}$

三、填空题（本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分）

12. 设抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，过点 F 作直线交抛物线于 A，B 两点，若 $|AF|=3$，$|BF|=2$，则 $p=$__________.

13. 若曲线 $y=x+\ln x$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与曲线 $y=ax^2+(a+2)x+1(a\neq 0)$ 相切，则 $a=$________.

14. 某射击比赛中，甲、乙两名选手进行多轮射击对决．每轮射击中，甲命中目标的概率为 $\frac{2}{3}$，乙命中目标的概率为 $\frac{1}{2}$．若每轮射击中，命中目标的选手得 1 分，未命中目标的选手得 0 分，且各轮射击结果相互独立．则进行五轮射击后，甲的总得分不小于 3 的概率为__________.

四、解答题： 本题共 5 小题. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 在$\vee ABC$ 中，a，b，c 分别为角 A，B，C 的对边，已知 $a=2\sqrt{3}$，且 $b\sin C-\frac{b\cos C}{\tan B}=2$.

（1）求角 A 的大小；

（2）求$\vee ABC$ 面积的最大值.

16. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=2$，$a_{n+1}=2S_n+2$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

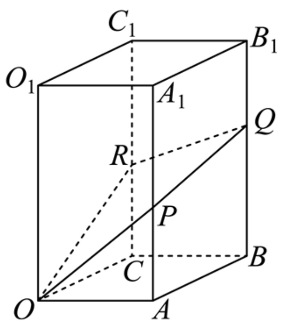
（2）若 $2b_n=3na_n$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

17. 在$\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为a,b,c,$\triangle ABC$ 的面积为S，已知$\dfrac{4S}{\tan B}=a^2\cos B+ab\cos A$.

（1）求角 B；

（2）若$b=3$,$\triangle ABC$ 的周长为l，求$\dfrac{S}{l}$的最大值.

18. 正四棱柱$OABC-O_1A_1B_1C_1$中$OB=\sqrt{2}$，点 P,Q,R 分别在 AA_1,BB_1,CC_1 上，且O,P,Q,R四点共面.



（1）若$OP=OR$，记平面$OPQR$与底面的交线为l，证明：$AC\ /\!/\ l$；

（2）已知$\angle AOP=\alpha,\angle COR=\beta$，若$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，求四边形$OPQR$面积的最大值.

19. 在高中数学教材苏教版选择性必修 2 上阐述了这样一个问题：假设某种细胞分裂（每次分裂都是一个细胞分裂成两个）和死亡的概率相同，如果一个种群从这样的一个细胞开始变化，那么这个种群最终灭绝的概率是多少？在解决这个问题时，我们可以设一个种群由一个细胞开始，最终灭绝的概率为p，则从一个细胞开始，它有$\dfrac{1}{2}$的概率分裂成两个细胞，在这两个细胞中，每个细胞灭绝的概率都是p，两个细胞最终都走向灭绝的概率就是p^2，于是我们得到：$p=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}p^2$，计算可得$p=1$；我们也可以设一个种群由一个细胞开始，最终繁衍下去的概率为p，那么从一个细胞开始，它有$\dfrac{1}{2}$的概率分裂成两个细胞，在这两个细胞中，每个细胞繁衍下去的概率都是p，两个细胞最终都走向灭绝的概率就是$(1-p)^2$，于是我们得到：$p=\dfrac{1}{2}\left[1-(1-p)^2\right]$，计算可得$p=0$．根据以上材料，思考下述问题：一个人站在平面直角坐标系的点$P(n,0)\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$处，他每步走动都会有$p^*$的概率向左移动 1 个单位，有$1-p^*$的概率向右移动一个单位，原点$(0,0)$处有一个陷阱，若掉入陷阱就会停止走动，以$p_n$代表当这个人由$P(n,0)$开始，最终掉入陷阱的概率.

（1）若这个人开始时位于点$P\left(1,0\right)$处，且$p^{*}=\dfrac{1}{3}$.

（i）求他在5步内（包括5步）掉入陷阱的概率；

（ii）求他最终掉入陷阱的概率$p_1\left(0<p_1<1\right)$；

（iii）已知$p_n=\dfrac{1}{3}p_{n-1}+\dfrac{2}{3}p_{n+1}\left(n\in\mathbf{N}^{*}\right)$，若$p_0=1$，求$p_n$；

（2）已知p_1是关于p^{*}的连续函数.

（i）分别写出当$p^{*}=0$和$p^{*}=1$时，p_1的值（直接写出即可，不必说明理由）；

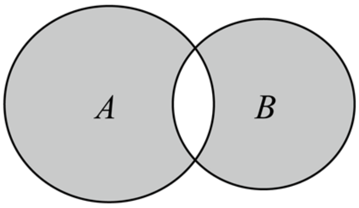
（ii）求p_1关于p^{*}的表达式.

高三数学

第I卷（选择题　　共 60 分）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|0\le x\le 2\},B=\{x|x^2-x>0\}$，则图中的阴影部分表示的集合为（　　）



A. $\{x|x\le 1\text{或}x>2\}$　　B. $\{x|x<0\text{或}1<x<2\}$

C. $\{x|1\le x<2\}$　　D. $\{x|1<x\le 2\}$

【答案】A

【解析】

【分析】由题可知图中的阴影部分表示 $\complement_{A\cup B}(A\cap B)$，再根据交集，并集和补集的定义即可得解.

【详解】由题可知图中的阴影部分表示 $\complement_{A\cup B}(A\cap B)$，

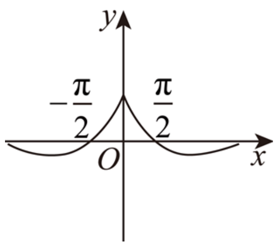
$B=\{x|x^2-x>0\}=\{x|x>1\text{或}x<0\}$，

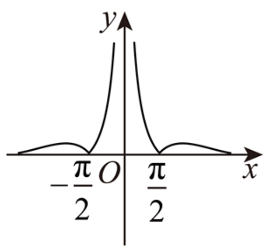
则 $A\cup B=\mathrm{R},A\cap B=\{x|1<x\le 2\}$，

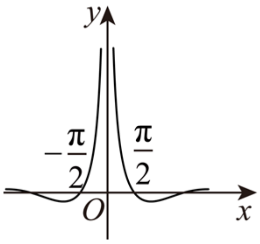
所以 $\complement_{A\cup B}(A\cap B)=\{x|x\le 1\text{或}x>2\}$.

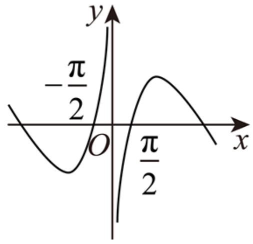
故选：A.

2. 函数 $f(x)=\dfrac{4\cos x}{|x|+\dfrac{1}{2}x^2}$ 的部分图象大致为（　　）

A.


B.


C. 

D. 

【答案】C

【解析】

【分析】利用奇偶性的定义确定函数为偶函数，再根据余弦函数的性质可求解.

【详解】由题可知，$f\left(x\right)$的定义域为$\left\{x\middle|\ x\neq 0\right\}$，

又因为$f(-x)=\dfrac{4\cos(-x)}{\left|-x\right|+\dfrac{1}{2}\cdot(-x)^2}=\dfrac{4\cos x}{\left|x\right|+\dfrac{1}{2}x^2}=f(x)$，

所以，$f\left(x\right)$为偶函数.

当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，$f\left(x\right)>0$，当$\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}$时，$f\left(x\right)<0$，当$\dfrac{3\pi}{2}<x<\dfrac{5\pi}{2}$时，$f\left(x\right)>0$.

故选：C.

3. 椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的两焦点为$F_1$，$F_2$，以$F_1F_2$为边作正三角形，若椭圆恰好平分正三角形的另两条边，则椭圆的离心率为（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $4-2\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}-1$

【答案】D

【解析】

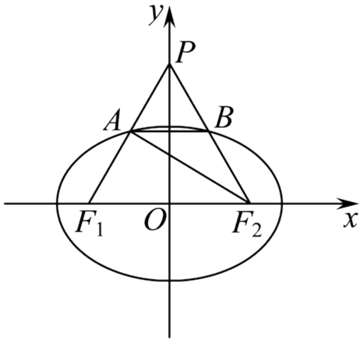
【分析】设椭圆与正三角形另两条边的交点分别是A，B，易得$AF_1=AB=BF_2=c$，$\angle F_1AF_2=90°$，由此建立a，c的齐次式，进而可得结果.

【详解】设椭圆与正三角形另两条边的交点分别是A，B，

易得$\left|AF_1\right|=\left|AB\right|=\left|BF_2\right|=c$，$\angle F_1AF_2=90°$，

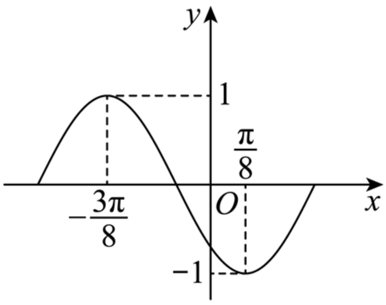
$\therefore\left|AF_2\right|=\sqrt{3}c$，$\therefore\left|AF_1\right|+\left|AF_2\right|=\left(\sqrt{3}+1\right)c=2a$，

$\therefore e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{c}{\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}c}=\sqrt{3}-1$，



故选：D.

4. 已知 $f\left(x\right)=Asin\left(\omega x+\varphi\right)\left(A>0,\omega>0,\left|\omega\right|<\pi\right)$的一段图象如图所示，则（　　）



A. $f\left(x\right)=sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)$

B. $f\left(x\right)$的图象的一个对称中心为$\left(\frac{\pi}{8},0\right)$

C. $f\left(x\right)$的单调递增区间是$\left[\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{5\pi}{8}+k\pi\right],k\in Z$

D. 函数$f\left(x\right)$的图象向左平移$\frac{5\pi}{8}$个单位后得到的是一个奇函数的图象

【答案】C

【解析】

【分析】首先根据函数图像求出函数解析式，即可判断 A，再根据正弦函数的性质一一判断即可；

【详解】解：由图可知$A=1$，$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{8}-\left(-\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{\pi}{2}$，所以$T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，解得$\omega=2$，所以

$f\left(x\right)=\sin\left(2x+\varphi\right)$，又函数过点$\left(-\frac{3\pi}{8},1\right)$，即$f\left(-\frac{3\pi}{8}\right)=\sin\left[2\times\left(-\frac{3\pi}{8}\right)+\varphi\right]=1$，所以

$2\times\left(-\frac{3\pi}{8}\right)+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，解得$\varphi=\frac{5\pi}{4}+2k\pi,k\in Z$，因为$\left|\varphi\right|<\pi$，所以$\varphi=-\frac{3\pi}{4}$，所以

$f\left(x\right)=\sin\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)$，故 A 错误；

因为 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(2\times\frac{\pi}{8}-\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$，所以函数关于 $x=\frac{\pi}{8}$ 对称，故 B 错误；

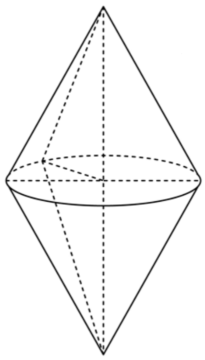
令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{3\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，解得 $\frac{\pi}{8}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{8}+k\pi,k\in Z$，故函数的单调递增区间为 $\left[\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{5\pi}{8}+k\pi\right],k\in Z$，故 C 正确；

将函数 $f\left(x\right)$ 的图象向左平移 $\frac{5\pi}{8}$ 个单位得 $y=\sin\left[2\left(x+\frac{5\pi}{8}\right)-\frac{3\pi}{4}\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$ 为偶函数，

故 D 错误；

故选：C

5. 用一个边长为 4 的正方形纸片，做一个如图所示的几何体，图中两个圆锥等底、等高，则该几何体体积的最大值为（　　）



A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$　　　B. $2\sqrt{3}\pi$　　　C. 4π　　　D. $4\sqrt{3}\pi$

【答案】A

【解析】

【分析】通过圆锥侧面展开图的两种情况①侧面展开图最大为半径为 2 的半圆，②侧面展开图最大为半径为 $2\sqrt{2}$ 的四分之一圆，计算比较即可.

【详解】根据题意有两种方式可以得到这样的几何体，

方式一：如图①，可以得到圆锥的侧面展开图最大为半径为 2 的半圆，

因此一个圆锥的底面半径为 1，母线长为 2，高为 $\sqrt{3}$，

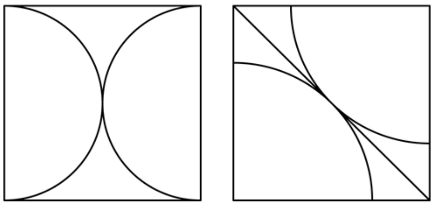
所以两个圆锥体积的最大值为 $V_1=2\times\frac{1}{3}\pi\times 1\times\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$.

方式二：如图②，可以得到圆锥的侧面展开图最大为半径为$2\sqrt{2}$的四分之一圆，

因此一个圆锥的底面半径为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，母线长为$2\sqrt{2}$，高为$\frac{\sqrt{30}}{2}$，

所以两个圆锥体积的最大值为$V_2=2\times\frac{1}{3}\pi\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\times\frac{\sqrt{30}}{2}=\frac{\sqrt{30}}{6}\pi$.

$V_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi>V_2=\frac{\sqrt{30}}{6}\pi$，



①　　　　②

故选：A.

6. 若$a=2025\sin\frac{1}{2025},b=\cos\frac{1}{2025},c=\tan 2025^\circ$，则$a,b,c$的大小关系为（　　）

A. $a>b>c$　　　　B. $a>c>b$　　　　C. $c>b>a$　　　　D. $c>a>b$

【答案】D

【解析】

【分析】结合结论若$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则$\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$，证明$\frac{a}{b}>1$，由此可得$a>b$，再证明$a<1=c$，由此可得结论.

【详解】若$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则$\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$，且$a=2025\sin\frac{1}{2025}>0,b=\cos\frac{1}{2025}>0$，

所以$\frac{a}{b}=2025\frac{\sin\frac{1}{2025}}{\cos\frac{1}{2025}}=2025\tan\frac{1}{2025}>2025\times\frac{1}{2025}=1$，

所以$a>b$，

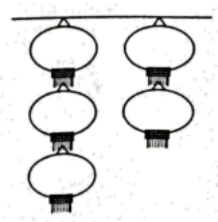
因为$2025\sin\frac{1}{2025}<2025\times\frac{1}{2025}=1$，$\tan 2025^\circ=\tan 45^\circ=1$，

所以$c>a$，

所以$c>a>b$，

故选：D.

7. 元旦联欢会会场中挂着如图所示的两串灯笼，每次随机选取其中一串并摘下其最下方的一个灯笼，直至某一串灯笼被摘完为止，则右侧灯笼先被摘完的概率为（　　）



A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{7}{16}$　　D. $\frac{11}{16}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意，得到摘取的次数为$2,3,4$次，结合独立重复实验的概率计算公式，即可求解.

【详解】根据题意，直至某一串灯笼被摘完为止，可得摘取的次数为$2,3,4$次，

结合独立重复实验的概率计算公式，可得：

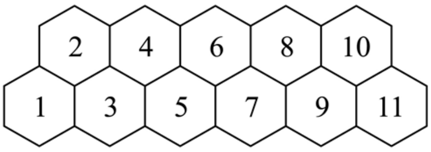
当两次摘完时，可得概率为$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$；

当三次摘完时，可得概率为$C_2^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$；

当四次摘完时，可得概率为$C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{16}$，则$P=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}=\frac{11}{16}$.

故选：D.

8. 如图，从 1 开始出发，一次移动是指：从某一格开始只能移动到邻近的一格，并且总是向右或向上或右下移动，而一条移动路线由若干次移动构成，如从 1 移动到 11：1→2→3→5→7→8→9→10→11 就是一条移动路线．从 1 移动到数字$n\left(n=2,3,\cdots 11\right)$的不同路线条数记为$r_n$，从 1 移动到 11 的事件中，跳过数字$n\left(n=2,3,\cdots 10\right)$的概率记为$p_n$，则下列结论正确的是（　　）



①$r_9=34$，②$r_{n+1}>r_n$，③$p_5=\frac{24}{89}$，④$p_9>p_{10}$.

A. ①②③　　B. ①②④　　C. ②③④　　D. ①②③④

【答案】A

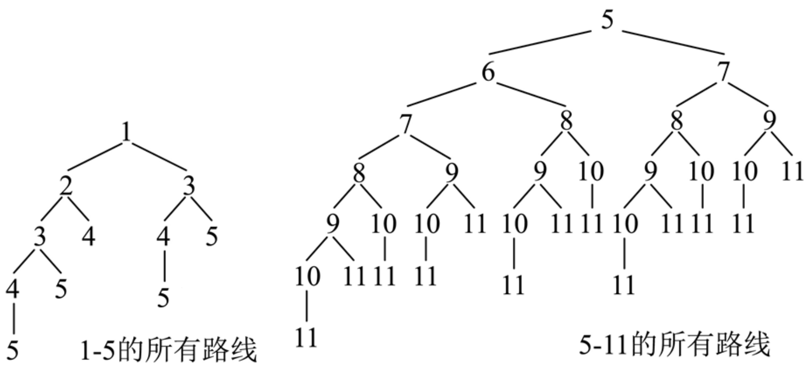
【解析】

【分析】根据题意分析，不难得到$r_2=1, r_3=2,\ r_{n+1}=r_n+r_{n-1}\left(n\geq 3\right)$，按照规律写出各项，即可判断①，②正确；对于③，结合树状图，考虑对立事件所包含的样本点数，利用古典概型概率公式计算即得，同法求出p_9, p_{10}即可判断.

【详解】由题意可知$r_2=1, r_3=2,\ r_{n+1}=r_n+r_{n-1}\left(n\geq 3\right)$，

则$r_4=3, r_5=5, r_6=8, r_7=13, r_8=21$，$r_9=34, r_9=34, r_{10}=55, r_{11}=89$，

则①正确；显然$r_{n+1}>r_n$，故②正确；



1-5的所有路线　　5-11的所有路线

因为$r_{11}=89$，经过数字 5 的路线共有$5\times 13=65$条.

理由:如上树状图所示，分别计算 1-5 的路线共有 5 条，5-11 的路线共有 13 条，

利用分步乘法计数原理可得，过数字 5 的路线共有$5\times 13=65$条.

则$p_5=\dfrac{89-65}{89}=\dfrac{24}{89}$，故③正确；

同理可得$p_9=\dfrac{89-34\times 2}{89}=\dfrac{21}{89}, p_{10}=\dfrac{89-55\times 1}{89}=\dfrac{34}{89}$,即有$p_9<p_{10}$，故④错误.

故选:A.

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 已知函数$f\left(x\right)=2024\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，则（　　）

A. $f\left(x\right)$的图象关于直线$x=\dfrac{\pi}{6}$对称

B. $f\left(x\right)$的图象关于点$\left(\dfrac{5\pi}{12},0\right)$对称